جامعة ديالى
كلية التربية الاساسية
قسم الحاسبات

التفاضل

المرحلة الاولى

للعام الدراسي 2015-2016

للفصل الدراسي الاول

مكتبة الشروق
مكتبة الشروق
بإدارة عبد الرحمن

نبدأ بهذه المواضيع المتفرقة والتي تخص المجموعات والدوال والتي سبق للقارئ وان تعرف عليها في دراسته السابقة نذكرها هنا بعجالة للتذكير بها.

<u>المجموعة</u> ***<u>set</u>***

من المفاهيم الاساسية في الرياضيات مفهومي (المجموعة) و (عنصر من المجموعة) واللذان نتعامل معهما كمصطلحات أولية أو عناصر غير معرفة (undefined terms) لأننا لا نستطيع ان نعطي تعريف (definition) محدد وجيد لهما، ومع هذا فان مفهوم المجموعة و مفهوم عنصر من مجموعة يمكن ادراكهما بسهولة ويسر، وسوف يقتصر عملنا في هذا الكتاب على مجموعات من الاعداد الحقيقية (Real numbers) وسنرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$.

اذا كان x عنصرا ينتمي لمجموعة A (x belongs to A) وسوف نعبر عن ذلك بالرمز

$$x \in A$$

واذا كان y عنصر لا ينتمي للمجموعة A فسوف نعبر عن ذلك بالرمز $y \notin A$.

هناك طريقتان للتعبير او لتحديد المجموعة الاولى بدرج جميع عناصر المجموعة [illegible] فمثلا اذا كانت المجموعة B مجموعة الاعداد الصح[illegible]

المجموعـــة التـــي لا تحتـــوي علـــى عنـــاصر تســـمى بالمجموعـــة الخاليـــــة (empty or null set) ويرمز لها بالرمز Φ.

<u>تعريف</u>

يقـــال بـــأن المجموعـــة A هـــي مجموعـــة جزئيـــة مـــن المجموعـــة B (A is a subset of B) اذا كان كل عنصر ينتمي للمجموعة A منتميا للمجموعـة B. سوف نعبر عن ذلك بالرمز

$$A \subseteq B$$

<u>ملاحظة</u> : بلغة الرموز يعبر عن هذا التعريف كالاتي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

حيث $\subseteq$ يعني (subset) رمز الجزئية.

$\Leftrightarrow$ يعني (if and only if) اذا واذا فقط (iff)

$\forall$ يعني (for all) لكل

$\Rightarrow$ يعني (if .....then ...) اذا .....فان....

أو يعني (implies) يؤدي الى.

<u>ملاحظة</u>: 1. كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها

$A \subseteq A$ لأي مجموعة A

2. $\phi \subseteq A$ لأي مجموعة A.

<u>تعريف :</u> المجموعة A تساوي المجموعة B (A equals B) إذا كانت A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من A وبلغة الرموز تكون

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

حيث الرمز $\wedge$ يعني (and) و .

<u>تعريف:</u> $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

حيث الرمز $\cap$ يعني intersection التقاطع.

ملاحظة : 1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

2. اذا كان $A \cap B = \Phi$ فيقـــال ان المجموعتيــن A و B منفصلتـــان (disjoint).

تعريف:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

حيث $\cup$ يعني (union) الاتحاد والرمز $\vee$ يعني (or) أو .

ملاحظة: 1. $A \cup A = A$ لأي مجموعة مثل A

2. $A \subseteq B \quad iff \quad A \cup B = B$

تعريف : حاصل الضرب الديكارتي (cartesian product) للمجموعتيــن A و B والذي يرمز له بالرمز $A X B$ هو مجموعة كــل الازواج المرتبــة (a, b) حيــث $a \in A$ و $b \in B$

وبلغة الرموز

$$AXB = \{(a, b) / a \in A, \ \ b \in B\}$$

ملاحظة: $AXB \neq BXA$

نظرية : إذا كانت A و B و C ثلاثة مجموعات فان

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ملاحظة : $a > b$ يعني (a اكبر من b) (a greater than b)

$a \geq b$ يعني (a اكبر او يساوي b) (a greater than or equal b)

$a < b$ يعني (a اصغر من b) (a less than b)

$a \leq b$ يعني (a اصغر او يساوي b) (a less than or equal b)

حيث a و b عددان حقيقيان

اثناء دراستنا سنتعامل مع بعض المجموعات الجزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية مثل الفترة المفتوحة والفترة نصف المفتوحة والفترة المغلقة والفترة غير المنتهية .

تعريف:

1. $(a, b) = \{ x / a < x < b \}$

وتسمى فترة مفتوحة (open interval)

2. $[a, b] = \{ x / a \leq x \leq b \}$

وتسمى فترة مغلقة (closed interval)

3. $[a, b) = \{ x / a \leq x < b \}$

$(a, b] = \{ x / a < x \leq b \}$

وتسمى فترات نصف مفتوحة (half- open intervals)

4. الفترات التالية تسمى بالفترات غير المنتهية (infinite intervals)

$(a, \infty) = \{ x / x > a \}$

$[a, \infty) = \{ x / x \geq a \}$

$(-\infty, b) = \{ x / x < b \}$

$(-\infty, b] = \{ x / x \leq b \}$

$(-\infty, \infty) = IR$

الدوال : *Functions*

الدالة من المفاهيم الاساسية في الرياضيات ولقد تعاملنا مع هذا المفهوم (مفهوم الدالة) كثيرا في دراستنا السابقة وعرفنا ان الدالة تتحدد بمجال

(Domain) ومجال مقابل (co - domain) وقاعدة اقتران (rule) وان الدالة تكتب بصورة :

$$f : A \to B$$

حيث المجموعة A تمثل مجال الدالة والمجموعة B مجالها المقابل واذا كانت $x \in A$ ، $y \in B$ بحيث ان $y = f(x)$ فيقال عن $f(x)$ بانها قيمة الدالة في x (The value of the function in x) اما y فيسمى بصورة العنصر x تحت تاثير الدالة f (The image of x under f).

المجموعة $f(A) = \{ y / y = f(x) , \forall \ x \in A)$

تسمى بمدى الدالة f (The range of f)

<u>تعريف</u> : الدالة من المجموعة A الى المجموعة B هي قاعدة تقرن كل عنصر من عناصر المجال بعنصر وحيد من عناصر المدى.
اذا اردنا ان نستخدم لغة الرموز في التعبير عن هذا التعريف سيكون الحال كالاتي:

$f : A \to B$ دالة

اذا كان

$$\forall \ x \in A \ \exists ! \ y \in B / y = f(x)$$

حيث ان الرمز $\exists$ يعني يوجد (there exists) والرمز ! يعني وحيد (unique).

<u>مثال</u> : نستطيع القول ان المعادلة $y = x^2$ دالة مجالها مجموعة الاعداد الحقيقية IR لأننا نستطيع تربيع أي عدد حقيقي بدون أي مشكلة اما مداها فهي مجموعة

٦ $f(x)=y$

الإعــداد الحقيقيــة غــير الســالبة بســـــبب ان مربـــع أي عـــــدد حقيقـــي (سالب او موجب) هو عدد غير سالب.

مثال: المعادلة $y=\frac{x}{x-3}$ هي دالة مجالها مجموعة الاعداد الحقيقية عدا $x=3$ أي $IR - \{3\}$ وكي نحسب المدى نجد قيمة x بدلالة y كالاتي :

$$yx-3y=x$$

$$x(y-1)=3y$$

$$\therefore x=\frac{3y}{y-1}$$

لذا فمجموعة المدى هي مجموعة الاعداد الحقيقية عدا $y=1$ أي $IR - \{1\}$

تعريف : تسمى الدالة $f:A\to B$ بالدالة الثابتـــة (constant function) اذا وجد $c\in B$ بحيث ان

$$f(a)=c \quad \text{لكل } a\in A$$

تعريف الدالة الذاتية (identity function) على المجموعة A والتي يرمز لـــها بالرمز i_A او I هي الدالة $\mathrm{i}:A\to A$ بحيث $\mathrm{i}(a)=a$ لكل $a\in A$.

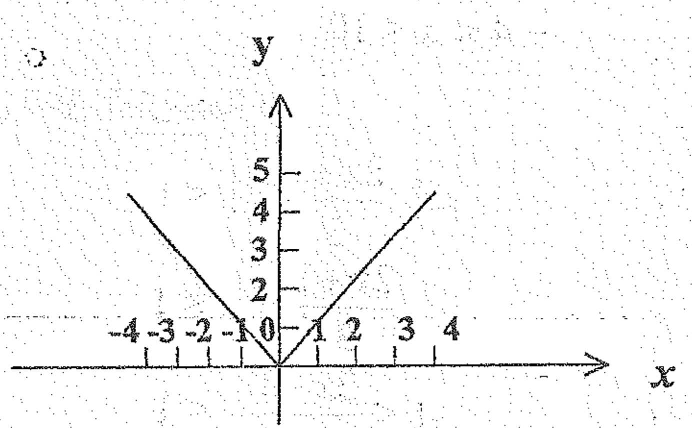
تعريــف تعــرف القيمـــة المطلــقة للعـــدد x والتـــي يرمـــز لـــها بـــالرمز $|x|$ (The absolute value of x) كالاتي :

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$$

<u>مثال</u> : الدالة $f: IR \rightarrow IR$ بحيث $f(x)=|x|$ لكل $x \in IR$ مجالـــها مجموعــة

الاعداد الحقيقية IR اما مداها فمجموعة الاعداد الحقيقية غير الســـالبة ومخطــط

منحني هذه الدالة كما مبين ادناه



<u>بعض خواص القيمة المطلقة</u>

تتصف القيمة المطلقة بالخواص التالية :

1. $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$

2. $|ab| = |a|\,|b|$

3. $|a-b| = |b-a|$

4. $|a| = |-a|$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

6. $|x-a| < c \Leftrightarrow a-c < x < a+c$

7. $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

8. $|a-b| \geq \big|\,|a|-|b|\,\big|$

$-7 < |x-3| < 7$

$-7 < x-3 < 7$

مثال جد قيم x التي تحقق المتراجحة (inequality)

$$|x-3| < 7$$

الحل بما ان $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$

$$\therefore \quad -7 < x-3 < 7$$

نضيف 3 لكل حد من حدود المتراجحة ونحصل على

$$-7+3 < x-3+3 < 7+3$$

$$-4 < x < 10$$

مثال جد قيم x التي تحقق المتراجحة :

$$\left|\frac{2x+1}{3}\right| < 1$$

الحل بما ان $\left|\frac{2x+1}{3}\right| < 1$

اذن $-1 < \frac{2x+1}{3} < 1$

$-3 < 2x+1 < 3$ (بالضرب في 3)

$-4 < 2x < 2$ (بطرح 1)

$-2 < x < 1$ (بالقسمة على 2)

$(-2, 1)$

مثال جد قيم x التي تحقق المتراجحة $|2x-5| \leq 1$

الحل

$$-1 \leq 2x-5 \leq 1$$

$$4 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq x \leq 3$$

تعريف تسمى الدالة $f(x) = [x]$ بدالة العدد الصحيح الاكبر (The greatest integer function) او بدالة الدرجة (step function) حيث $[x]$ تمثل اكبر عدد صحيح اقل او يساوي x .

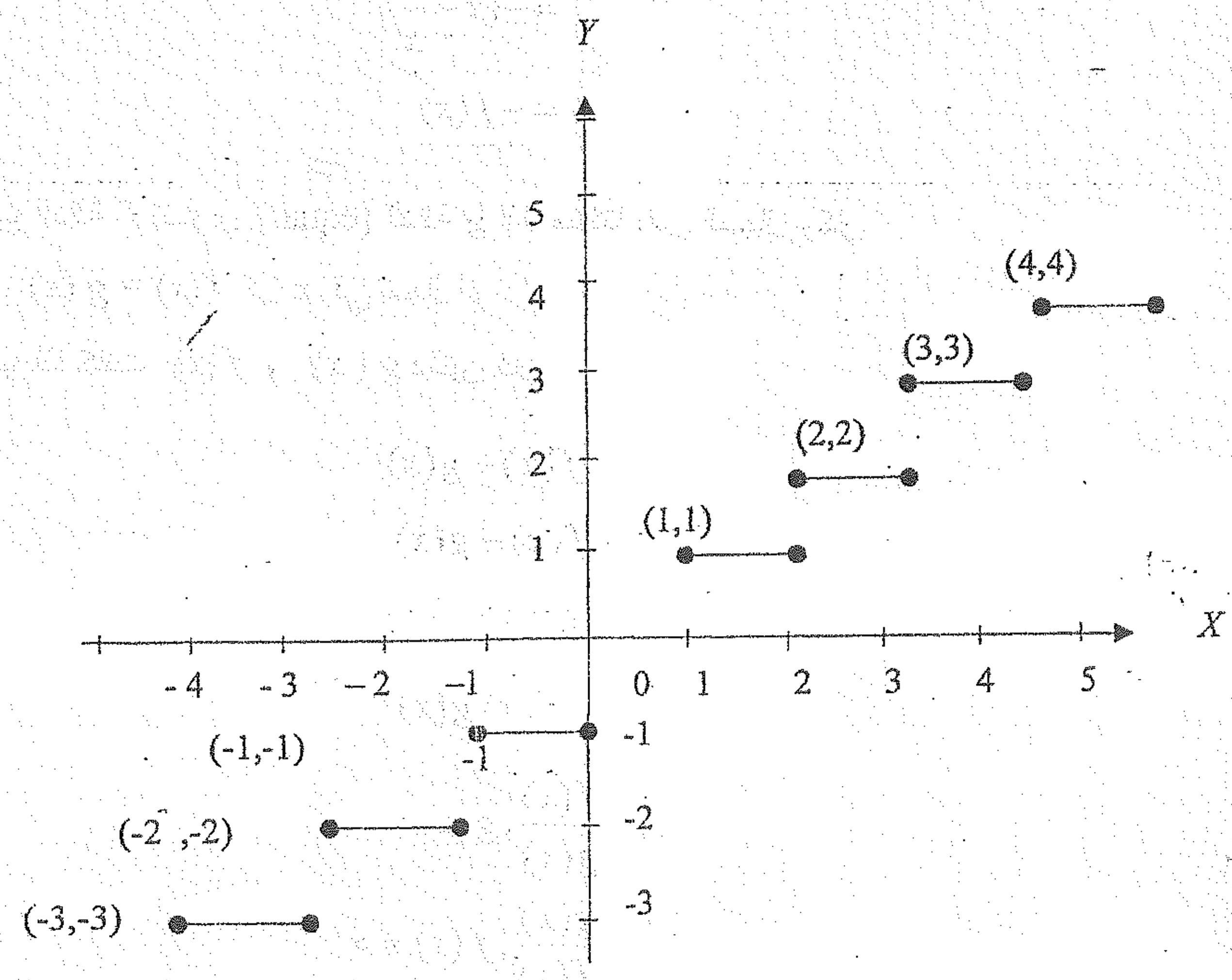
فمثلا:

$[1.7] = 1$

$\left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$[-2.6] = -3$

ان مخطط منحني الدالة $f(x) = [x]$ هو الاتي :



تعريف تسمى الدالة $y=f(x)$ بدالة زوجية الى x (even function) اذا كان $f(-x)=f(x)$ لكل قيم x وتسمى دالة فردية (odd function) اذا كان $f(-x)=-f(x)$.

مثال الدالة $f(x)=x-\frac{1}{x}$ دالة فردية لأن

$$f(-x)=(-x)-\frac{1}{(-x)}$$

$$=-x+\frac{1}{x}$$

$$=-(x-\frac{1}{x})$$

$$=-f(x)$$

تعريف الدالة f تساوي (equal) الدالة g اذا امتلكتا نفس المجال وكان $f(x)=g(x)$ لكل x في مجال f

تعريف اذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فان

$$f(x)+g(x)$$

$$f(x)-g(x)$$

$$g(x)-f(x)$$

$$f(x).g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$$

$$\frac{g(x)}{f(x)}, f(x)\neq 0$$

دوال ايضا الى x معرفة لجميع قيم x الواقعة في كلا من مجالي الدالتين .

مثال اذا كانت

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

$$g(x)=\sqrt{3x}$$

$$f(x)+g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x}$$

$$f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}$$

$$g(x)-f(x)=\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}$$

$$f(x).g(x)=\sqrt{3x(x+1)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x+1}{3x}} \qquad x\neq 0$$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{3x}{x+1}} \qquad x\neq -1$$

تعريف اذا كانت $f\colon A\to B$ و $g\colon B\to c$ دالتين فالدالة المركبة gof (composite function) هي دالة من A الى C بحيث ان

$$(g\,o f)(x)=g(f(x))$$

لكل $x\in A$

مثال اذا كانت $f(x)=-3x$ و $g(x)=\cos x$ فان

$$g(f(x))=\cos(f(x))$$
$$=\cos(-3x)$$
$$=\cos 3x$$

مثال اذا كانت $f(x)=x^2$ و $g(x)=x-5$ فان

$$g(f(x))=g(x^2)$$
$$=x^2-5$$

$g(\sqrt{x})$
$\sqrt{x^2+3}$

<u>مثال</u> اذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+3$ فان

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=(f(x))^2+3$$
$$=(\sqrt{x})^2+3$$
$$=x+3$$
$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}$$
$$=\sqrt{x^2+3}$$

اذن $g \circ f \neq f \circ g$

<u>تعريف</u> اذا كانت $f: A \to B$ دالة فيقال ان

١. f شاملة (onto او surjective) اذا كان $f(A)=B$

٢. f متباينة (one -to -one او injective) اذا كان

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ او $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

٣. f متقابلة (bijective) اذا كانت الدالة f شاملة ومتباينة .

<u>مثال</u> الدالة $f: \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ (I مجموعة الاعداد الصحيحة) حيث $f(x)=x+1$
لكل $x \in \mathrm{I}$ _ هذه دالة متقابلة
ولكن الدالة $g: \mathrm{IN} \to \mathrm{IN}$ (IN مجموعة الاعداد الطبيعية)
حيث $f(x)=2x$ لكل $x \in \mathrm{IN}$
هذه الدالة متباينة ولكنها ليست شاملة .

الدالة $h : I \to I$ حيث $h(x) = x^2 - x$ لكل $x \in I$
ليست شاملة ولا بمتباينة.

نظرية لتكن $g \circ f$ دالة مركبة

١. اذا كانت f و g شاملتان فان $g \circ f$ شاملة ايضا.
٢. اذا كانت f و g متباينتان فان $g \circ f$ متباينة ايضا .
٣. اذا كانت f و g متقابلتان فان $g \circ f$ متقابلة ايضا.

تعريف لتكن $f : A \to B$ دالة متقابلة ، معكوس الدالة f (The inverse of f)
والذي يرمز له بالرمز f^{-1} هو الدالة $f^{-1} : B \to A$ حيث $f^{-1}(y) = x$ اذا
كانت $f(x) = y$.

ملاحظة لتكن $x \in A$ و $f(x) = y$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$$
اذن $f^{-1} \circ f$ دالة ذاتية على المجموعة A
ونستطيع ان نبين ان $f \circ f^{-1}$ دالة ذاتية على B

ملاحظة اذا كانت $f : A \to B$ دالة متقابلة فنستطيع ان نبين بان $f^{-1} : B \to A$
دالة متقابلة أيضاً.

مثال جد معكوس الدالة $y = f(x) = \frac{1}{4}(x+3)$

الحل نجد x بدلالة y
$$x = 4y - 12$$
نبدل اماكن x و y حيث x ياخذ مكان y وبالعكس
$$y = 4x - 12$$
اذن
$$f^{-1}(x) = 4x - 12$$

كي نتأكد من عملنا نحسب

$$f^{-1}(f(x)) = 4\,(f(x)) - 12$$

$$= 4(\frac{1}{4}x + 3) - 12$$

$$= x$$

الان نحسب $f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{4}(f^{-1}(x)) + 3$

$$= \frac{1}{4}(4x - 12) + 3$$

$$= x$$

مثال جد معكوس الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل جد x بدلالة y

$$\therefore x = y^2$$

نبادل بين اماكن x و y

$$\therefore y = x^2$$

اذن $f^{-1}(x) = x^2$

مثال جد معكوس الدالة $y = 27x^3$

الحل نجد x بدلالة y

$$x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$$

نبادل في اماكن x و y

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$$

اذن
$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$$

<u>نظرية</u> اذا كانت f دالة متقابلة فان

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

<u>الغايات وكيفية ايجادها</u> *The limits*

الغاية مفهوم اساسي لموضوع الرياضيات وان دراسة حساب التفاضل والتكامل يعتمد كليا على مفهوم الغاية .

والان ما هي الغاية ؟

يمكن القول ان قيمة الدالة f هي الغاية L (L عدد) عند النقطة a اذا كانت f تنقل النقاط المختلفة عن a ولكن القريبة منها الى نقاط قريبة من L .

ان هذا يمثل تفسيرا هندسيا للغاية ولكنه لا يمثل تعريفا رياضيا دقيقا لمفهوم الغاية ، وسنحاول هنا التدرج بالموضوع وصولا لفهم أعمق لموضوع الغاية وتعريفها وسنبدأ بالمثال الرياضي الاتي:

<u>مثال</u> (1) لتكن $f(x) = 2x + 3$

أ. جد قيمة $f(x)$ عندما $x = 2$ (جد $f(2)$)

ب. اعمل جدولا بقيم $f(x)$ عندما تقترب x من العدد 2 من جهة اليمين وعندما تقترب منه من جهة اليسار .

جـ. ماذا تلاحظ من الجدول المعد بالفرع ب.

الحل

(أ) $$f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

اقتراب x من 2 من جهة اليمين		ب. اقتراب x من 2 من جهة اليسار	
x	$f(x) = 2x + 3$	x	$f(x) = 2x + 3$
2.5	8	1.5	6
2.1	7.2	1.8	6.6
2.05	7.1	1.89	6.78
2.001	7.002	1.9	6.8
2.0001	7.0002	1.999	6.998
2.00001	7.00002	1.9999	6.9998

جـ. نلاحظ من الجدول عندما تقترب x من العدد 2 (سواء كان هذا الاقتراب من جهة اليمين او اليسار) فان الدالة $f(x) = 2x + 3$ تقترب من العدد 7 ، ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة الرياضية التالية :

$$\lim_{x \to 2} (2x + 3) = 7$$

والتي تقرأ " غاية الدالة ($2x + 3$) عندما تقترب x من العدد 2 هي العدد 7 " .

مثال (2) اذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ جد $\lim_{x \to 2} f(x)$

الحل اذا عوضنا في $f(x)$ عن $x = 2$ فسنحصل على $\dfrac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة، لذا سنعمل الاتي:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$$

وعندما $x \neq 2$ فان

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

<u>مثال(3)</u> اذا كانت $f(x)=\frac{x^2+3x}{x}$ جد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

<u>الحل</u> اذا عوضنا في $f(x)$ عن $x=0$ فسنحصل على $\frac{0}{0}$ وهـــذه كميـــة غـــير معرفة ولكن سنعمل الاتي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}$$

عندما $x\neq 0$ فان

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+3)$$

<u>مثال (4)</u> اذا كانت $f(x)=\sqrt{5x+6}$ جد $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

<u>الحل</u>

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5(2)+6}=4$$

لذا نستطيع القول ان

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

مما سبق يمكن القول ان غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد a هي العـــدد L والتي تكتب

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}$$

اذا كانت $f(x)$ تقترب من العدد L كلما اقتربت x من العـــدد a دون مســاواته ، وهذا ليس بتعريف رياضي دقيق لمفهوم الغاية ، كما يمكن ملاحظة مـــا يلـــي مـــن الامثلة السابقة :-

ملاحظة ١. لا يشترط لـــ $f(x)$ ان تكون معرفة عند $x=a$

ملاحظة٢: ولكن ان حصل وان كانت $f(x)$ معرفة عند $x=a$ فغالبا ما يحدث ان تتساوى قيمة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ مع $f(a)$ ولكن هذا لا يحدث دائما. وبقول آخر اذا كانت $f(x)$ معرفة فقد يحدث انه يمكن ايجاد الغاية بتعويض قيمة $x=a$ مباشرة في الدالة $f(x)$.

__تدريب(١)__

لتكن $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ جد $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ونتمنى ان تستمتع بدراستك وتساهم ايضا في تقيم ادائك نرجو منك حل المسائل التالية بنفسك :

__اسئلة التقويم الذاتي (١)__

جد الغايات التالية ، او بين عدم وجودها:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$

2. $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2+5z+6}{z+2}$ = 5

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x^2-}$

5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(5+h)^2-25}{h}$

6. $\lim\limits_{z\to -7}\dfrac{1}{z+7}$

مربع الاول + ضعف الاول × الثاني + مربع الثاني

تعريف الغاية

لو رجعنا الى المثال (١) ودرسنا الجدول الخاص بالفرع (ب) للاحظنا ما يلي:

اولا: اننا اخذنا قيم لـ x الاقل من 2 ، والاكبر من 2 بمقدار 0.5 وكانت النتيجة ان $f(x)$ اخذت قيم اقل من 7 واكبر منها بمقدار 1 .

ثانيا: اننا اخذنا قيم لـ x اقل من 2 بمقدار 0.2 واكبر من 2 بمقدار 0.1 فكانت قيم $f(x)$ اقل من 7 بمقدار 0.4 واكبر من 7 بمقدار 0.2 ...وهكذا . وبشكل عام اذا كانت $2+\delta > x > 2-\delta$ فان $7+\in > f(x) > 7-\in$

حيث δ ، $\in$ عددان صغيران موجبان ، ولو فرضنا ان قيمة $\delta = 0.001$ فيمكننا ان نجد قيمة $\in$ وكالاتي:

$$7.002 > f(x) > 6.998 \Leftarrow 2.001 > x > 1.999$$

أي ان

$$7-\in = 6.998$$

$$\therefore \in = 0.002$$

وهذا يعني (يقصد بجوار النقطة a مثلا اية فترة مفتوحة تحوي ش اذا كانت x تنتمي الى $(2-\delta , 2+\delta)$ فان $f(x)$ تنتمي الى $(7-\in)\,(7+\in)$ ، أي اذا انتمت x الى جوار العدد 2 فان $f(x)$ تنتمي الى جوار العدد 7 وبذا يقال ان غاية الدالة $f(x) = 2x+3$ عندما x تقترب من 2 هي العدد 7 ويعبر عن ذلك

$$\lim_{x \to 2} (2x+3) = 7$$

وباستخدام مفهوم القيم المطلقة نحصل على ان

$2+\delta > x > 2-\delta$ تعني $|x-2| < \delta$

وان $7+\in > f(x) > 7-\in$ تعني $|f(x)-7| < \in$

تعريف الغاية

غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a هي العدد L اذا اعطيت $\in > 0$ فيوجد $\delta > 0$ بحيث ان لكل قيم x

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \in$$

$\in = 1\times10^{-4}$
0.0001

Pm 2

مثال (5) باستخدام تعريف الغاية برهن على ان $\lim_{x\to 3}(3x-7)=2$

الحل حسب التعريف نبرهن انه لكل $0 < \in$ توجد $0 < \delta$ بحيث

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |(3x-7)-2|<\in$$

ناخذ الطرف الايمن

$$|(3x-7)-2|<\in$$

$$|3x-9|<\in \Rightarrow 3|x-3|<\in \quad |x-3|<\frac{\in}{3}$$

فاذا فرضنا ان $\delta=\frac{\in}{3}$ فان $0<|x-3|<\delta$

مثال (6) باستخدام تعريف الغاية بين ان

$$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$$

الحل حسب التعريف

لكل $0 < \in$ توجد $0 < \delta$ بحيث ان لكل x فان

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |(5x-3)-2|<\in$$

$$|(5x-3)-2|<\in$$

$$|5x-5|<\in$$

$$5|x-1|<\in$$

$$|x-1|<\frac{\in}{5}$$

لذا سناخذ $\delta=\frac{\in}{5}$

ملاحظة ان القيمة $\delta=\frac{\in}{5}$ ليست القيمة الوحيدة لـ δ والتي تحقق المتباينة الخاصة بـ δ بل ان أي عدد صغير موجب δ يحققها .

مثال(7) برهن على ان $\lim_{x\to c} x = c$ حيث c عدد ثابت

الحل من تعريف الغاية .

لكل $0 < \in$ يوجد $0 < \delta$ بحيث ان لكل x

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |x - c| < \in$$

لذا سناخذ $\delta = \in$

مثال (8)

أثبت أن $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$ باستخدام تعريف الغاية

الحل : لنفرض أن $0 < \in$ فعلينا ايجاد δ بحيث أن

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4\right| < \in$$

الآن $\left|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4\right| < \in$

$$\left|\frac{2x^2-4x+2}{x-1}\right| < \in$$

$$|2(x-1)| < \in$$

$$|x-1| < \frac{\in}{2}$$

ولهذا سناخذ $\delta = \frac{\in}{2}$

مثال (9) اثبت ان

$$\lim_{x \to -1} (3x+7) = 4$$

الحل نفرض ان $\in > 0$ وعلينا ان نحصل على δ بحيث ان

$$0 < |x+1| < \delta \Rightarrow |(3x+7)-4| < \in$$

$$|(3x+7)-4| < \in$$

$$|3x| < \in - 3$$

$$|x| < \frac{\in}{3} - 1$$

$$|x+1| < \frac{\in}{3}$$

لذا سناخذ $\delta = \frac{\in}{3}$

تدريب (2)

باستخدام تعريف الغاية برهن ان $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{11}{2}$

اسئلة التقويم الذاتي (2)

استخدم تعريف الغاية لأثبات ان :-

1. $\lim_{x\to 2}(2x+1)=5$
2. $\lim_{x\to 1} 3x = 3$
3. $\lim_{x\to 3}\left(6-\frac{x}{3}\right)=5$

$\delta = \frac{\varepsilon}{7}$

الغاية من اليمين والغاية من اليسار ونظريات الغايات

Right Limits and Left Limits

في بعض الاحيان تكون قيمة غاية الدالة $f(x)$ مختلفة وفقا لاقتراب x من العدد a يمينا او يسارا. ان التعبير $\lim_{x\to a^+} f(x)$ يعني غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من جهة اليمين ، اما التعبير $\lim_{x\to a^-} f(x)$ فيعني غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a من جهة اليسار .

تعريف : اذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

فأن

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

اما اذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

فنقول بأن $\lim_{x\to a} f(x)$ غير موجودة

ويقول آخر فأن الدالة $f(x)$ لها غاية في نقطة ما اذا واذا فقط كانت الغايتين لهذه الدالة من جهة اليمين ومن جهة اليسار موجودتان ومتساويتان .

تعريف : اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة المفتوحة (x_0 و c) حيث c عدد حقيقي وأن $c > x_0$ وليكن لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

فيقال أن L هي غاية الدالة $f(x)$ من جهة اليمين عندما $x \to x_0$ ويرمز لها

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

الآن لنفرض ان الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة المفتوحة (x_0 و d) حيث d عدد حقيقي وأن $d < x_0$ وليكن لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

فيقال بأن L هي غاية الدالة $f(x)$ من جهة اليسار عندما $x \Rightarrow x_0$ ويرمز لها:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

مثال (10) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 , & x > 2 \\ 3x + 1 , & x < 2 \end{cases}$$

جد $\lim_{x \to 2} f(x)$ (إن وجدت)

dx

الحل : الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x = 2$

ولكن اذا وجد $\lim_{x\to 2} f(x)$ فهذا يعني أن :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \ \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+3) = 7$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x+1) = 7$$

∴ الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 7$$

مثال : (11)

اثبت ان $\lim_{x\to o^+} \sqrt{X} = 0$

بأستخدام تعريف الغاية ،

الحل نفرض أن $\in > o$ ويجب ان نجد δ بحيث ان :

$$o < |x-o| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0| < \in$$

$$|\sqrt{x}-0| < \in$$

$$\sqrt{x} < \in$$

$$x < \in^2$$

لذا سنختار $\delta = \in^2$

اذا كانت $0 < x < \delta$

فأن $0 < \sqrt{x} < \sqrt{\delta}$

ولكن $\delta = \in^{6}$ $\qquad \sqrt{\delta} = \in$

$$\therefore 0 < \sqrt{x} < \in$$

وهذا يعني أن $\lim\limits_{x \to o^{+}} \sqrt{x} = 0$ (حسب التعريف)

مثال : (12)

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x > 0 \\ x-1 & , x < 0 \end{cases}$$

اثبت أن $\lim\limits_{x \to o^{-}} f(x) = -1$ باستخدام تعريف الغاية

الحل :

نفرض أن $o \geq \in$ وعلينا أن نجد δ بحيث أن

$$O < |x - O| < \delta \Rightarrow |(x-1) - (-1)| < \in$$

$$|(x-1) - (-1)| < \in$$

$$|x| < \in$$

لذا نختار $\delta = \in$

اذا كانت $\qquad -\delta < x < O$

فأن $\qquad |x| < \delta$

ولأن $\delta = \in$ ، وأن $|(x-1) - (-1)| = 1x1$

$\therefore \quad |f(x) - L| < \in$

أي ان $\lim\limits_{x \to o^-} f(x) = -1$ (حسب التعريف)

<u>مثال (13)</u> اذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & ,x>2 \\ 3x & ,x<2 \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

<u>الحل</u> نجد الغاية من جهة اليمين أولاً

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+4)$$

$$= 2+4$$

$$= 6$$

الآن نجد الغاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x$$

$$= 3.2$$

$$= 6$$

اذن

الغاية من جهة اليمين = الغاية من جهة اليسار

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

<u>مثال (14)</u> ليكن

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3 - \sqrt{9 + x}} & , x > o \\ 3k + 2 & , x < 0 \end{cases}$$

جد k اذا كانت الغاية $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ موجودة .

<u>الحل :</u>

حسب التعريف فأن $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ موجودة تعني أن :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

الآن نجد $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

نضرب بالمرافق $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x}{3 - \sqrt{9 + x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4x}{3 - \sqrt{9 + x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x}{3 - \sqrt{9 + x}} \frac{(3 + \sqrt{9 + x})}{(3 + \sqrt{9 + x})}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{4\cancel{x}(3 + \sqrt{9 + x})}{-\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -4(3 + \sqrt{9 + x})$$

$$= -24$$

نجد الآن $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (3k + 2)$$

$$= 3k + 2$$

ولأن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة :

$$\therefore \quad 3k+2=-24$$

$$\therefore k=\frac{-26}{3}$$

مثال (15)

اذا كانت غاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ موجودة فجدها

الحل : نحن نعرف ان

$$|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x\ngeq 0\end{cases}$$

لذا فأن

$$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1 \quad \text{عندما} \quad x>0$$

وإن

$$\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1 \quad \text{عندما} \quad x<0$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

١٢٥
٦٤
٨٩

لذا نقول أن $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ غير موجودة لأن الغاية من اليميـــن لا تســـاوي الغاية من اليسار .

تدريب (3)

اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & ,x\in(-2\ ,\ 2] \\ 3x+1 & ,x>2 \\ 4x-5 & ,x<-2 \end{cases}$$

جد

$$\lim_{x\to -3} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 3} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -2} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 2} f(x)$$

النظريات الاساسية للغايات

ليكن

$$P(x)=c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

متعدد حدود ولنفرض أن كلاً من $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود فأن :

(1) $\lim_{x\to a} P(x) = P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n+1} + \ldots + c_2 a^2 + c_1 + c$

(2) $\lim_{x\to a} c = c$ حيث c عدد حقيقي

(3) $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

(4) $\lim_{x\to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(5) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

(6) $\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$ نتيجة من 5 حيث n عدد موجب

(7) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ عندما

ملاحظات حول نظريات الغايات .

(١) غاية الدالة المتعددة الحدود $P(x)$ عندما x تقترب من a تساوي $P(a)$

(٢) غاية الدالة الثابتة عدد ثابت يساوي قيمة الدالة .

(٣) غاية حاصل ضرب ثابت في دالة تساوي الثابت نفسه مضروب في غاية الدالة .

(٤) غاية حاصل جمع او طرح دالتين تساوي حاصل جمع او طرح غايتيهما .

(٥) غاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب غايتيهما .

(٦) غاية الدالة $f(x)$ عندما تكون $f(x)$ مرفوعة للاس n تساوي غاية الدالة $f(x)$ مرفوعة لنفس الاس .

(٧) غاية حاصل قسمة دالتين تساوي حاصل قسمة غايتيهما.

مثال (16) احسب $\lim_{x\to -2}(x^2-5)^3=$

الحل حسب نظرية 6 $\lim_{x\to -2}(x^2-5)^3=\left[\lim_{x\to -2}(x^2-5)\right]^3$

$$=\left[\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 5\right]^3$$ حسب نظرية 4

$$=\left[(-2)^2 - 5\right]^3$$ حسب نظرية 1 و 2

$$=[4-5]^3 = -1$$

<u>مثال (17)</u> اذا كان $f(x)=x+1$ و $g(x)=3x$ جد

1) $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$

2) $\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)]$

3) $\lim_{x\to 1}[f(x).g(x)]$

4) $\lim_{x\to 3}(f(x))^2$

5) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)+(f(x))^3}{1+(g(x))^2}$

<u>الحل</u>

(1) $$\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=(2+1)+3(2)=9$$

(2) $$\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} g(x)$$

$$= (3+1) + 3(3) = 13$$

(3) $$\lim_{x\to 1}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to 1} f(x).\lim_{x\to 1} g(x)$$

$$= (1+1).3(1) = 6$$

(4) $$\lim_{x\to 3}(f(x))^2 = \left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)^2 = (3+1)^2 = 16$$

(5) $$\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3} g(x)} = \frac{3+1}{3.3} = \frac{4}{9}$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)+(f(x))^3}{1+(g(x))^2} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0} g(x) + \lim\limits_{x\to 0}(f(x))^3}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0}(g(x))^2}$$

$$= \frac{2.3(0) + \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right)^3}{1 + \left(\lim\limits_{x\to 0} g(x)\right)^2}$$

$$= \frac{0+(0+1)^3}{1+(3.0)^2} = \frac{0+1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

تدريب (4)

جد

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\right.$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

احسب الغاية إن وجدت :

1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)^3}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x+3}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x^2-7}+\sqrt{x+5})$

$\sqrt{16-7} + \sqrt{9} = 3+3=6$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^5 = \left(\operatorname{Lim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^5$

(9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+3|}{x+3}$

(10 $\lim\limits_{x\to 3} 0$

(11 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x}{|x|}$

(12 $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{|x|}$

13) اذا كان $f(x)=\begin{cases} x^4 & ,x\le 2 \\ 4-2x & ,x>2 \end{cases}$ جد $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

م، اللعبة دوال

الان قد يسأل سائل ، ان كان لدالة ما غاية فهل ان قيمة هذه الغاية وحيدة ام تكون لها اكثر من قيمة واحدة ؟ للاجابة عن هذا السؤال نذكر النظرية التالية:

نظرية اذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة فقيمتها وحيدة.

البرهان نفرض ان للدالة $f(x)$ غايتان عندما $x\to a$ وهما:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_1$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_2$$

الان $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ يعني حسب تعريف الغاية اذا كانت $0 < \in$ فيوجد $0 < \delta_1$ بحيث ان

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \in$$

وان $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ يعني

اذا كانت $0 < \in$ فيوجد $0 < \delta_2$ بحيث ان

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \in$$

نفرض ان $\delta = \min [\delta_1, \delta_2]$ لذا سنحصل

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \in \text{ و } |f(x) - L_2| < \in$$

الان

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$
$$\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$
$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$
$$< \in + \in = 2\in$$

أي ان $|L_1 - L_2| < 2\in$ لكل عدد موجب $\in$ وهذا لا يمكن الا اذا كان $L_1 = L_2$

من النظريات المهمة والخاصة بالغايات النظرية المسماة (بنظرية الســندويج) او (نظرية الحصر) والتي تنص على ما يلي:

<u>نظرية السندويج (او نظرية الحصر)</u>

اذا كان

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

لكل x في جوار a ولا يساويها وكانت

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

فان

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

من التطبيقات المهمة لهذه النظرية برهان ما يلي:-

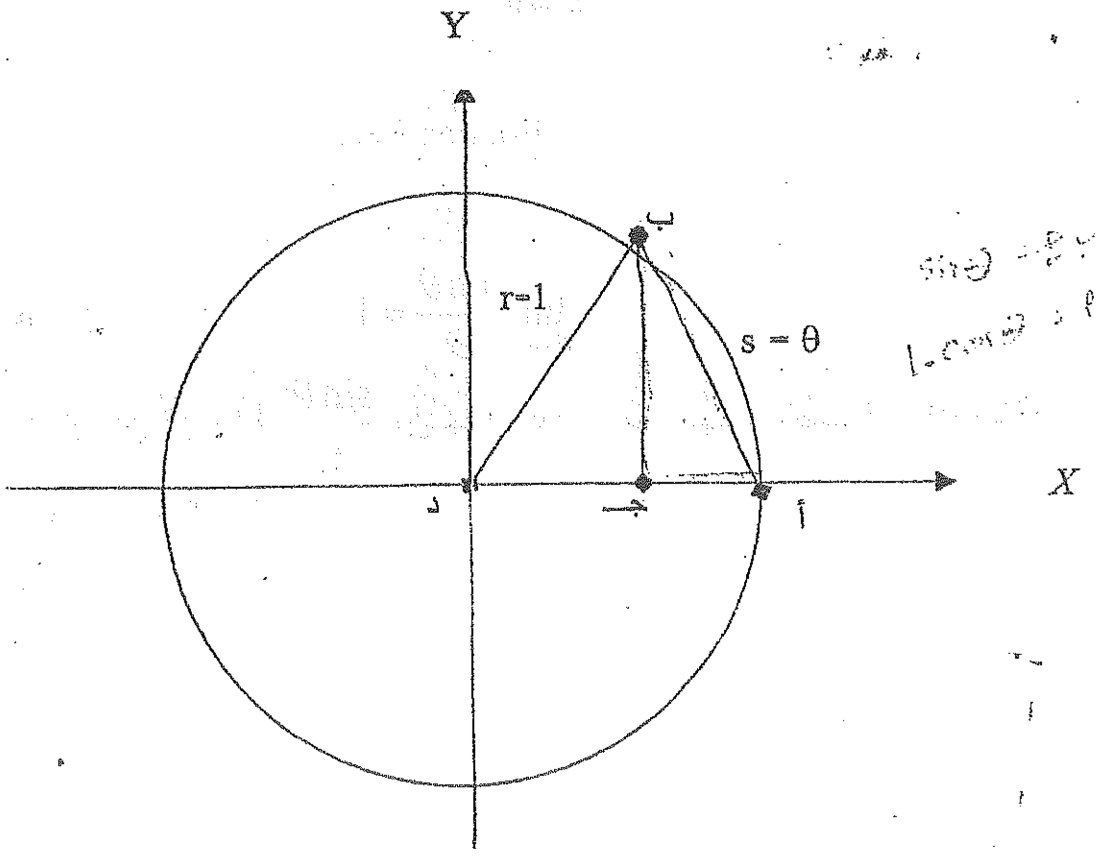
1. $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

2. $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

3. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

بشرط ان θ بالقياس النصف قطري

البرهان ان الزاوية θ بالقياس النصف قطري يمكن ان تكتب بشكل $\theta = \frac{s}{r}$ ولو اخذنا دائرة نصف قطرها 1 تصبح $\theta = s$ كما في الشكل



في المثلث أ ب جـ والقائم الزاوية

جـ ب = $\sin \theta$

أ جـ = $1 - \cos \theta$

من نظرية فيثاغورس ومن حقيقة ان أ ب $< \theta$ نستنتج

$$\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 = (\text{أ ب})^2 < \theta^2$$

$$\sin^2 \theta < \theta^2 \text{ و } (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

او

$$-\theta < \sin \theta < \theta \text{ و } -\theta < 1 - \cos \theta < \theta$$

ناخذ غاية هاتين المتباينتين عندما θ تقترب من 0 ونحصل على :

$$0 \le \lim_{\theta \to 0} \sin \theta \le 0$$

$$0 \le \lim_{\theta \to 0} (1 - \cos \theta) \le o$$

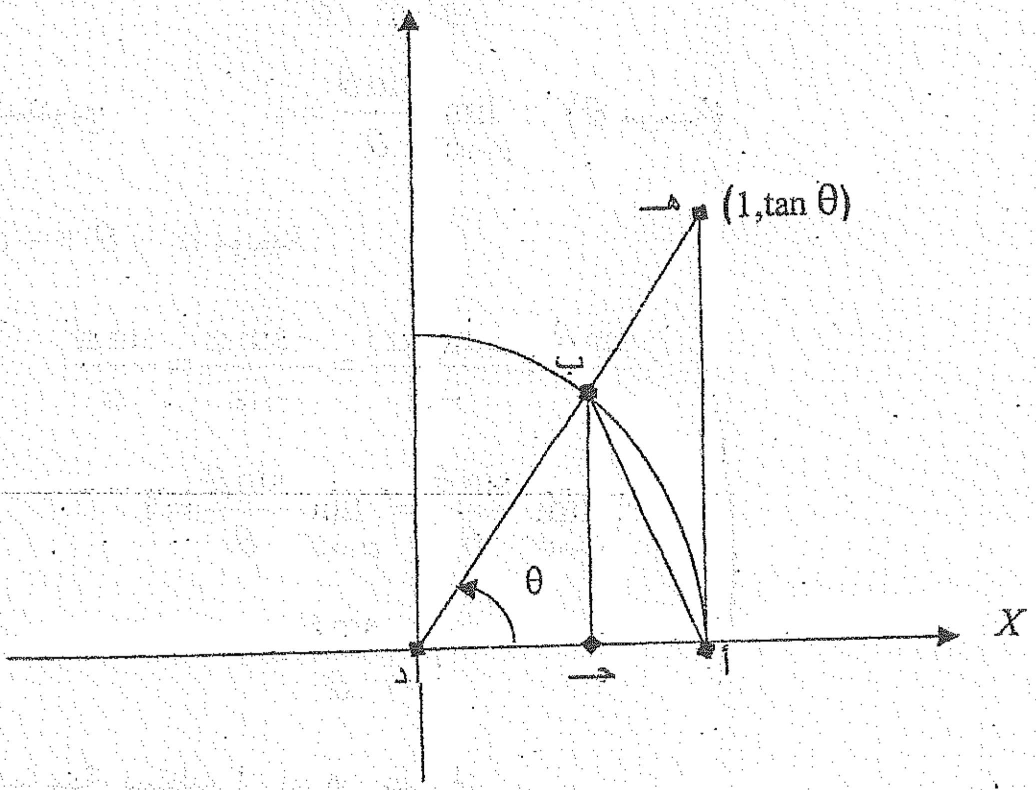
وهذا يعني ان $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$

و $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

والان نبرهن ان $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

هنا يجب ان نبرهن ان غاية $\dfrac{\sin \theta}{\theta}$ من جهة اليمين ومن جهة اليسار عندما θ تقترب من 0 مساوية الى 1

اولا برهان ان غاية $\frac{\sin\theta}{\theta}$ من جهة اليمين مساوية الى 1 نفـــرض ان θ موجبـــة واقل من $\frac{\pi}{2}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ لاحظ الشكل التالي:



اذن

مساحة المثلث ء أ هـــ > مساحة القطاع ء أ ب > مساحة المثلث ء أ ب

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

قسم على $\frac{1}{2}\sin\theta$ نحصل على

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

ويأخذ الغاية لهذه المتباينة عندما θ تقترب من 0^+

$$\therefore 1 \le \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$$

ومن نظرية السندويج $\quad \therefore \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad$ (θ موجبة)

لنفرض ان $\theta = -\alpha$ و α موجبة

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

وهذا يعني ان $\quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

الان باستخدام ما سبق نستطيع ان نبرهن على ان

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1 \quad \text{وان} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

<u>البرهان</u> بالضرب في المرافق

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1+\cos}$$

$$= 1.0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

وكي نبرهن ان

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$$

ا

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

مثال (18) جد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

الحل بما ان

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)}{3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}$$

عندما x ? 0

وعندما تقترب x من 0 فان $3x$ تقترب من 0 ايضا

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2.1}{3.1} = \frac{2}{3}$$

مثال (19) جد
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

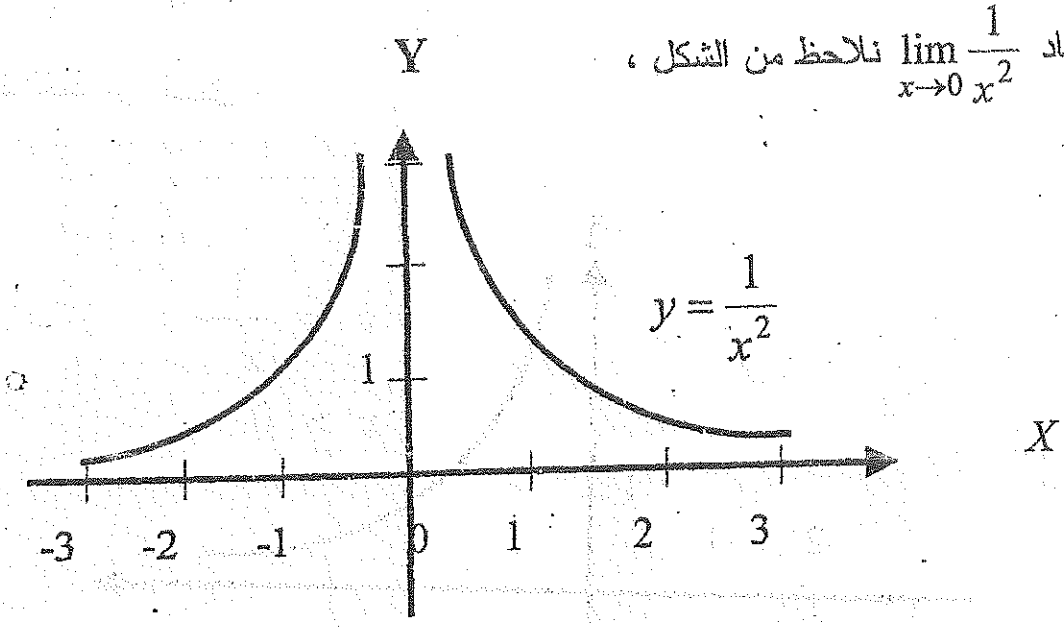
اسئلة التقويم الذاتي (4)

جد الغايات التالية إن وجدت :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 10x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$

الغايات عند اللانهاية و الغايات اللانهائية:

لايجاد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ نلاحظ من الشكل ،

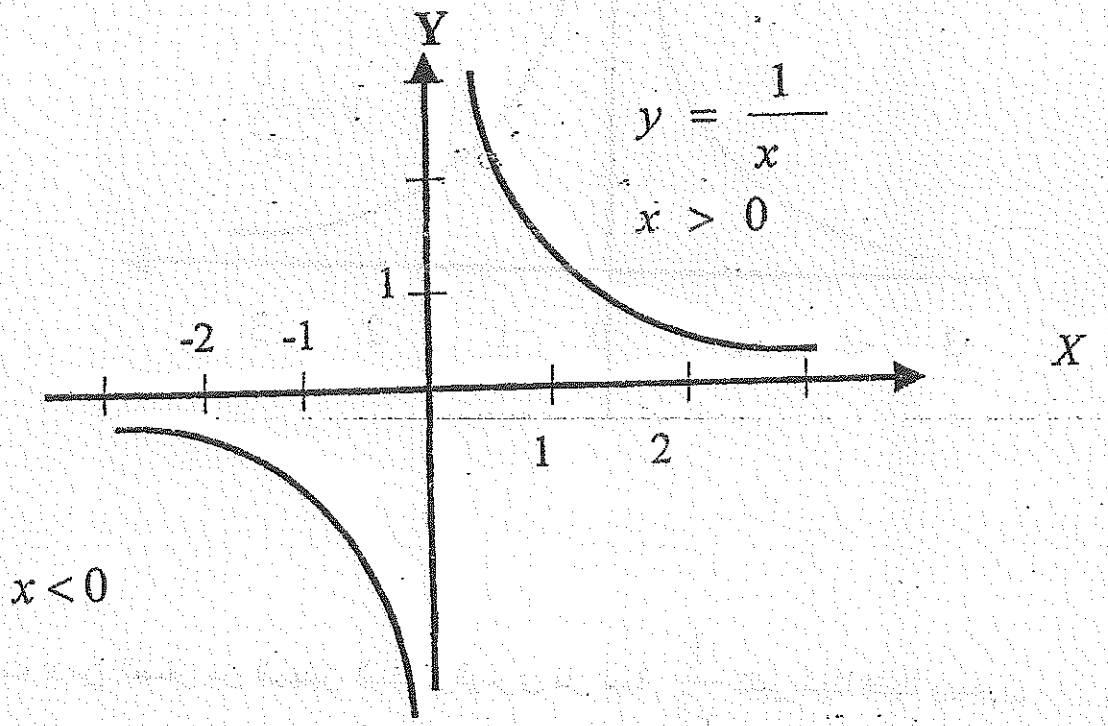


كلما اقتربت x من الصفر من الجهتين اليمنى واليسرى فان قيمة $\frac{1}{x^2}$ تكبر شيئا فشيئا وبدون حد فنقول بان $\frac{1}{x^2}$ تقترب من اللانهاية عندما تقترب x من الصفر

ويعبر عن ذلك بالصيغة $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ اما $\lim\limits_{x \to 0} (-\frac{1}{x^2})$ فانها تساوي $-\infty$

مثال (20) احسب $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

<u>الحل :</u> نلاحظ من الشكل



عندما $x > 0$ فان قيمة $\frac{1}{x}$ تكبر شيئا فشيئا وبدون حد كلما اقتربت x من الصفر

اما عندما $x < 0$ فقيمة $\frac{1}{x}$ تكبر شيئا فشيئا بالاتجاه السالب وبدون حـد كلما اقتربت x من الصفر . لذا نقول ان $\frac{1}{x}$ لا غاية لها عندما x تقترب من الصفر .

نلاحظ كذلك ان الدالة $\frac{1}{x}$ تقترب من الصفر شيئا فشيئا كلما ازدادت x بالاتجاه الموجب ويعبر عن ذلك بالصيغة

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

كذلك اذا ازدادت قيمة x بالاتجاه السالب فان $\frac{1}{x}$ تقترب ايضا من الصفر

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ملاحظة مهمة جميع النظريات السابقة والخاصة بالغايات يمكن تطبيقها في حالة

$x \to -\infty$ او $x \to \infty$

مثال (21) جد $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}$

الحل

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3$$

ولما كان $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

اذن $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3=(0)^3=0$

مثال (22) احسب $\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x}{7x^2-5}$

الحل لحل هكذا سؤال نقسم البسط والمقام على أعلى أس لـــ x والذي هو في هذه الحالة x^2

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}}{7-\frac{5}{x^2}}=\frac{0+0}{7-0}=0$$

<u>مثال (23)</u> لاحظ أن $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=\infty$

وأن $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-1}{(x+2)^2}=-\infty$

<u>مثال (24)</u> جد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^3+x+2}{2x^5-3x^2+4x}$

<u>الحل :</u> نقسم البسط والمقام على x^5 فنحصل على

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x^5}}{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}}$$

$$=\frac{0+0+0+0}{2-0+0}$$
$$=0$$

<u>تعريف</u> $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ يعني أن لكل $0<\in$ يوجد عدد $M>0$ بحيث أن لكل قيم x

$$x>M\Rightarrow|f(x)-L|<\in$$

وأن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ يعني أن لكل $0<\in$ يوجد عدد $N>0$ بحيث أن لكل قيم x

$$x<N\Rightarrow|f(x)-L|<\in$$

<u>مثال (25)</u>

باستخدام التعريف برهن على أن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

الحل : نفرض أن $0 <\in$ وأن $x > M$

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{M}$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{M}$$

$$0 < \frac{1}{x} - 0 < \frac{1}{M}$$

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{M}$$

نختار $M = \frac{1}{\in}$

أما بالنسبة الى $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

فأن $N = -\frac{1}{\in}$

مثال (26)

لاحظ أن $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

لانه عندما $x \to \infty$ فان $-1 \le \sin x \le 1$

لاحظ ايضا أن $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1,$

لانه لو فرضنا بأن $\frac{1}{x} = \theta$

فعندما $x \to \infty$ فان $\theta \to 0$ وبذا نحصل على

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= 1$$

جيب الزاوية / الزاوية = ١

تدريب (5)

جد $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\left(\dfrac{3x^2-2}{x^2}\right)$

اسئلة التقويم الذاتي (5)

جد الغايات ان وجدت

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-5}{3x^3-13x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{1-x}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos\dfrac{1}{x})$

الدوال المستمرة continuous functions

من المفاهيم الاساسية في الرياضيات مفهوم الاستمرارية والذي له صلة وثيقة بمفهوم الغاية ومفهوم الاستمرارية يعني هندسيا عدم وجود أي قطع في منحي الدالة أي أننا نستطيع أن نمرر القلم على منحي الدالة بدون رفع اليد عن الورقة.

تعريف : أذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة لجميع قيم x في جوار c فأن $f(x)$ دالة مستمرة عند c إذا حققت الشروط الثلاثة التالية:

أ) $f(c)$ موجودة

ب) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة

ج) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي واحد من هذه الشروط فيقال أن الدالة غير مستمرة في النقطة $x = c$.

ملاحظة : أذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في c فيمكن ايجاد الغاية لها عندما تقترب x من c بطريقة التعويض المباشر ، أي تعويض كل x في الدالة بـ c

مثال (27) أدرس استمرارية الدالة $f(x) = 2x+1$ عند النقطة 1

الحل سنعتمد على التعريف ونرى مدى تحقق شروطه

أ) $f(1) = 2(1) + 1 = 3$ و 3 كمية معرفة . الامر الذي يعني أن $f(x)$ معرفة عند 1 أو أنها موجودة .

ب)هل أن $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1)$ موجودة . أي هل أن غاية الدالة $f(x) = 2x+1$ موجودة عند اقتراب x من 1 ؟

أذا كانت $\lim_{x\to 1}(2x+1)$ موجودة فهذا يعني أن الغاية من جهة اليمين مساوية الـــى الغاية من جهة اليسار عند اقتراب x من 1 وهذا واضح لاننا نتعامل هنا مع متعـدد حدود.

2+1 = 3

$$\lim_{x\to 1}(2x+1) = 2(1) = 3$$

جـ) من الشرطين (أ) و (ب) نستطيع القول ان

$$\lim_{x\to 1}(2x+1) = f(1)$$

أذن تحققت الشروط الثلاثة الامر الذي يعني أن الدالة $f(x) = 2x+1$ مستمرة عند 1

ملاحظة : من المثال السابق نستطيع القول ان أي دالة بشكل متعددة الحدود تكـــون مستمرة عند أي عدد حقيقي وكحالة خاصة من هذا القول، القول بأن أي دالة ثابتـــة مستمرة.

مثال (28)

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & x > 2 \\ 8, & x \le 2 \end{cases}$$

هل أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ ؟

الحل : أذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ فيجب أن تحقـق الشـروط الثلاثـة الواردة في تعريف الاستمرارية وسنحاول هنا التحقق من ذلك.

أ) هل أن $f(2)$ معرفة ؟

أذا رجعنا الى تعريف الدالة $f(x)$ نلاحظ أن قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=2$ موجودة في الشطر الثاني من التعريف أي أن

$$f(2) = 8$$

الامر الذي يعني أن $f(2)$ معرفة لان العدد 8 معرف.

ب) هل أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة ؟

يكون $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة أذا كانت غاية الدالة $f(x)$ من جهة اليمين مساوية الى غاية الدالة $f(x)$ من جهة اليسار عند اقتراب x من 2 وبقول آخر

تكون $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة اذا تحقق الاتي

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

والان نحسب $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

تكميلية لا

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}$$

ولان $x > 2$ أي ان $x \neq 2$ يمكن اختصار $(x-2)$ من البسط والمقام ويكون الحال هو

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = (2)^2 + 2(2) + 4 = 12$$

نعود الان لحساب

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 8 = 8$$

وهذا يعني ا

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

الامر الذي يؤدي الى القول بان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة اذن لم يتحقق الشرط الثاني أي ان الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = 2$

<u>تعريف</u> يقال للدالة $f(x)$ بانها مستمرة على الفترة المفتوحة (a, b) اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط هذه الفترة .

مثال (29) هل ان دالة القيمة المطلقة مستمرة على مجموعة الاعداد الحقيقية IR

الحل نحن نعرف ان دالة القيمة المطلقة (Absolute value) لـ x هي

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ومن هذا التعريف يمكن انجزم ان $f(x) = |x|$ مستمرة عند $IR = (-\infty, \infty)$

(لماذا ؟)

مثال (30) لتكن
$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\right) + a, & x \neq 3 \\ ax + 3b, & x = 3 \end{cases}$$

جد قيم الثوابت a و b اذا علمت ان الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 3$ وان $f(-1) = 6$

الحل :- لان الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 3$ فان

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} + a = 6 + a$$

$$f(3) = a(3) + 3b$$

$$\therefore\ 3a + 3b = 6 + a$$

$$\therefore\ 2a + 3b = 6 \quad \ldots\ldots(1)$$

ولكن قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=-1$ تساوي 6

أي ان
$$f(-1)=2+a$$

$$\therefore\ 2+a=6 \Rightarrow a=4$$

بالتعويض عن قيمة $a=4$ في (1) ينتج $b=\frac{-2}{3}$

تدريب 6

لتكن
$$f(x)=\begin{cases}3x+5 & , x\ge 2\\ ax-1 & , x<2\end{cases}$$

جد قيمة الثابت a اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=2$

نظريات الاستمرارية

اذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتان عند $x=c$ فجميع الدوال التالية دوال مستمرة عند $x=c$

1. $f(x)+g(x)$
2. $f(x)-g(x)$
3. $f(x).g(x)$
4. $k\,f(x)$ (k ثابت)
5. $\frac{f(x)}{g(x)}$ بشرط ان $g(c)\neq 0$

مثال (31)

ناقش استمرارية الدالة

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+3x-5}{x^2-x-6}$$

الحل هذه الدالة كسرية (أو نسبية) لذا فهي دالة مستمرة في كل نقطة لا يكون المقام فيها مساوياً إلى الصفر لذا لدراسة استمرارية هذه الدالة نجد النقاط التي يكون فيها المقام مساوياً الى الصفر

$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x=3$$
$$x=-2$$

الدالة $f(x)$ مستمرة في جميع الاعداد الحقيقية عدا عند $x=3$ و $x=-2$

مثال (32)

الدالة $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ مستمرة في جميع النقاط عدا $x=0$ هل نستطيع ان نعرف $f(0)$ بطريقة تجعل الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=0$.

الحل حتى تصبح الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=0$ يجب ان تحقق

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=f(0)$$

ونحن نعرف بان

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

اذن

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$$

دالة مستمرة في جميع النقاط .

<u>مثال (33)</u>

ماهي قيمة $f(2)$ والتي تجعل الدالة :

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

مستمرة عند $x=2$

<u>الحل</u> اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ فهذا يعني ان

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{5}{4}$$

اذن يجب ان تكون $f(2)=\frac{5}{4}$

أي ان

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} & ,x\neq 2\\[2mm] \dfrac{5}{4} & ,x=2\end{cases}$$

<u>مثال (34)</u>

لنتذكر سوية الدالة $[x]$ والمسماة بدالة العـــدد الصحيـــح الاكـــبر $f(x) = [x]$ (أو Step function) حيث $[x]$ تمثل اكبر عدد صحيح اقل أو يساوي x

لحساب $\lim_{x\to 2}[x]$ عندما $1<x<2$

تكون الغاية من اليسار قريبة من 1 ولكن من جهة اليمين تقترب الغاية من 2

لذا $\lim_{x\to 2}[x]$ غير موجودة وان $f(x)=[x]$ غير مستمرة عند $x=2$

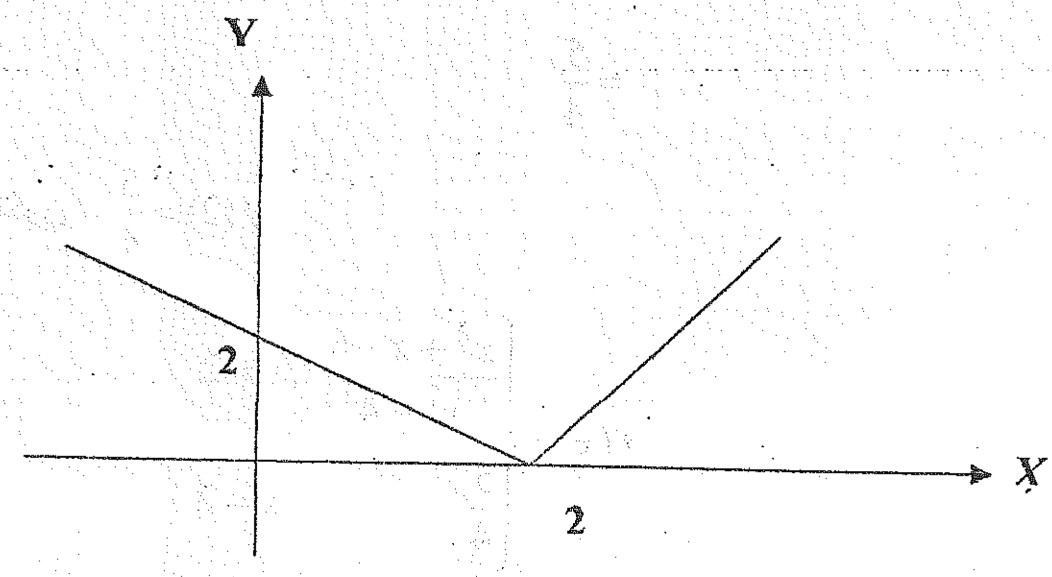
مثال (35)

ادرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x)=|x-2|$$

$\boxed{x=2 \text{ عند}}$

الحل يمكن تمثيل الدالة بالشكل



كما و ان
$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & ,x\geq 2 \\ -(x-2) & ,x<2 \end{cases}$$

هنا يجب ان يتساوى كل من $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-(x-2)) = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$

ولما كانت $f(2) = 0$

اذن الدالة $f(x) = |x-2|$ مستمرة عند $x = 2$

تدريب (7)

ضع امثلة لكل نظرية من نظريات الاستمرارية وذلك بفرض دالتين $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتان ثم برهن ان حاصل جمعهما او طرحهما $f(x) \mp g(x)$ دالة مستمرة كما وان حاصل ضربهما الواحدة بالاخرى او حاصل ضرب احدهما بثابت (عدد) دوال مستمرة او حاصل قسمتهما ايضا دالة مستمرة بشرط ......

اسئلة التقويم الذاتي (٦)

١- هل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x>3 \\ 3x & ,x<3 \\ 2x+3 & ,x=3 \end{cases}$ مستمرة عند $x=3$

٢- لتكن $f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x>2 \\ 2x+2 & ,x<2 \end{cases}$ ادرس استمرارية $f(x)$ عند $x=2$

٣- اذا كانت $f(x)=3x^2+5$ و $g(x)=2x-2$ ادرس استمرارية الدوال التالية عند النقطة $x=1$

أ- $f+g$

ب- $f-g$

ج- $f\cdot g$

٤- اذا كانت $f(x)=\begin{cases} ax+b & ,x>2 \\ 3bx^2-2 & ,x\le 2 \end{cases}$

جد الثوابت a و b اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ وان $f(1)=5$

تركيب الدوال المستمرة Composites of Continuous functions

اذا كانت $f: A \to B$ دالة من المجموعة A الى المجموعة B وان $g: B \to C$ دالة من B الى C فان $(g \circ f)$ دالة من A الى C أي ان $g \circ f: A \to C$ بحيث ان $(g \circ f)_{(x)} = g(f(x))$ لكل $x \in A$ تسمى الدالة $g \circ f$ بالدالة المركبة Composition function

نظرية اذا كانت الدالة f مستمرة عند $x = c$ والدالة g مستمرة عند $x = f(c)$ فالدالة المركبة $(g \circ f)$ مستمرة عند $x = c$.

مثال (36)

هل الدالة $\left|\dfrac{x}{x^2+3}\right|$ مستمرة .

الحل :

يمكن ان نعبر عن الدالة $\left|\dfrac{x}{x^2+3}\right|$ كحاصل تركيب دالتين $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ و $g(x) = |x|$.

ان الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ دالة مستمرة لكل x استنادا الى النظريات الخاصة بالاستمرارية أما الدالة $g(x) = |x|$ سبق لنا وان بينا بأنها مستمرة لكل x اذن أصبحت الدالة $\left|\dfrac{x}{x^2+3}\right|$ دالة مركبة لدالتين مستمرتين اذن فهي (أي الدالة المركبة) دالة مستمرة استنادا الى النظرية المذكورة في أعلاه .

مثال (37)

هل الدالة $$f(x) = \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right)^3$$

مستمرة عند $x = 5$

الحل

يمكن ان نعتبر الدالة $f(x) = \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right)^3$ حاصل تركيب دالتين هما :

$$g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$h(x) = x^3$$

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

نلاحظ ان الدالة $h(x) = x^3$ دالة مستمرة عند $x = 5$ ولكن الدالة

$g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ غير مستمرة عند $x = 5$ وذلك لان

$$\lim_{x \to 5} g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} \quad (x \neq 5 \text{ هنا })$$

$$= \lim_{x \to 5} (x + 5)$$

$$= 10$$

ولكن $g(x)$ ليست معرفة عند $x = 5$ لذا فان $g(x)$ ليست مستمرة عند $x = 5$

اصبحت الدالة $f(x)$ حاصل تركيب دالتين احدهما مستمرة $h(x)$ والاخرى ليست مستمرة $g(x)$ عند $x=5$ لذا نقول ان $f(x)$ ليست مستمرة عند $x=5$ وزيادة في التحقيق نحسب

$$\lim_{x\to5} f(x) = \lim_{x\to5} \left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)^3$$

$$= \left(\lim_{x\to5}\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)\right)^3$$

$$= (10)^3$$

$$= 1000$$

ولكن $f(x)$ ليست معرفة عند $x=5$ لذا فالدالة $f(x)$ ليست مستمرة عند $x=5$

الاشتقاق *Differentiation*

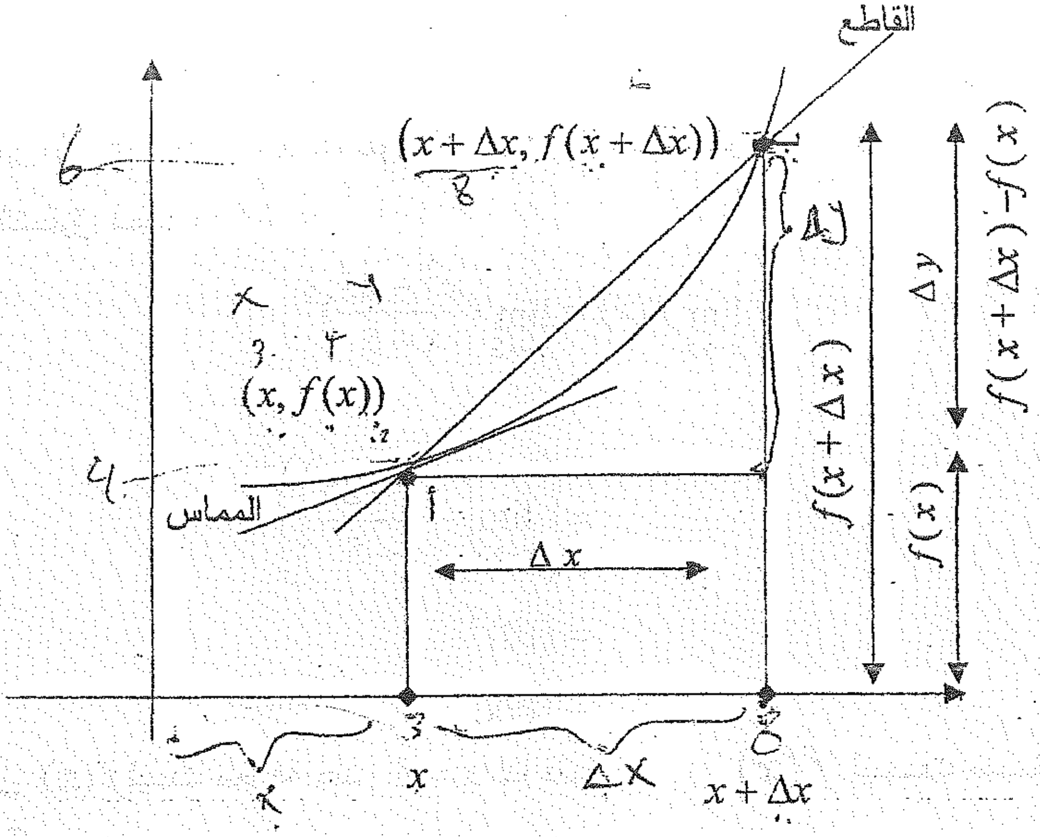
معدل التغير و المشتقة *Rate of change and the derivative*

تتذكر عزيزي القاريء من خلال دراستك لمنهاج المرحلة الاعدادية ان معدل التغير (أو متوسط التغير) (Rate of change) هو التغير الحاصل في y مقسوما على التغير الحاصل في x أي ان :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

كما تتذكر ان معدل التغير يمثل ميل المستقيم المماس (The slope of the tangent) لمنحني الدالة $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ وان هذا الميل يمثل مشتقة الدالة $f(x)$ (The derivative of $f(x)$) في النقطة $(x, f(x))$ ويرمز لهذه المشتقة بـ $f'(x)$.

لحساب مشتقة الدالة $f(x)$ في النقطة $(x, f(x))$ نرسم الشكل التالي :



$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

<u>نلاحظ</u> ميل القاطع الواصل بين النقطتين أ و ب = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ كلما صغرت Δx اصغر فاصغر كاد القاطع ان ينطبق على المستقيم المماس أي انه عندما تقترب Δx من الصفر فان ميل القاطع سيقترب من ميل المماس ولما كان ميل المماس عند النقطة $(x, f(x))$ هو مشتقة الدالة $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ فان

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعريف : مشتقة الدالة $f(x)$ هي الدالة $f'(x)$ والمعرفة عند x بـ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

اذا كانت الغاية هذه موجودة

ملاحظة : ان عملية ايجاد المشتقة لدالة ما تدعى بالاشتقاق والدالة التي لها مشتقة عند x تدعى بالدالة القابلة للاشتقاق عند x (Differentiable function)

ملاحظة التعريف الأخير يوضح ان مشتقة دالة ما هي دالة وهذا التعريف لا يتطرق الى المستقيم المماس بل يبين ان الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند x اذا كانت الغاية في العلاقة

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

موجودة . كما وان قيمة المشتقة عند نقطة مثل c هي قيمة هذه الغاية في c

تعريف : اذا كانت الغاية في العلاقة

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

موجودة فيقال ان للدالة $f(x)$ مستقيما مماسا عند النقطة $(x,f(x))$ هو مستقيم يمر بالنقطة $(x,f(x))$ وهذا المماس وميله يساوي $f'(x)$.

مثال (1)

اذا كانت الدالة : $f(x)=x^2$ جد معدل التغير لهذه الدالة في الفترة [2,3]

$x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 2$

الحل معدل التغير يساوي

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{9 - 4}{1}$$

$$= 5$$

مثال (2)

اذا كانت $f(x) = 3x + 1$ فان معدل التغير في الفترة $[1,4]$ هو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - (f1)}{4 - 1} = \frac{13 - 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

مثال (3)

لتكن $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

أ- باستخدام تعريف المشتقة جد $f'(x)$

ب- ماهو مجال (Domain) الدالة $f'(x)$

ج- جد المشتقة عند 3 ، $\sqrt{3}$ ، b

الحل: (أ)

$$f'(x) \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\left(2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 4\right) - (2x^2 + 3x - 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 4 - 2x^2 - 3x + 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 4x + 3$$

ب- نلاحظ $f'(x)$ فنجد انها دالة متعددة الحدود اذن فمجالـــها هـو مجموعــة الاعداد الحقيقية IR

جـ-

$$f'(3) = 4(3) + 3 = 15$$

$$f'(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 3$$

$$f'(b) = 4b + 3$$

ملاحظة :

سنستخدم الرموز $f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ للتعبير عن مشتقة الدالة $y = f(x)$

ملاحظة :

كما بينا فان المعنى الهندسي لمشتقة الدالة $f(x)$ عند النقطة c بأنها ميل المســتقيم المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة c

مثال (4) جد معادلة المستقيم المماس للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ اذا علمــت ان نقطــة التماس هي $(9,3)$.

الحل :

سنحتاج هنا لايجاد ميل المستقيم المماس والذي يساوي مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ لذا سنجد $f(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

بالضرب في المرافق

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

عند $x=9$ فان

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

وهذا يعني ان ميل المستقيم المماس يساوي $\frac{1}{6}$

$\therefore$ معادلة المعادلة المستقيم المماس

$$\frac{y-3}{x-9}=\frac{1}{6}$$

اذن تكون الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ... x اذا كانت الغاية المذكورة في تعريف المشتقة موجودة وتكون هذه الغاية موجودة اذا كانت غايتها من جهة اليمين مساوية الى غايتها من جهة اليسار أي ان :

$$\lim_{\Delta x\to o^{+}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وهناك علاقة وثيقة بين الاستمرارية والقابلية على الاشتقاق يعبر عنـــها بالنظريـــة التالية :

<u>نظرية :</u> اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=c$ فان $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x=c$

<u>البرهان :</u>

نفرض ان الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=c$

اذن $f'(c)$ موجودة

يجب ان نبرهن ان الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=c$ أي نبرهن ان:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

أي يجب ان نبين بان

$$\lim_{x\to c} (f(x) - f(c)) = 0$$

نفرض ان $\Delta x = x - c$

$$x = c + \Delta x$$

أي ان

$$f(x) = f(c+\Delta x)$$

وإذا $x \to c$ فان $\Delta x \to 0$

لذا

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{\Delta x\to 0}(f(c+\Delta x)-f(c)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(c+\Delta x)-f(c))\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(c+\Delta x)-f(c))}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

$$= f'(c).0$$

$$= 0$$ (لان $f'(c)$ موجودة بالفرض)

مثال(5)

ادرس قابلية اشتقاق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x > 2 \\ 3x - 1 & , x \leq 2 \end{cases}$$

عند النقطة $x = 2$

الحل :

تكون الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عن $x = 2$ اذا كانت الغاية في العلاقة

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

موجودة وتكون هذه الغاية موجودة اذا كانت

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= 3$$

اذن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \text{ غير موجودة}$$

لذا فالدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق

<u>مثال (6)</u>

لتكن
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+a & ,x>1\\ 6x-3 & ,x\le 1\end{cases}$$

جد a اذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

<u>الحل :</u>

حسب النظرية ، بما ان $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$ فان $f(x)$ مستمرة عند $x=1$ وهذا يعني $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة

وهذا يعني بأن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

الآن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2+a)$$
$$=3+a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(6x-3) \qquad 6\times 1-3=3$$
$$=3$$
$$\therefore 3+a=3$$
$$a=0$$

<u>تدريب</u>

ان معكوس هذه النظرية غير صحيح فالدالة $f(x)=|x|$ مستمرة عند النقطة $x=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ، بين ذلك وبرهنه .

أسئلة التقويم الذاتي (1)

١- اذا كانت $f(x)=(x+1)^2$ جد معدل التغير في الفترة [2 و1]

٢- جد معادلة المماس للدالة $y=\dfrac{1}{x+1}$ عند النقطة (1و0) يستعمل تعريف الاشتقاق

٣- باستخدام تعريف المشتقة جد $f'(x)$ للدوال التالية :

أ- $f(x)=\sqrt{x+2}$

ب- $f(x)=\sin x$

ج- $f(x)=\dfrac{1}{2x}$

د- $f(x)=10$

هـ- $f(x)=3-2x$

٤- برهن على ان الدالة $f(x)$ المعرفة

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x\geq 3 \\ 1-x & ,x<3 \end{cases}$$

غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

نظريات ايجاد المشتقات

ان طريقة ايجاد المشتقة باستخدام تعريفها ليست بسيطة أو عملية لذا سنحاول هنا ذكر بعض النظريات والتي ستسهل علينا عملية ايجاد المشتقة .

نظرية (1)

مشتقة الثابت تساوي صفراً

أي انه اذا كانت $f(x)=c$ حيث c عدداً ثابتا فان $f'(x)=0$

البرهان :

$$f'(x)=\lim_{Dx\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

هنا نجد ان $f(x+\Delta x)=f(x)$ لان الدالة ثابتة

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

مثال (7)

اذا كانت $f(x)=13$ فان $f'(x)=0$

نظرية (2)

اذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان مشتقة $cf(x)$ حيث c عدد ثابت تساوي $cf'(x)$

البرهان :

$$(cf(x))'=\frac{d(cf(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}$$
$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= cf'(x)$$
$$= c\frac{d}{dx}(f(x))$$

نظرية (3)

اذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب فان

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

البرهان

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

ونحن نعرف بان

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + ... + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= (x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + ... + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1}$$

(n من المرات)

$$= nx^{n-1}$$

مثال (8)

اذا كانت $f(x)=7x^3$ فان

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(7x^3)$$
$$=7\frac{d}{dx}(x^3)=7.3.x^{3-1}=21x^2$$

نظرية (4) مشتقة مجموع دالتين تساوي مجموع مشتقتيهما

أي ان $$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

أو $$\frac{d}{dx}(f+g)=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

البرهان

$$\frac{d}{dx}(f+g)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

مثال (9)

جد $f'(x)$ اذا كانت $f(x)=5\sqrt{x}+7x^3$

حسب النظريات السابقة فان

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(5\sqrt{x}+7x^3)$$
$$=5\frac{d\sqrt{x}}{dx}+7\frac{dx^3}{dx}$$

$$= \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 7.3x^2$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{x}} + 21x^2$$

<u>نظرية (5)</u>

مشتقة حاصل طرح دالتين تساوي حاصل طرح مشتقتيهما

أي ان

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

او
$$\frac{d}{dx}(f - d) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

<u>البرهان</u>

بنفس برهان نظرية (4)

<u>مثال (10)</u>

ان مشتقة الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x^5$ هي $f'(x) = 4x - 15x^4$

<u>مثال (11)</u>

ان مشتقة الدالة $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - \sqrt{x} + 7$ هي

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}\sqrt[2]{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(7)$$

$$= 9x^2 - 4x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0$$

<u>نظرية (6)</u> مشتقة حاصل ضرب دالتان تساوي الدالة الأولى مضروبة في مشتقة الدالة الثانية زائدا الدالة الثانية مضروبة في مشتقة الدالة الأولى .

أي ان

$$(f(x).g(x))' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

أو

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g) = f.\frac{dg}{dx} + g.\frac{df}{dx}$$

<u>البرهان</u>

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

في البسط نضيف ونطرح المقدار $f(x)g(x+\Delta x)$ ينتج

$$\frac{d}{dx}(f.g) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} f(x).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= g(x).\frac{df}{dx} + f(x).\frac{dg}{dx}$$

<u>مثال (12)</u>

ان مشتقة الدالة $f(x) = (x^3+2)(1-x^2)$ هي

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}((x^3+2)(1-x^2))$$

$$=(x^3+2).\frac{d}{dx}(1-x^2)+(1-x^2)\frac{d}{dx}(x^3+2)$$

$$=(x^3+2)(\frac{d}{dx}(1)-\frac{dx^2}{dx})+(1-x^2).(\frac{dx^3}{dx}+\frac{d}{dx}(2))$$

$$=(x^3+2)(0-2x)+(1-x^2).(3x^2+0)$$

$$=-2x(x^3+2)+3x^2(1-x^2)$$

نظرية (7) مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي المقام مضروب في مشتقة البسط ناقصا البسط مضروب في مشتقة المقام وهذا كله مقسوم على مربع المقام. أي ان :

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

او

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})=\frac{g.\frac{df}{dx}-f.\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

البرهان

$$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{(\frac{f}{g})(x+\Delta x)-(\frac{f}{g})(x)}{\Delta x}\right|$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \right|$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) f(x+\Delta x) - f(x) g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x) g(x)}$$

باضافة وطرح $f(x)g(x)$ في البسط ينتج :

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) + f(x+\Delta x) - f(x) g(x+\Delta x) f(x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x g(x+\Delta x) g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x g(x+\Delta x) g(x)}$$

$$= \frac{\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot \frac{df}{dx} - f(x) \cdot \frac{df}{dx}}{[g(x)]^2}$$

<u>مثال (13)</u> ان مشتقة هي

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x.\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1).\frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$=\frac{x.(1+0)-(x+1).1}{x^2}$$

$$=\frac{x-x-1}{x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2}$$

مثال (14)

اذا كانت $f(x)=\frac{x^3-5}{2\sqrt{x}}$ جد $\frac{df(x)}{dx}$

الحل

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-5}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}.\frac{d}{dx}(x^3-5)-(x^3-5).\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}.(3x^2)-(x^3-5).\frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x}$$

$$=\frac{2x(3x^2)-(x^3-5)}{4x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5x^3+5}{4x\sqrt{x}}$$

<u>نتيجة</u>

اذا كانت $y=\frac{1}{f(x)}$ فان $\frac{dy}{dx}=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

<u>البرهان</u>

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{f(x).\frac{d(1)}{dx}-1.\frac{d}{dx}(f(x))}{(f(x))^2}$$

$$=\frac{f(x).0-f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

<u>مثال (15)</u> جد مشتقة الدالة $y=\frac{1}{x3}$

<u>الحل</u> من النتيجة فان

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2}{(x^3)^2}$$

$$=\frac{-3}{x4}$$

<u>مثال (16)</u> جد مشتقة الدالة $y=x^3+\frac{1}{x^3}$

<u>الحل</u>

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 3x^2 + \frac{-3x^2}{(x^3)^2}$$

$$= 3x^2 - \frac{3}{x4}$$

نتيجة

اذا كانت $y = x^{-n}$ حيث ان n عدد صحيح موجب وان $x \neq 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

البرهان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d(\frac{1}{x^n})}{dx}$$

$$= \frac{x^n \frac{d(1)}{dx} - 1\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{x^n.0 - nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

مثال (17)

جد مشتقة $y = \frac{1}{x^3}$

الحل

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$f(x) = x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

مثال (18)

جد مشتقة $\quad y = x^3 + \frac{1}{x^3}$

الحل

$$y = x^3 + x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + (-3)x^{-3-1}$$

$$= 3x^2 - 3x^{-4}$$

ملاحظة

نستطيع ان نستنتج بان $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ صحيحة لكل عدد نسبي n لا بل هي صحيحة لكل عدد حقيقي n

قاعدة السلسلة — *The chain rule*

مثال (19)

يتحرك جسم على طول الخط $y = 3x - 1$ بطريقة تجعل احداثيه السيني عند الزمن t هو $x = 2t$ احسب $\frac{dy}{dt}$

<u>الحل</u>

في هذه المسألة لدينا y كدالة الى x لذا نستطيع ان نشتق y بالنسبة الى x أي نجد $\frac{dy}{dx}$ ولكننا لا نستطيع ان نجد $\frac{dy}{dt}$ باشتقاق y بالنسبة الى t مباشرة بل نلاحظ اولا ان x هنا دالة الى t أي نستطيع ان نجد $\frac{dx}{dt}$ ونستطيع ان نعوض x في y كي نجعل y دالة الى t ومن ثم نجد $\frac{dy}{dx}$ كما يلي :

$$y = 3x - 1$$

نعوض عن x بـ (2t) في الحل

لان $x = 2t$ $\qquad y = 3(2t) - 1$

اصبحت y دالة الى t $\qquad y = 6t - 1$

نشتق y

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

ولكن لاحظ مايلي

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = 6 = 3.2 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

<u>مثال (20)</u>

نستطيع ان ننظر الى الدالة $y = h(t) = (2t+1)^3$ كدالة مركبة من الدالتين $y = g(x) = x^3$ والدالة $x = f(t) = 2t + 1$

$$h(t) = (g \circ f)(t)$$
$$= g(f(t))$$
$$= g(2t+1)$$
$$= (2t+1)^3$$

لاحظنا أيضا ان $y = h(t) = (2t+1)^3$

نشتق

$$\frac{dy}{dt} = h'(t) = \frac{d}{dt}(2t+1)^3$$

$$\frac{dy}{dt} = h'(t) = 3(2t+1)^{3-1}.\frac{d}{dt}(2t+1)$$

$$\frac{dy}{dt} = h'(t) = 3(2t+1)^2.(2)$$

من الواضح هنا ان $g(x) = x^3$

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \xrightarrow{x=2t+1}$$

نعوض قيمة

$$= 3(2t+1)^2$$

نشتق $x = 2t+1$

وان

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

أي ان

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}}$$

ومن زاوية اخرى نستطيع ان ننظر الى $h'(t)$ بالشكل التالي :

$$h'(t) = g'(f(t))f'(t)$$

$x = (2t+1)$

$$g'(x) = 3x^2$$

لان

$$g(f(t)) = 3(2t+1)^2$$

وان

$$f'(t) = 2^1$$

وعموما نستطيع القول ان مشتقة دالة مركبة $g \circ f$ تساوي حاصل ضرب مشتقة كل من f و g .

نظرية (قاعدة السلسلة)

اذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق عند x و f دالة قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ فإذا كانت $h = f \circ g$ فــان h دالــة قابلــة للاشــتقاق عنــد x ومشــتقتها هــي

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

البرهان

لتكن g, f دالتان قابلتان للاشتقاق يجب ان نبرهن :

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

نفرض ان

$$u = g(x)$$

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

نلاحظ اذا كانت $\Delta u \neq 0$ (في حالة $\Delta u = 0$ يترك البرهـــان للقـــاريء) فـــان اقتراب Δx من الصفر يعني اقتراب Δu من الصفر أي ان

عندما $\Delta x \to 0$ فان $\Delta u \to 0$

$$\therefore h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - g(x) + g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta u + u) - f(u)}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = f'(u).g'(x)$$

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

مثال (21)

اذا كانت $h(x) = (2x^3 + x^2 - 5x + 1)^{15}$ جد $h'(x)$

الحل

نعتبر $h(x)$ دالة مركبة من الدالتين

$$g(x) = (2x^3 + x^2 - 5x + 1)$$

$$f(x) = x^{15}$$

$$\therefore h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

وبما ان

$f(x) = x^{15} \Rightarrow f'(x) = 15x^{14}$ فنعوض عن $g(x)$ في المعادلة السابقة اي كل x نضع $g(x)$

$$f'(g(x)) = 15(2x^3 + x^2 - 5x + 1)^{14}$$

$g(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1 \Rightarrow g'(x) = (6x^2 + 2x - 5)$

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow h'(x) = 15(2x^3 + x^2 - 5x + 1)^{14}.(6x^2 + 2x - 5)$

مثال (22)

اذا كانت $y = \left(\dfrac{x^2 + 3}{x + 1}\right)^4$ جد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل

نعتبر y دالة مركبة من الدالتين $f(x) = x^4$ و $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ حسب قـاعدة السلسلة :

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f'(g(x)) = 4\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^3$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2+3) - (x^2+3)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x) - (x^2+3)(1)}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^3\left(\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\right)$$

<u>نتيجة</u> اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق وان $y = \left(f(x)\right)$ حيث nعدد صحيح

فان

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1}.f'(x)}$$

البرهان يترك للقاريء .

<u>مثال (23)</u>

جد مشتقة الدالة $y = \left(\frac{3x+1}{x-7}\right)^5$

<u>الحل</u>

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(\frac{3x+1}{x-7}\right)^{5-1} \frac{d\left(\frac{3x+1}{x-7}\right)}{dx}$$

$$= 5\left(\frac{3x+1}{x-7}\right)^4 \left(\frac{(x-7)\frac{d(3x+1)}{dx} - (3x+1)\frac{d(x-7)}{dx}}{(x-7)^2}\right)$$

$$= \frac{-110(3x+1)^4}{(x-7)^6}$$

مثال (24) جد مشتقة الدالة

بدون استخدام قانون ايجاد مشتقة حاصل قسمة دالتين جد مشتقة الدالة

$$y = \left(\frac{3x+1}{x-7}\right)^5$$

الحل

$$y = \left(\frac{3x+1}{x-7}\right)^5 = \frac{(3x+1)^5}{(x-7)^5} = (3x+1)^5(x-7)^{-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x+1)^5 \cdot \frac{d}{dx}(x-7)^{-5} + (x-7)^{-5} \cdot \frac{d}{dx}(3x+1)^5$$

$$= (3x+1)^5 \cdot (-5)(x-7)^{-6} + (x-7)^{-5} \cdot (5)(3x+1)^4 \cdot (3)$$

$$= \frac{-110(3x+1)^4}{(x-7)^6}$$

مثال (25)

جد مشتقة الدالة $y = \left(2\sqrt{x}-1\right)^3$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(2\sqrt{x}-1\right)^{3-1} \cdot \frac{d}{dx}(2\sqrt{x}-1)$$

$$= 3(2\sqrt{x}-1)^2 \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$= 3(2\sqrt{x}-1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

مثال (26)

جد مشتقة $y = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, $x \neq 0$

الحل

$$y = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

مثال (27)

جد مشتقة $y = \sqrt{3-x^2}$ ، $|x| < 1$

الحل

$$y = \sqrt{3-x^2} = (3-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3-x^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$$

مثال (28)

وبأستخدام قاعدة السلسلة نحصل على أن :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

ومنها نستنتج أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

<u>مثال</u> (32)

اذا كانت $y=3t^2-1$

$x=5t+2$

$\frac{dx}{dt}$

جد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $t=4$

<u>الحل :</u> بما أن :

$$\frac{dy}{dt}=6t$$

$$\frac{dx}{dt}=5$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t}{5}$$

$6 \cdot 4 = \frac{24}{5}$

عندما $t=4$ فأن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{24}{5}$$

<u>مثال (33)</u>

اذا كانت $y=x^2+2$

$z=(x+1)^3$

جد $\frac{dy}{dz}$

$y = x^2 + 2$ ٩٢

$z = (x+1)^3$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 3(x+1)^2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dz}} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{2x}{3(x+1)^2}$$

$2x \cdot 3(x+1)^{-2}$

تدريب

حد مشتقة الدوال التالية :

1) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{\frac{2}{3}}$

2) $f(x) = (x-1)^3 \sqrt{3x-7}$

3) $f(x) = \left(\sqrt{x^3+2} - 5x\right)^6$

$5x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\ }$ $\frac{1}{2}(x^3$ $)^{-\frac{1}{2}}$ 6

اسئلة التقويم الذاتي

جد الــــ $\frac{dy}{dx}$

1) $y = (x^3 - 1)(3x^2 + 2)^5$

2) $y = \left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)^{-5}$

3) $y = \frac{1}{2x^3 - x^2 + x - 6}$

$$y=\left(\frac{x^3-5}{2x^2+1}\right)^3 \qquad (4$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (5$$

$$y=\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1-x} \qquad (6$$

الاشتقاق الضمني *implicit differentiation*

تعودنا ان نعامل الحداثي الصادي y للنقطة $p(x,y)$ مثلا على منحي ما كدالة الى x لكننا نستطيع ان نعتبر كلا الاحداثيين السيني والصادي كدوال لمتغير ثالث مثل t.

$$x=f(t)\ ,y=g(t) \qquad ...(1)$$

المعادلات في (1) تسمى معادلات وسيطية (parametric equations) الـــى x و y والمتغير t يسمى بالوسيط (parameter).

لتكن x و y دوال قابلة للاشتقاق عند t وان $\frac{dx}{dt} \neq 0$ المعادلة $x=f(t)$ تعرف t ضمنيا كدالة قابلة للاشتقاق عند x مثل $t=h(x)$ ولان $y=g(t)=g(h(x))$ فأن y دالة قابلة للاشتقاق عند x.

الآن لنأخذ المعادلة التالية :

$$x^3-y^2=-3$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر فيها يحتوي على متغيرين هما x و y لذا تسمى هــذه المعادلة بالمعادلة الضمنية *implicit equation* ولكننا نستطيع في هذه المعادلـة فصل المتغيرين في معادلة صريحة هي :

$$y = \sqrt{x^3 + 3}$$

كما نستطيع حساب المشتقة

$$y = (x^3 + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 + 3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$$

$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x3 + 3}}$$

هل نستطيع أن نفعل ما عملناه اعلاه دائما ؟

لنأخذ المعادلة التالية :

$$x^2 + 4xy + y^2 = 5$$

نلاحظ أن عملية فصل المتغير y عن المتغير x صعبة جـدا ولكـن كيـف نجـد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ ؟

هنا سنشتق كل من حدود المعادلة الضمنية : $x^2 + 4xy + y^2 = 5$ بالنسبة الـى x وكما يلي :

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d}{dx}(4xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d(5)}{dx}$$

نحن نعرف أن

$$\frac{d(x^2)}{dx}=2x$$

$$\frac{d(5)}{dx}=0$$

ولكن ماذا عن $\frac{d(4xy)}{dx}$ و $\frac{d(y^2)}{dx}$

نفترض في المعادلة الضمنية أن المتغير y عبارة عن دالة مستقلة بذاتها ونعامله على هذا الأساس لذا نفرض أن :

$$u=y^2$$

$$\frac{du}{dy}=2y$$

ولكن ما نريده هو $\frac{du}{dx}$ لذا سنستخدم قاعدة السلسلة :

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

أي أن

$$\frac{d(y^2)}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

اما بالنسبة الى $\frac{d(4xy)}{dx}$ فسننظر الى الدالة $4xy$ كحاصل ضرب دالتين هما :

الدالة الأولى : $4x$ ومشتقتها 4

الدالة الثانية : y ومشتقتها $\frac{dy}{dx}$

ومن نظرية مشتقة حاصل ضرب دالتين نحصل على :

$$\frac{d(4xy)}{dx} = 4x\frac{dy}{dx} + y(4)$$

نعوض الآن ما حصلنا عليه في : $x^2 + 4xy + y^2 = 5$

$$4x\frac{dy}{dx} + 4y \qquad \frac{d(x^2)}{dx} + \left(\frac{d(4xy)}{dx}\right) + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(5)}{dx}$$

$$(2x) + \left(4x\frac{dy}{dx} + 4y\right) + \left(2y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(4x + 2y) = -4y - 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4y + 2x}{4x + 2y}$$

<u>مثال</u> (34) اذا كانت $x^4 + 3x^2y^3 - 2y^4 = 5$ جد $\frac{dy}{dx}$

<u>الحل</u>: نشتق كل حذ من الحدود

$$\frac{d(x^4)}{dx} + \frac{d(3x^2y^3)}{dx} - \frac{d(2y^4)}{dx} = \frac{d(5)}{dx}$$

$$4x^3 + \left(3x^2\frac{d(y^3)}{dx} + y^3\frac{d(3x^2)}{dx}\right) - 8y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x^3 + 9x^2y^2\frac{dy}{dx} + 6xy^3 - 8y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(9x^2y^2 - 8y^3\right) = -\left(4x^3 - 6xy^3\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 + 6xy^3}{9x^2y^2 - 8y^3}$$

مثال : (35) جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $xy = 3$

الحل :

$$\frac{d(xy)}{dx} = \frac{d(3)}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

مثال : (36)

جد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة الضمنية التالية :

$$x^2y^3 + 4xy + x - 6y = 5$$

الحل : نأخذ مشتقة كل حد :

$$\frac{d(x^2y^3)}{dx} + \frac{d(4xy)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} - \frac{d(6y)}{dx} = \frac{d(5)}{dx}$$

$$\left(x^2\frac{d(y^3)}{dx}+y^3\frac{d(x^2)}{dx}\right)+\left(4x\frac{dy}{dx}+y\frac{d(4x)}{dx}\right)+\frac{dx}{dx}-\left(6\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+4x\frac{dy}{dx}+4y+1-6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(3x^2y^2+4x-6)=-(2xy^3+4y+1)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{(2xy^3+4y+1)}{(3x^2y^2+4x-6)}$$

<u>مثال</u> (37)

جد ميل المماس للمنحى $x^2+xy+y^2=7$ في النقطة (2 , 1)

<u>الحل :</u>

ميل المماس يساوي $\frac{dy}{dx}$

اذن نشتق كل حد من حدود المعادلة الضمنية :

$$\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(xy)}{dx}+\frac{d(y^2)}{dx}=\frac{d(7)}{dx}$$

$$2x\frac{dx}{dx}+\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=\frac{d(7)}{dx}$$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = -\frac{4}{5}$$

<u>مثال :</u> (38)

جد ميل المماس عند النقطة (2 و 5 -) لمعادلة الدائرة $8x^2 + 8y^2 = 232$

<u>الحل :</u> نشتق كل حد من حدود المعادلة الضمنية

$$\frac{d(8x^2)}{dx} + \frac{d(8y^2)}{dx} = \frac{d(232)}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-5,2)} = \frac{5}{2}$$

<u>مثال :</u> (39)

جد مشتقة x^5 بالنسبة الي x^3

<u>الحل :</u>

سنعامل x هنا كوسيط ونفرض أنَ :

$$u = x^5$$
$$v = x^3$$

والمطلوب ايجاد $\frac{du}{dv}$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5x^2}{3}$$

مثال : (40)

جد الـــ $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $x^3 + 2xy^2 - 7y^7 = 1$

الحل :

نشتق كل حد من حدود المعادلة بالنسبة الى x ونعامل y كدالـــة قابلـــة للأشـــتقاق بالنسبة الى x :

$$\frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(2xy^2)}{dx} - \frac{d(7y^7)}{dx} = \frac{d(1)}{dx}$$

$$3x^2 + 2\left(x\frac{d(y^2)}{dx} + y^2\frac{d(x)}{dx}\right) - 49y^6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 + 2\left(2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right) - 49y^6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(4xy - 49y^6\right)\frac{dy}{dx} = -\left(3x^2 + 2y^2\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2 + 2y^2)}{4xy - 49y^6}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة الضمنية $x^3y^2 + 2xy - x + 3y = 6$

نأخذ مشتقة كل حد

$$d(x^3y^2) + \frac{d(2xy)}{dx} - \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(3y)}{dx} = \frac{d(6)}{dx}$$

$$\left(x^3\frac{d(y^2)}{dx}+y^2\frac{d(x^3)}{dx}\right)+2\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}\right)-1+3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(x^3 2y\frac{dy}{dx}+3x^2y^2\right)+2x\frac{dy}{dx}+2y-1+3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(2x^3y+2x+3\right)\frac{dy}{dx}=1-3x^2y^2-2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1-3x^2y^2-2y}{2x^3y+2x+3}$$

<u>مثال (42)</u> أذا كانت $y-7-t^2$ و $x=3t+1$

جد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $t=2$ ثم عبر عن $\frac{dy}{dx}$ كدا ى x

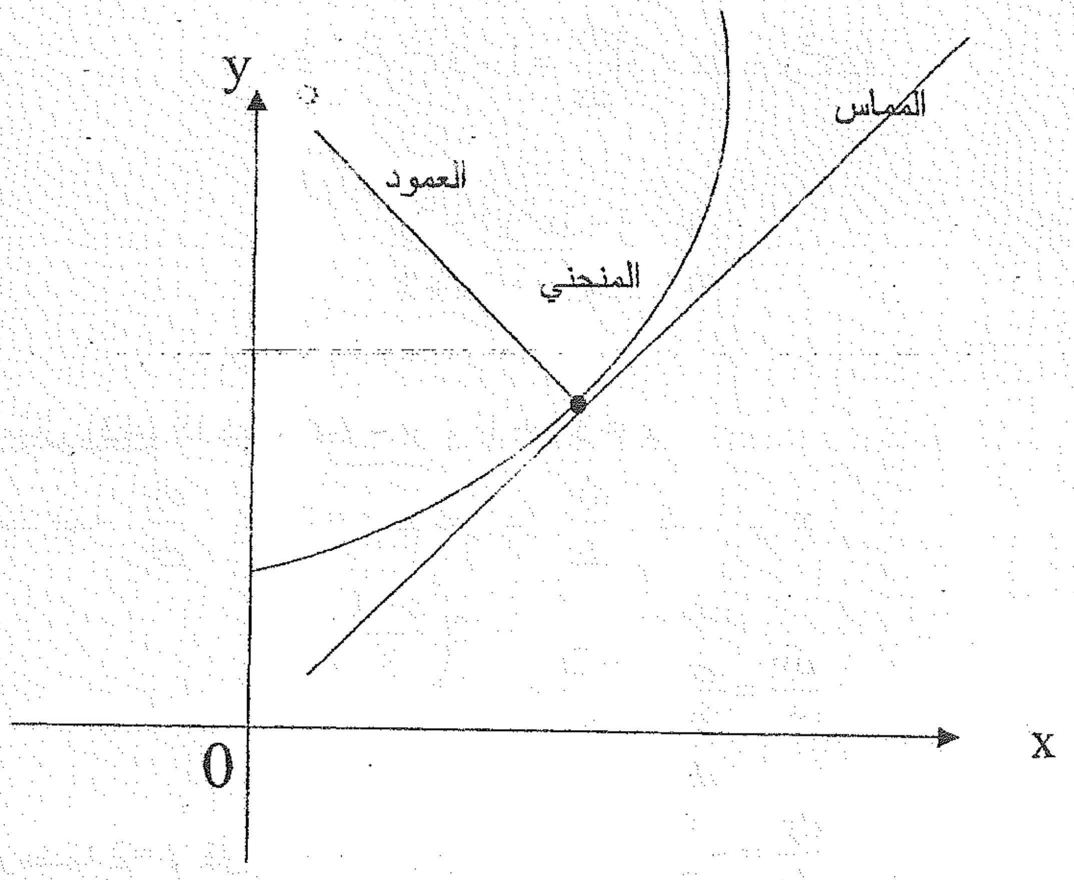
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t}{3}=\frac{-2\left(\frac{x-1}{3}\right)}{3}$$

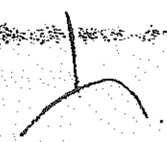
وعندما $t=2$ فأن

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$$

المماسات و الاعمدة Tangents and normal lines

كما بينا سابقا فأن ميل المستقيم المماس للمنحى $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هـو مشتقة الدالة عند تلك النقطة وبينا ايضا كيفية ايجاد معادلة المستيم المماس نأتي الآن لموضوع المستقيم العمود على منحنى





تعريف : المستقيم العمود على منحى في نقطة معينة هـو المستقيم العمود على المستقيم المماس للمنحى من تلك النقطة .

اذا فرضنا بأن ميل المستقيم المماس هو m_1 وميل المستقيم العمود هو m_2 فمن الواضح أن $m_1 . m_2 = -1$ أي ان $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.

مثال : (43)

جد معادلة المماس والعمــود للمنحــي $y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0$ فــي النقطــة $(2 , 1)$.

الحل

$$2y\frac{dy}{dx} - 12x + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{y+2}$$

عند النقطة $(2 , 1)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)} = \frac{6.2}{1+2}$$

أي ان ميل المستقيم المماس يساوي 4

ولما كان المستقيم المماس يمر بالنقطة $(2,1)$ فستكون معادلته

$$\frac{y-1}{x-2} = 4 \Rightarrow y = 4x - 7$$

لايجاد معادلة العمود

ميــل المســتقيم $= \frac{-1}{4}$

معادلة المستقيم العمو

كما وأن العمود يكون في النقطة $(2,1)$ لذا تكون معادلته :

$$\frac{y-1}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

$$4y-4=-x+2$$

معادلة العمود $$y=-\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$$

<u>مثال : (44)</u>

جد معادلة المستقيم المماس لمنحـي الدالـة $f(x)$ عنـد $x=2$ اذا علمت أن $f(2)=5$ و $f^{1}(2)=3$.

<u>الحل :</u>

ان $f(2)=5$ تعني ان قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=2$ هـي 5 أي ان $y=5$ لأن $y=f(x)$ لذا فالنقطة $(2,5)$ تقع على منحني الدالة $f(x)$ ونعرف ان ميل المستقيم المماس هو مشتقة الدالة ، لذا فأن $f'(2)=3$ تعني أن ميل المستقيم المماس لمنحي الدالة $f(x)$ عند $x=2$ يساوي 3 .

اذن عرفنا ان المستقيم المماس يمر بالنقطة (2,5) وميله عند هذه النقطة هو 3 اذن نستطيع أن نجد معادلته من :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

حيث ان (x_1,y_1) تمثل النقطة التي يمر منها و m

$$\frac{y-5}{x-2}=3$$

معادلة المستقيم المماس $$\therefore y=3x-1$$

مثال : (45)

جد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمود للمنحي :

$$(1+x^2y)^3 + x\sqrt{y} = 9$$

عند النقطة (1,1)

الحل : نجد اولا ميل المماس وذلك بأيجاد المشتقة :

$$\frac{d(1+x^2y)^3}{dx} + \frac{d(x\sqrt{y})}{dx} = \frac{d(9)}{dx}$$

$$3(1+x^2y)^2\frac{d(1+x^2y)}{dx} + \left(x\frac{d(\sqrt{y})}{dx} + \sqrt{y}\frac{d(x)}{dx}\right) = 0$$

$$3(1+x^2y)^2(x^2\frac{dy}{dx} + 2xy) + \left(x\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{y} - 3(1+x^2)^2(2xy)}{3(1+x^2y)^2x^2 + \frac{x}{2\sqrt{x}}}$$

عند النقطة (1,1) فأن $\frac{dy}{dx} = -2$

معادلة المستقيم المماس $\frac{y-1}{x-1} = -2$

ميل العمود $-\frac{1}{2}$ ومعادلة العمود

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{1}{-2}$$

تدريب

1) جد معادلة المستقيم المماس والعمود للمنحي $2 = \frac{x-y}{x-2y}$ عند النقطة $(3,1)$

2) اذا كان المستقيم $y = 3x + 2$ يوازي المستقيم المماس المرسوم لمنحي الدالـــة $f(x)$ في النقطة $(-2,1)$ جد معادلة المماس

$y = 3x + 2$

2/ $\frac{dy}{dx} = 3$

ميل المماس $= 3$

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y-1}{x-(-2)} = \frac{3}{1}$

$3x + 6 = y - 1$

معادلة المماس

$3x - y = -6 - 1$

$3x - y = -7$

$y = 3x + 7$

1/ $\frac{x-y}{x-2y} = \frac{2}{1}$

$2x - 4y = x - y$

$\frac{x-y}{x-2y} = \frac{2}{1}$

$2x - 4y = x - y$

$-4y + y = -2x + x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y-1}{x-3} = \frac{1}{3}$

$x - 3 = 3y - 3$

$x = 3y$

$= -3$

ميل العمودي $-3 = \frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

$-3 = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

$-1 \times \frac{3}{1}$

$\frac{y-1}{x-3} = \frac{-3}{1} = -3x + 9 = -3x - y = 4$

المشتقيات العليا Second, third , fourth ....., derivatives

لقد عرفنا مشتقة الدالة $y = f(x)$ ورمزنا لها بالرمز $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ وهذه تسمى بالمشتقة الاولى للدالة $f(x)$ ، نستطيع ان نعرف مشتقة الدالة $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ والتي سنرمز لها $f''(x)$ أو $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالآتي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

في حالة وجود الغاية تسمى $f''(x)$ أو $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ second derivative . لاحظ ان :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$$

واذا استخدمنا الرمز y' للدلالة على المشتقة الاولى فأن المشتقة الثانية تكون :

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(y')}{dx} = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

بنفس الطريقة نستطيع ان نعرف ونجد المشتقة الثالثة third derivative والتي يرمز لها $\frac{d^3y}{dx^3}$ أو y' أو $f(x)'$

أي ان المشتقة الثالثة هي مشتقة المشتقة الثانية :

$$\frac{d(\frac{d^2 y}{dx^2})}{dx} = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$$

وهكذا مع المشتقة الرابعة والخامسة ....

مثال : (46)

اذا كانت $y = 2x^3 + x^2 - 1$ فأن :

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 2$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d^3y}{dx3} = 12$$

مثال : (47)

جد المشتقة الأولى والثانية للمعادلة الضمنية :

$$x^5 + 3xy - 6x = 7$$

الحل : لايجاد المشتقة الأولى نشتق كل حد من حدود المعادلة :

$$\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d(3xy)}{dx} - \frac{d(6x)}{dx} = \frac{d(7)}{dx}$$

$$5x^4\frac{dx}{dx} + 3(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}) - 6\frac{dx}{dx} =$$

$$5x^4 + 3x\frac{dy}{dx} + 3y - 6 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(5x^4 + 3y - 6)}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}\left((5x^4+3y-6)\right)x^{-1}$$

لايجاد المشتقة الثانية نشتق المشتقة الأولى

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=-\frac{1}{3}\left((5x^4+3y-6).\frac{d(x^{-1})}{dx}+(x^{-1}).\frac{d(5x^4+3y-6)}{dx}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\left((5x^4+3y-6)(-1)x^{-2}+(x^{-1})(20x^3+3\frac{dy}{dx})\right)$$

نعوض عن $\frac{dy}{dx}$ بما يساويه

$$=\frac{5x^4+3y-6}{3x^2}-\frac{20x^3+\left(\frac{5x^4+3y-6}{x'}\right)}{9x^{\prime}}$$

وبسط المقدار

مثال (48):

جد $\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx}$

اذا كانت $x=2t^2+3, y=t^2+4$

الحل :

$$\frac{dx}{dt}=4t \quad و \quad \frac{dy}{dt}=2t$$

المشتقة الاولى

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{2t}{4t}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=0$$

<u>تدريب :</u>

جد y', y'', y''' للدالة $y=(2x+3)^7$

السرعة والتعجيل Velocity and Acceleration

اذا رمزنا للمسافة (distance) بالرمز s و للزمن (time) بـــالرمز t وللســرعة (velocity) بالرمز v وللتعجيل (acceleration) بالرمز a نجد ما يلي :

اذا كانت الدالة $s = f(t)$ تحدد موقع جسم متحرك في الزمن t فان المشتقة الاولـــى لــهذه الدالة تمثل السرعة و المشتقة الثانية تمثل تعجيل الجسم في الزمن t أي ان

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{سرعة الجسم في الزمن } t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{تعجيل الجسم في الزمن } t$$

مثال (48) جسم يسير على خط مستقيم ومعادلة سيره هي

$$s = 2t^3 + 7t^2$$

حيث s مقاسة بالامتار و t بالثواني . جد سرعته وتعجيله عند $t = 2$

الحل

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 14t$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 12t + 14$$

وعند $t = 2$

$$v = 6(2)^2 + 14(2) = 52 \quad m/\sec$$

$$a = 12(2) + 14 = 38 \quad m/\sec$$

[illegible]

$v=\frac{ds}{dt}$ $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

١١٢

مثال (49) رمي حجر الى الاعلى بسرعة $100\ m/s$ وبعد t من الثواني كان على ارتفاع $\boxed{s = 100t - 10t^2}$ جد اعلى ارتفاع يصله الحجر .

الحل : ان اعلى ارتفاع يصله الحجر هو ارتفاعه في الزمن الذي تكون سرعته فيه مساوية الى الصفر ، لذا نجد اولا السرعة $100t-10t^2$

$-20t=-100$

$$v=\frac{ds}{dt}=100-20\,t \quad m/\text{sec}$$

عندما $v=0$ فان $100-20\,t=0$

$t=\frac{100}{20}=5$

$$\therefore \quad t=5 \quad \text{seconds}$$

أي ان الحجر سيصل الى السرعة صفر كما و سيصل الى اعلى ارتفاع بعد 5 ثواني .

لحساب اعلى ارتفاع نعوض $t=5$ في $s=\boxed{100t-10t^2}$

$$s=100(5)-10(5)^2=500-250=250\ m$$

مثال (50) اذا كانت المعادلة $s=\sqrt{1+t}$ تمثل الحركة على خط مستقيم ، برهن على ان التعجيل سالب و يتناسب مع مكعب السرعة .

الحل

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{1}{4(1+t)^{3/2}}$$

$$a=-2v^3$$

$\therefore$ التعجيل سالب و يتناسب مع مكعب السرعة

تدريب

رمي حجر شاقوليا الى الاعلى بسرعة ابتدائية v ft /sec من نقطة على الارض وكانت معادلة حركته

$g = 9.8$

$$s = vt - \frac{1}{2}\overset{9.8}{g}t^2$$

حيث g يمثل التعجيل الارضي (مقدار ثابت) و s المسافة التي يقطعها الحجر الى الاعلى من نقطة رميه بعد t من الثواني . جد :

١) السرعة في الزمن t

٢) التعجيل في الزمن t

٣) اعلى ارتفاع يصله الحجر عن الارض

٤) الزمن الذي يستغرقه للوصول الى اعلى ارتفاع

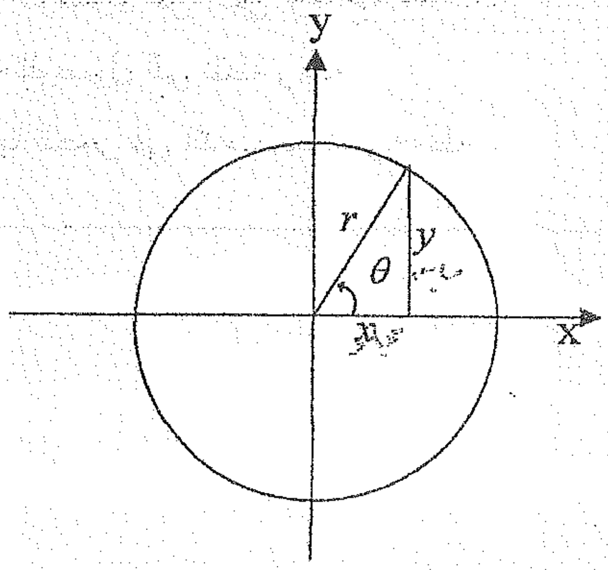
٥) الزمن الذي يستغرقه للوصول الى نقطة رميه

٦) المسافة التي سيقطعها الحجر في اثناء صعوده وهبوطه .

اشتقاق الدوال المثلثية

Derivatives of trigonometric functions

سبق لك عزيزي القارئ الدارس وان تناولت بدراستك موضوع الدوال المثلثية ، هنـــا سنذكر موجز باهم صفات هذه الدوال واهم القوانين والمتطابقات التي تربـــط بيـــن الـــدوال المثلثية . اذا رسمنا الزاوية المركزية θ (ثيتا) بحيث يكون ضلعـــها الاول منطبـــق علـــى المحور السيني وضلعها الثاني يقطع محيط دائرة نصف قطرها r ومركزها نقطة الاصل وتم القطع في نقطة p ذات الاحداثيات (x , y) فتعرف الدوال sin و , tan , cot , ces , csc cos بالشكل التالي :



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad و \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad و \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad و \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad و \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

ونستنتج من هذا ان

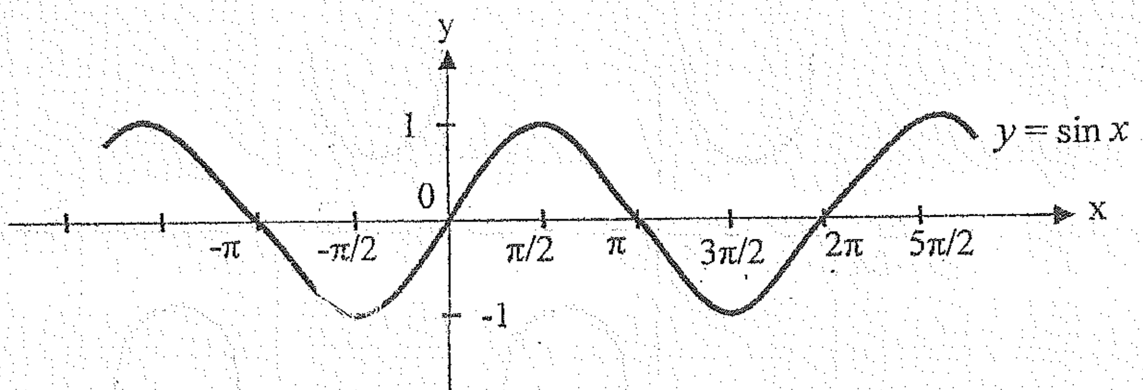
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad , \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad و \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

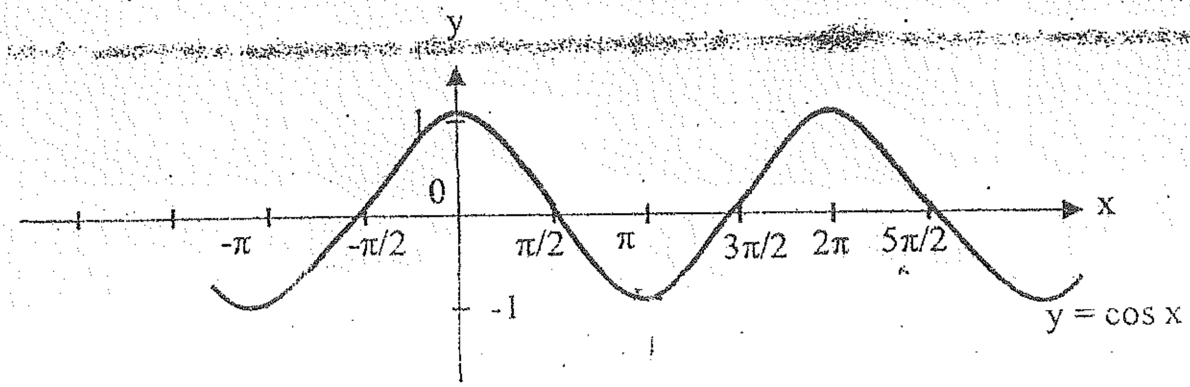
و من نظرية فيثاغورس لدينا $\quad x^2 + y^2 = r^2$

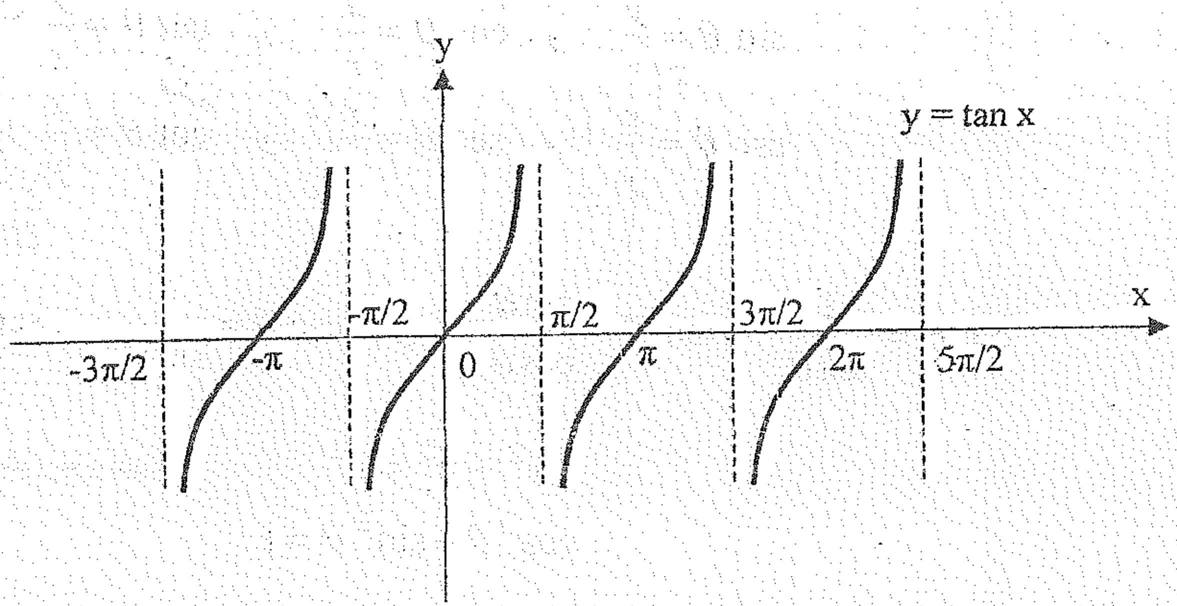
لذا فان $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

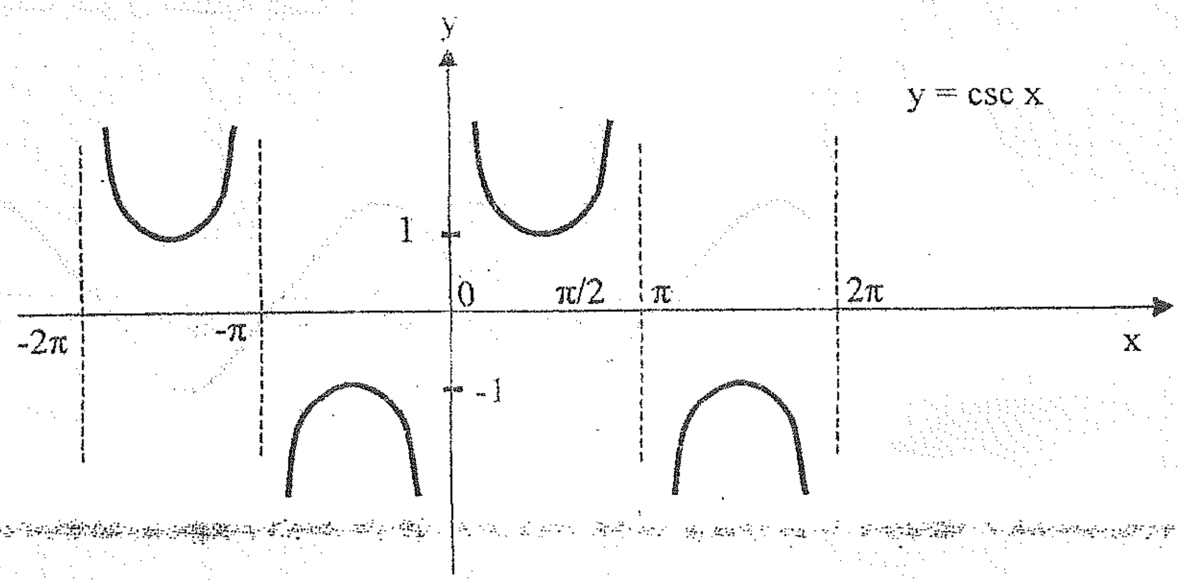
<u>ملاحظة</u> $\cos^2\theta$ تعني $(\cos\theta)^2$ و $\sin^2\theta$ تعني $(\sin\theta)^2$

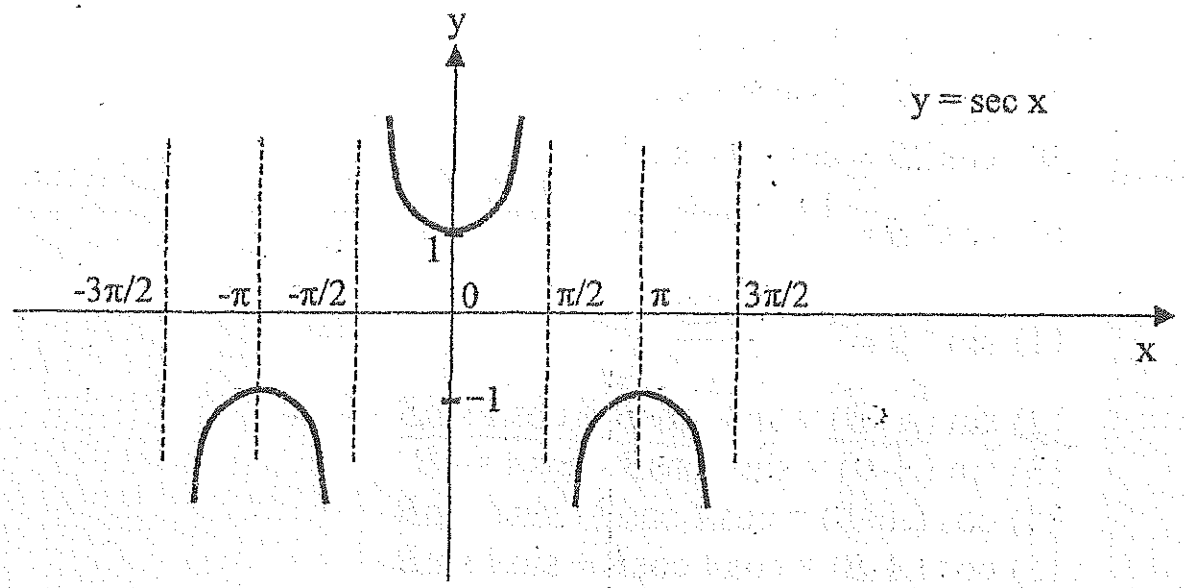
الآن سنرسم منحنيات الدوال المثلثية الستة :

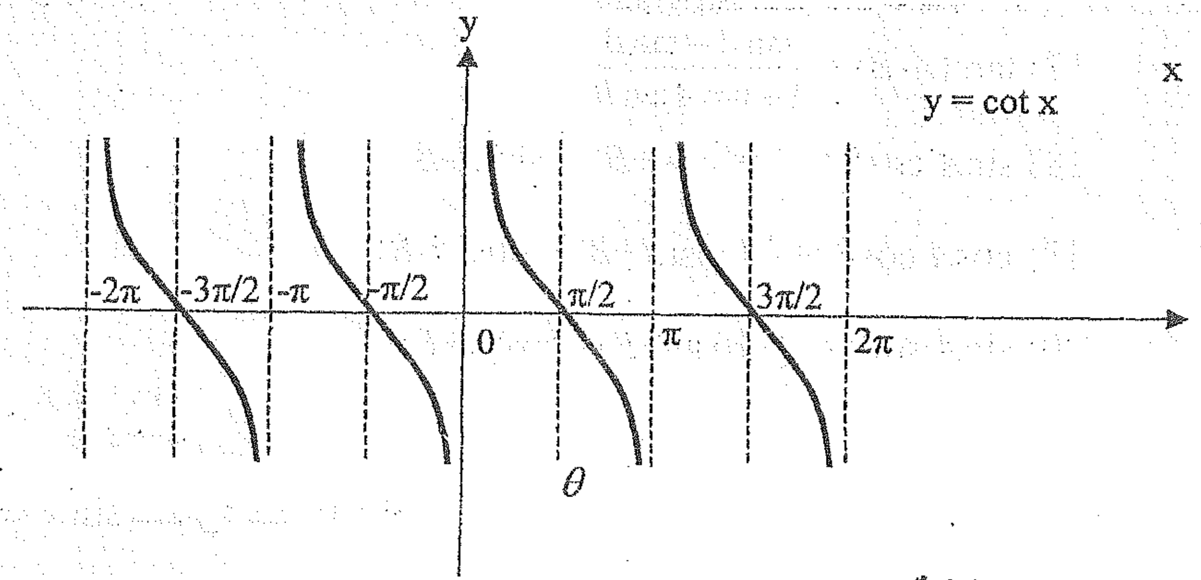





y
y = tan x
x
-π/2
π/2
3π/2
-3π/2
-π
0
π
2π
5π/2


y
y = csc x
1
0
π/2
π
2π
-2π
-π
x
-1





المتطابقات المثلثية

1) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ و $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

2) $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ و $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$.

3) $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$ و $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta$.

4) $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$ و $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$.

5) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

6) $\sec^2 = 1 + \tan^2\theta$

7) $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

8) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

9) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

10) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

11) $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

sin cos

12) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

13) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

14) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

15) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

16) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

17) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

18) $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$

19) $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

20) $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . x$

نظرية الدالة $\sin x$ مستمرة عند $x = 0$

البرهان

1) $\boxed{\sin(0) = 0 \quad \text{معرفة}}$

2) $$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} x$$

$= 1.0$

$= 0$ موجودة

3) من (1) ومن (2) نستنتج ان

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin x$$

Lim sin x = 0
x→0
Lim sin x / x = 1
x→0

اذن الدالة $\sin x$ مستمرة عند $x = 0$

تدريب

برهن ان الدالة $\cos x$ مستمرة عند $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نظرية

ناتي الان الى مشتقات الدوال المثلثية ولنبدأ بمشتقة الدالة $y = \sin x$ فحسب تعريف المشتقة فان

حسب توزيع المستقيم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \,.\, 0 + \cos x \,.\, 1$$

$$= \cos x$$

أي ان
$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

واذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x , فباستخدام قاعدة السلسلة نحصل على ان

مشتقة جيب الزاوية = جتا الزاوية × مشتقة الزاوية

$$\boxed{\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}}$$

مثال : $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = \sin(3x^2 + x + 1)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin(3x^2 + x + 1))}{dx} = \cos(3x^2 + x + 1) \cdot \frac{d(3x^2 + x + 1)}{dx}$$

$$= \cos(3x^2 + x + 1)(6x + 1)$$

$$= (6x + 1)\cos(3x^2 + x + 1)$$

نتيجة
$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$
مشتقة جتا الزاوية = - جيب الزاوية

البرهان
$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{dx}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - x)\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$= \sin x\,(0 - 1)$$

$$= -\sin x$$

واذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فان

$$\boxed{\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}}$$

مثال اذا كانت $y = \cos\sqrt{x^2+5}$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos\sqrt{x^2+5})}{dx} = -\sin\sqrt{x^2+5} \cdot \frac{d\sqrt{x^2+5}}{dx}$$

$$= -\sin\sqrt{x^2+5} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d\left(x^2+5\right)}{dx}\right]$$

مشتقة داخل القوس

$$= -\sin\sqrt{x^2+5}\left[\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot (2x)\right]$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+5}} \sin\sqrt{x^2+5}$$

مثال اذا كانت $y = (\sin\sqrt{x})^3$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})^3 = 3(\sin\sqrt{x})^{3-1} \cdot \frac{d}{dx}\sin\sqrt{x}$$

$$= 3(\sin\sqrt{x})^2 \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx}$$

$$= 3(\sin\sqrt{x})^2 \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}}(\sin\sqrt{x})^2 \cdot \cos\sqrt{x}$$

نظرية

$$\boxed{\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x}$$

مشتقة الظل = مشتقة الجيب / جتا

البرهان

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\cos x \frac{d\sin x}{dx} - \sin x \frac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

وعندما u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فان

$$\boxed{\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}}$$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = \tan^3 (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\tan (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1))^3$$

الزاوية

$$= 3 (\tan (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1))^{3-1} \cdot \frac{d}{dx} \tan (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1)$$

مشتقة داخل القوس

نشتق داخل القوس

$$= 3(\tan(2x^3 + 7x^2 - 4x + 1))^2 \cdot \sec^2 (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1) \cdot \frac{d}{dx} (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1)$$

مشتقة الزاوية

مشتقة داخل القوس

$$= 3 \tan^2 (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1) \sec^2 (2x^3 + 7x^2 - 4x + 1) \cdot (6x^2 + 14x - 4)$$

نظرية

$$\frac{d \sec u}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d \csc u}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d \cot u}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

تدريب

برهن النظرية المذكورة اعلاه باستخدام نفس طريقة برهان $\frac{d(\tan u)}{dx}$

حل | جي

نتيجة من علاقة
$\cos^2 2x = (\cos 2x)^2$

9) $y = \sin^5 3x - \cos^7 3x$

وترفع الأس $y = (\sin 3x)^5 - (\cos 3x)^7$

$y' = 5(\sin 3x)^4 \cdot \frac{d}{dx}(\sin 3x) - 7(\cos 3x)^6 \frac{d}{dx}(\cos 3x)$

واصل القوى

$= 5(\sin 3x)^4 (\cos 3x) \cdot 3 - 7(\cos 3x)^6 (-\sin 3x) 3$

10) $\cot xy + xy = 0$

$\cot xy = -xy \qquad y = \frac{\cot xy}{-x}$

نسمي

$xy = u$ ابدأ

$y = \frac{\cot u}{-x}$

مشتقة شيء النسبة

$= \frac{-x \frac{d}{dx}(\cot u) - \cot u(-1)}{(-x)^2}$

$= \frac{-x(-\csc^2 u)\frac{du}{dx} + \cot u}{x^2}$

$= \frac{+x(1+\cot^2 xy)\frac{du}{dx} + \cot xy}{x^2}$

$= \frac{\cancel{x}(1+\cot^2 xy)(x\frac{dy}{dx}+y)}{\cancel{x^2}} \cancel{\cot xy}\ \cot xy$

اختصار

$= \frac{1}{x}(1+\cot^2 u)\frac{du}{dx} + \cot u$

$= \frac{1}{x}(1+\cot^2 xy)\frac{dxy}{dx} + \cot xy$

$= \frac{1}{x}(1+\cot^2 xy)(x\frac{dy}{dx}+y) + \cot xy$

$= \frac{1}{x}(x\frac{dy}{dx} + x\cot^2 xy \frac{dy}{dx} + y\cot^2 xy) + \cot xy$

أسئلة التقويم الذاتي

جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان y يساوي :

1) $y = \cos\sqrt{x^2 - 1}$

2) $y = x\cot(x^3 - 7)$

3) $y = \sin x \cos^2 3x$

4) $y = (1 - x^2)\csc 7x$

5) $y = (\tan^3 x \sec^5 x)$ $= (\tan x)^3 (\sec x)^5$

6) $y = \dfrac{\tan 2x}{2x^3 - x}$

7) $y = \sin^5 3x - \cos^7 3x$

8) $y = (\sec 3x - \tan 3x)^3$

9) $y = \cos(\sin x)$ $= -\sin(\sin x)\cos x$

10) $\cot xy + xy = 0$ ضمني

11) $y = 3\sqrt{\sec x^3}$ نرفع للأس $\frac{1}{2}$

12) $y = \tan(x + y)$

$y = 3(\sec x^3)^{\frac{1}{2}}$

$y' = 3 \cdot \frac{1}{2}(\sec x^3)^{-\frac{1}{2}}(\sec x^3 \tan x^3)(3x^2)$

معكوس الدوال المثلثية ومشتقاتها The inverse trigonometric functions and their derivatives

مر علينا ان مجال الدالة $y = \sin x$ (The domain) هو مجموعة الاعداد الحقيقية IR اما مداها (The range) فهو $[-1 , 1]$ ، الدالة $y = \sin x$ ليست متقابلة (Bijective) لذا فهي لا تمتلك معكوس (inverse) ولكن اذا تم تحديد او تقييد مجالها من IR الى $[-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}]$ فالدالة المقيدة

$$y = \sin x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

ستكون متقابلة لذا سيكون لها معكوس والذي سنرمز له بالرمز $x = \sin^{-1} y$ او بالرمز $x = \arc \sin y$ والذي يقرأ (x تساوي معكوس جيب y) (x equals the inverse sine of y) او يقرأ (x تساوي the arc جيب y).

ان مجال الدالة $x = \sin^{-1} y$ هو $[-1 , 1]$ ومداها $[-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}]$ وبشكل عام فان

$\sin(\sin^{-1} x) = x$

تعريف $y = \sin^{-1} x$ اذا واذا فقط $x = \sin y$

حيث $-1 \le x \le 1$ ، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

فلان $\sin 0 = 0$ فان $\sin^{-1} 0 = 0$

ولان $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فان $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

ولان $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ فان $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

ولان $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فان $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

<u>ملاحظة</u> $\sin(\sin^{-1}x)=x$ لكل x في $[-1\ ,\ 1]$ و $\sin(\sin^{-1}y)=y$ لكل y في $[-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}]$.

الآن $y=\sin^{-1}x$ هي معكوس دالة قابلة للاشتقاق هي الدالة المقيدة $x = \sin y$ ، $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ لذا فالدالة $y=\sin^{-1}x$ دالة قابلة للاشتقاق والنظرية التالية تعين مقدار مشتقتها .

<u>نظرية</u> اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق الى x وان $-1<u<1$ فان

$$\frac{d(\sin^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

<u>البرهان</u> بما ان $y=\sin^{-1}u$

فان $\sin y=u$ نشتق الطرفين بالنسبة الى x

$$\frac{d(\sin y)}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

ولان $-1<u<1$ فان $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ولهذا فان $\cos y\neq 0$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}\frac{du}{dx}$$

ولكن
$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$$
$$=\sqrt{1-u^2}$$

١٢٨

$$\therefore \frac{d\sin^{-1}u}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y=\sin^{-1}3x^2$

الحل هنا $u=3x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\cdot\frac{d(3x^2)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\cdot 6x$$

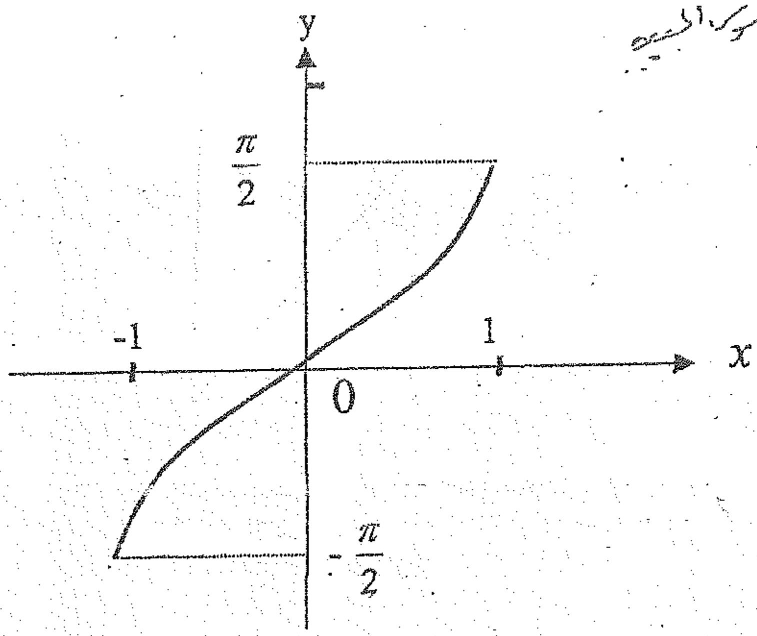
اذا رغبنا برسم مخطط الدالة $y=\sin^{-1}x$ نجد اولا y' و y''

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad,\quad y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

نلاحظ ان المشتقة الاولى $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ موجبة دائما على الفترة $(-1\ ,\ 1)$ لـذا فالدالـة $y=\sin^{-1}x$ متزايدة ولا توجد نقاط حرجة .

اما بالنسبة الى المشتقة الثانية $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ فتكون موجبة عندما $x>0$ وسـالبة عندما $x<0$ وصفرا عندما $x=0$ لذا فان منحني الدالة $y=\sin^{-1}x$ مقعر الـى الاعلى على الفترة $(0\ ,\ 1)$ و مقعر الى الاسفل على الفترة $(-1, 0)$ اما النقطـة $(0\ ,\ 0)$ فهي نقطة انقلاب وسيكون مخطط الدالة $y=\sin^{-1}x$ الاتي

رسم منحنى معكوس الجيب



من الواضح ان منحني $y = \sin^{-1} x$ متناظر بالنسبة الى نقطة الاصل أي ان $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ وان الدالة $y = \sin^{-1} x$ دالة فردية (odd function)

مثال جد 1) $\tan(\sin^{-1}(-\frac{3}{4}))$

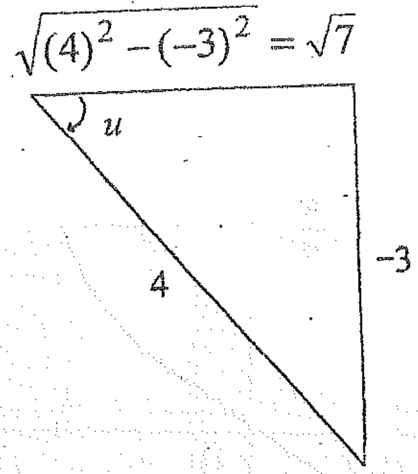
2) $\sec(\sin^{-1}(-\frac{3}{4}))$

الحل نفرض ان $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = u$

وم كورر

$\therefore \sin u = -\frac{3}{4}$

لان $\sin u$ كمية سالبة فان $-\frac{\pi}{2} < u < 0$ والشكل التالي يوضح الحالة



اذن

$$\tan u = \frac{-3}{\sqrt{7}}$$

$$\sec u = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

أي ان

$$1)\ \tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{-3}{\sqrt{7}}$$

$$2)\ \sec\left(\sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

بالنسبة الى الدالة $y = \cos x$ فهي كالدالة $y = \sin\ x$ ليست متقابلة على مجالها ولكن حين تحديد أو تقييد مجالها الى $[\,0\ ,\ \pi\,]$ فالدالة المقيدة

$$y = \cos x \ \text{و}\ 0 \le x \le \pi$$

تصبح متقابلة ويكون لها معكوس والذي سنرمز له بالرمز $x = \cos^{-1} y$ او $x = \text{arc}\cos y$

ان مجال الدالة $x = \cos^{-1} y$ هو $[\,-1\ ,\ 1\,]$ ومداها $[\,0\ ,\ \pi\,]$

مشتقة الجيب = $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ × مشتقة الزاوية ١٣٢

مشتقة معكوس الجيب =

$$\frac{d(\cos y)}{dx}=\frac{du}{dx} \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$-\sin y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

وبما ان $y\in[0,\pi]$ فان $\sin y>0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\quad\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

<u>مثال</u> اذا كانت $y=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ جد y'

<u>الحل</u>

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

مطلوب

هنا $u=\frac{1}{x}$

$$\therefore y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} \qquad \frac{(x\cdot 0)-(1\cdot 1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

<u>تعريف</u> $y = \cos^{-1} x$ اذا وفقط اذا $x = \cos y$

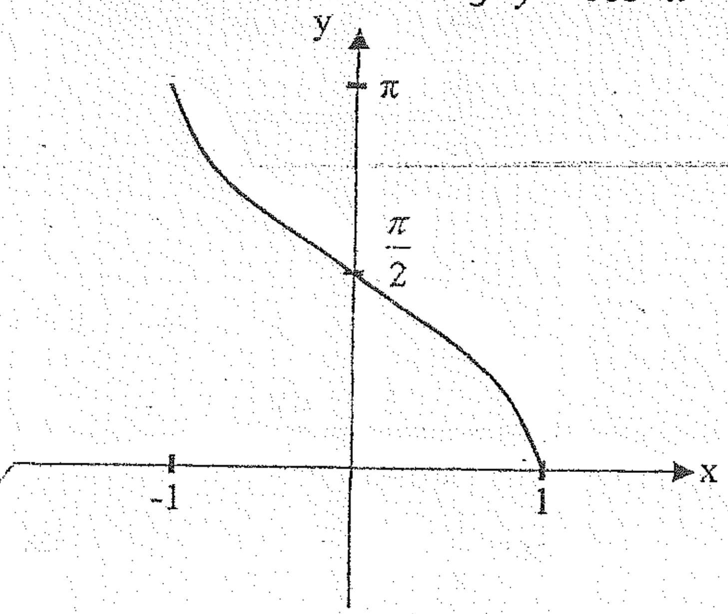
حيث $-1 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq \pi$

وان $\cos(\cos^{-1} x) = x$ لكل $x \in [-1,1]$

و $\cos^{-1}(\cos y) = y$ لكل $y \in [0,\pi]$

و الدالة $\cos^{-1}$ ليست دالة زوجية (even function) أي ان $\cos^{-1}(-x) \neq \cos^{-1} x$ و

مخطط منحي الدالة $y = \cos^{-1} x$ هو



رسم

مطلوب

<u>نظرية</u> اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق الى x وان $-1 < u < 1$ فان

$$\boxed{\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}}$$

<u>البرهان</u> بما ان $y = \cos^{-1} u$

فان $\cos y = u$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}$$

حكور

مثال بين ان $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ لكل $x \in [-1,1]$

الحل نفرض ان $x \in [-1,1]$ وان $z = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

$$\therefore \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - z$$

و باخذ جيب الطرفين نحصل على ان

$$\sin(\sin^{-1} x) = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\therefore x = \cos z$$

وبما ان $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$

فان $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$$-\pi \le \sin^{-1} x - \frac{\pi}{2} \le 0$$

$$0 \le \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \le \pi$$

$$0 \le z \le \pi$$

وهذا يعني ان $z=\cos^{-1}x$ لكل $x\in[-1,1]$

اذن $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ لكل $x\in[-1,1]$

تعريف

$y=\tan^{-1}x$ اذا و اذا فقط $x=\tan y$ لكل $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

كما وان $y=\cot^{-1}x$ اذا واذا فقط $x=\cot y$ لكل $y\in(0,\pi)$

ملاحظة ان مجال الدالة $y=\tan^{-1}x$ هو مجموعة IR ومداها $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ كما وان مجال الدالة $y=\cot^{-1}x$ هو مجموعة IR ومداها $(0,\pi)$

نظرية

$$\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}\qquad(1)$$

$$\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}\qquad(2)$$

البرهان سنبرهن (1) اما (2) فيترك للقارئ

لما كان $y=\tan^{-1}u$ اذا واذا فقط $u=\tan y$

$$\therefore\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan y)}{dx}$$

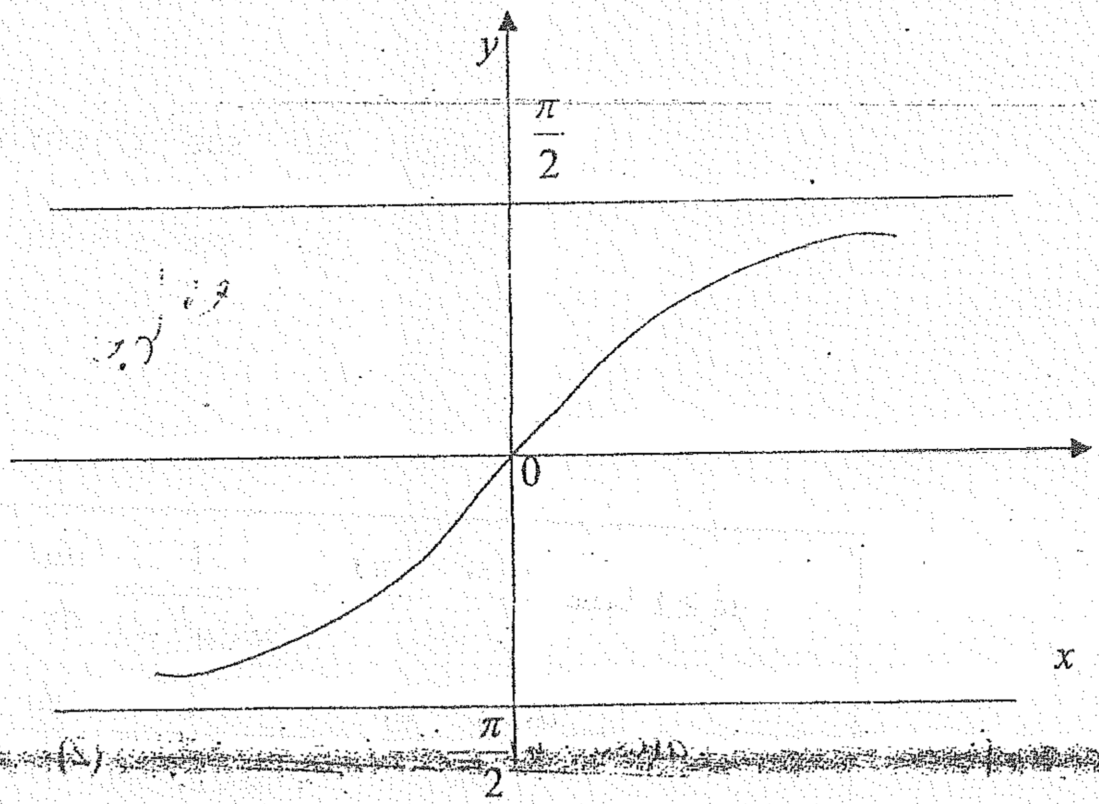
$$\frac{du}{dx} = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \frac{du}{dx}$$

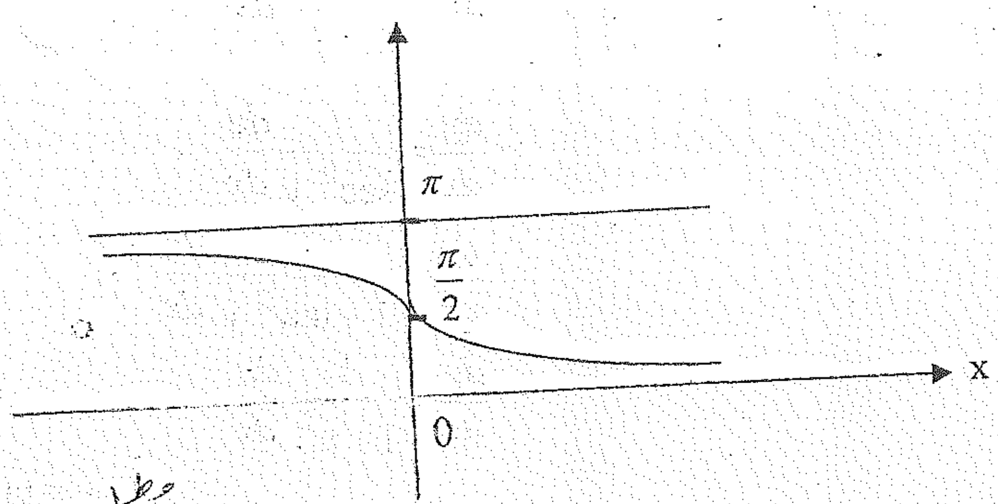
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}$$

ان مخطط الدالة $y = \tan^{-1} x$ هو



اما مخطط منحني الدالة $y = \cot^{-1} x$ فهو



مطلوب

<u>**تعريف**</u> $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\frac{1}{x})$ لكل $|x| \geq 1$

وان $\sec^{-1} x = \sin^{-1}(\frac{1}{x})$ لكل $|x| \geq 1$

<u>**نظرية**</u>

$$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad (1)$$ عندما $|u| \geq 1$

$$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad (2)$$

البرهان نبرهن (1) $\sec^{-1}u = \cos^{-1}(\frac{1}{u})$ عندما $|u| \geq 1$

$$\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

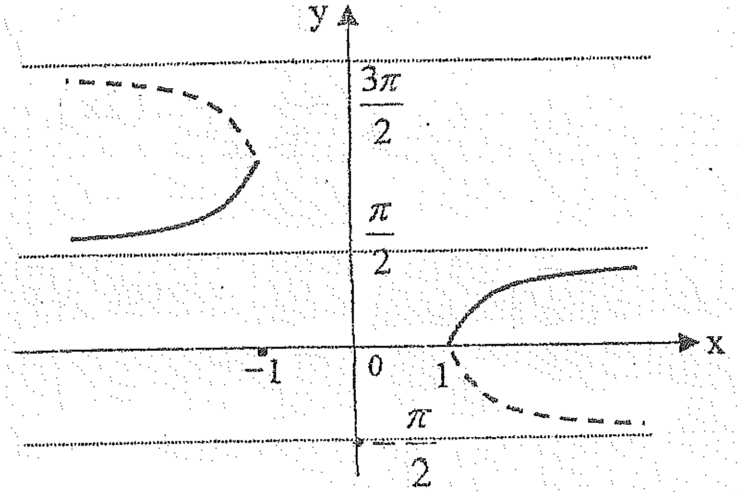
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2}} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dx}$$

$$\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2}}\left(\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{dx}$$

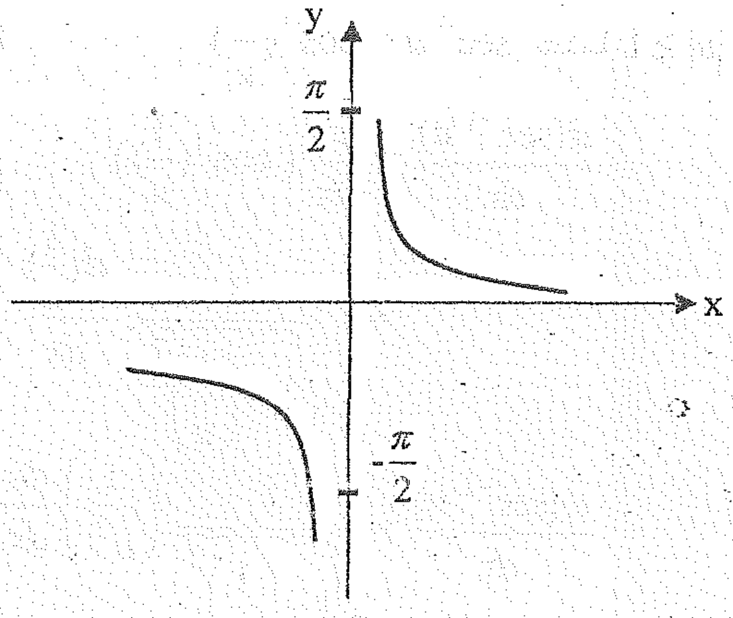
$$= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

مخطط منحني الدالة $y = \sec^{-1}x$

وطور



مخطط منحني الدالة $y = \csc^{-1} x$



$\frac{d\tan}{dx} = \frac{1}{1+u^2}$

$u = x^2$

<u>مثال</u> جد مشتقة $y = \tan^{-1} x^2$

<u>الحل</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot \frac{d(x^2)}{dx}$$

$\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^4} \cdot (2x)$$

<u>مثال</u> جد مشتقة $y = \cot^{-1} \sqrt{x}$

$\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}$

$u = \sqrt{x}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال جد مشتقة $y = \sec^{-1} \sqrt{x+1}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left|\sqrt{x+1}\right| \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 1}} \cdot \frac{d(\sqrt{x+1})}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left|\sqrt{x+1}\right| \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$$

مثال جد مشتقة $y = \csc^{-1} \frac{3}{x}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\left|\frac{3}{x}\right| \sqrt{\left(\frac{3}{x}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{d\left(\frac{3}{x}\right)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\left|\frac{3}{x}\right| \sqrt{\frac{9}{x^2} - 1}} \left(\frac{-3}{x^2}\right)$$

مثال جد y' اذا كانت $y=\tan^{-1}(\cos\sqrt{x})$

الحل $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\tan^{-1}(\cos\sqrt{x}))}{dx}$$

$$y'=\frac{1}{1+(\cos\sqrt{x})^2}\cdot\frac{d(\cos\sqrt{x})}{dx}$$

$$y'=\frac{1}{1+\cos^2\sqrt{x}}\cdot(-\sin\sqrt{x})\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$y'=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\cos^2\sqrt{x}}$$

مثال جد y' اذا كانت $y=\sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}$

الحل $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cot^{-1}\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$y'=\frac{1}{2}(\cot^{-1}\sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1}\frac{d(\cot^{-1}\sqrt{x})}{dx}$$

$$y'=\frac{1}{2}(\cot^{-1}\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d(\sqrt{x})}{dx}\right)$$

$$y' = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{x}\sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}}$$

مثال جد y' اذا كانت $y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$

الحل $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right)$

$$y' = \frac{d\left(\sin^{-1} x\right)}{dx} + \frac{d\left(\cos^{-1} x\right)}{dx}$$

جا نولا $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$

مثال جد مشتقة $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)$

الحل $f'(x) = \frac{d\left(\sin^{-1}\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)\right)}{dx}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)^2}} \; \frac{d\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)^2}}\left(\frac{(x^2+1)\frac{d(10x+5)}{dx}-(10x+5)\frac{d(x^2+1)}{dx}}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-10(x^2+x-1)}{(x^4+1)^2\sqrt{1-\left(\frac{10x+5}{x^2+1}\right)^2}}$$

تدريب

جد مشتقة ما يلي

(1) $y = x^3 \cos^{-1} x^3$

(2) $y = \left(\tan^{-1} 2x + x\right)^2$

اسئلة التقويم الذاتي

1) جد قيمة كل من

(i) $\sin\left(3\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

(ii) $\tan\left(\sec^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)\right)$

(iii) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}+\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

2) برهن ان $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{4}$

3) جد مشتقة الدوال التالية:

(i) $y=\tan^{-1}(2x-3)$

(ii) $y=\dfrac{1}{\cos^{-1}x}$

(iii) $y=\sqrt{x}\sin^{-1}(\sqrt{x})$

(iv) $y=\csc^{-1}\left(\sqrt{x^3+1}\right)$

$\dfrac{d\cot^{-1}u}{dx}=\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{}}1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$

(v) $y=\cot^{-1}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

(vi) $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{3}+\cot^{-1}\dfrac{x}{3}$

$\dfrac{d(\sin^{-1}u}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}\cdot\dfrac{dx}{dx}$

(vii) $y=\sin^{-1}\dfrac{x+3}{x-3}$

(viii) $y=\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\csc^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

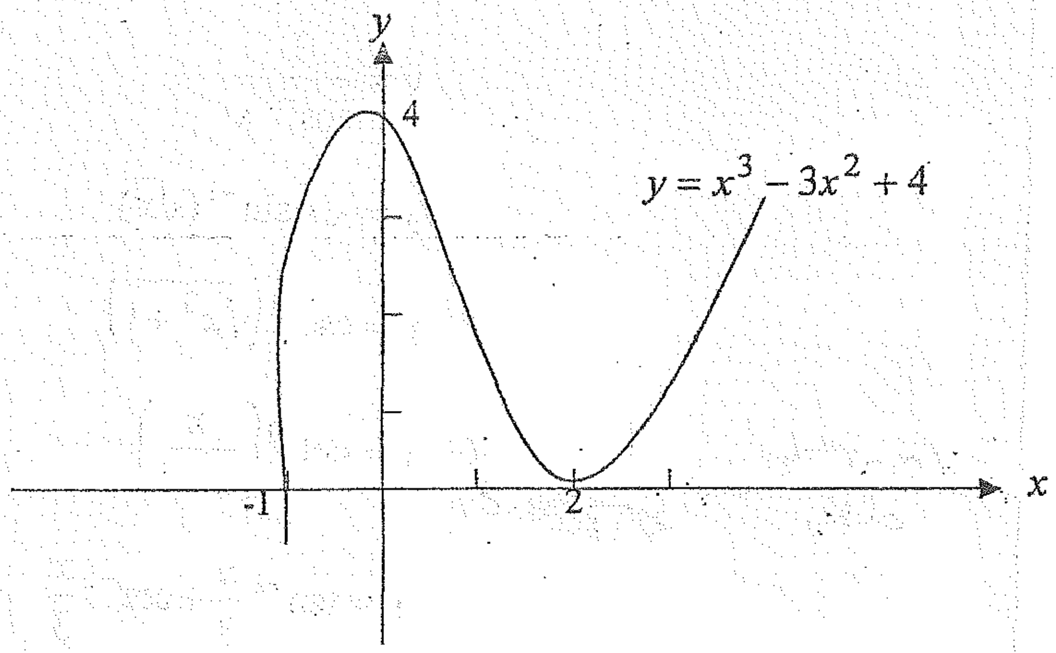
(ix) $2x\cos + x=\tan^{-1}y$

(x) $\sin^{-1}(x+y)\cos^{-1}(xy)=0$

تطبيقات الاشتقاق *Applications of derivatives*

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة *Increasing and decreasing functions*

في الشكل الذي في الاسفل والذي يمثل مخططا للدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$ نلاحظ أن الدالة متزايدة [أو أن منحني الدالة صاعد (rise)] في الفترة $(-\infty , 0)$ وعند النقطة $(0 , 4)$ تكون قيمة الدالة اكبر من أي قيمة لها في



الفترة التي تسبق النقطة $(0 , 4)$ وفي الفترة التي تليها ويطلق على النقطة $(0 , 4)$ بالنهاية العظمى المحلية (local maximum) والدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$ متناقصة [أو أن منحي الدالة هابط fall] .

في الفترة $(0 , 2)$ وعند النقطة $(2 , 0)$ تكون قيمة الدالة أصغر من أي قيمة لها في الفترة التي تسبق النقطة $(0 , 4)$ وفي الفترة التي تليها ويطلق على النقطة $(2 , 0)$ بالنهاية الصغرى المحلية (local minimum) ، بعد الفترة $(0 , 2)$

يبدأ المنحي بالصعود من جديد أي أن الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$ تتزايد مـــن جديـــد (Increasing function)

<u>تعريف</u> يقال للدالة $y = f(x)$ بانها متزايدة على الفترة $\mathrm{I_r}$ أذا

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

لكل x_1 و x_2 في $\mathrm{I_r}$

ويقال للدالة $y = f(x)$ بانها متناقصة (decreasing function) على الفترة $\mathrm{I_r}$ اذا

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

لكل x_1 و x_2 في $\mathrm{I_r}$.

هناك علاقة بين ان تكون الدالة $y = f(x)$ متزايدة او متناقصة واشارة مشتقها $f'(x)$ وهذه العلاقة يمكن صياغتها بالنظرية التالية :

<u>نظرية :</u>

اذا كانت الدالة $y = f(x)$ مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للأشتقاق على الفترة (a, b) فأن :

(١) اذا كانت $f'(x) > 0$ في الفترة (a, b) فأن الدالة $f(x)$ دالة متزايدة في الفترة $[a, b]$.

(٢) اذا كانت $f'(x) < 0$ في الفترة (a, b) فأن الدالة $f(x)$ دالة متناقصة في الفترة $[a, b]$.

<u>البرهان :</u> لبرهان هذه النظرية سنحتاج الى نص (نظرية القيمة المتوسطة) (The mean value theorem) والتي تقول :

اذا كانت الدالة $y = f(x)$ مستمرة لكل نقاط $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق لكـــل نقـــاط (a, b) فيوجد على الاقل عدد c بين a و b بحيث أن

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

نأتي الآن الى برهان نظريتنا

لتكن x_1 , x_2 أي عددين في $[a , b]$ بحيث ان $x_1 < x_2$ بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[x_1 , x_2]$ نحصل على :

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

حيث ان c عدد بين x_1 , x_2

ولأن $x_2 - x_1$ عدد موجب لذا فأن اشارة $f'(c)(x_2-x_1)$ ستعتمد كليا على اشارة $f'(c)$ فأذا كانت اشارة $f'(c)$ موجبة في (a , b) فان $f(x_2)>f(x_1)$ وهذا يعني ان الدالة متزايدة .

واذا كانت اشارة $f'(c)$ سالبة في (a , b) فأن $f(x_2)<f(x_1)$ وهذا يعني ان الدالة متناقصة .

مثال (1) : ما هي الفترات التي تكون فيها الدالة $y=x^2-2x+5$ متزايدة او متناقصة .

$y = x^2 - 2x + 5$

الحل :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=2x-2$$

$$=2(x-1)$$

أي ان اشارة المشتقة الأولى تعتمد على اشارة القوس $(x-1)$ اما عن العدد 2 المضروب بالقوس $(x-1)$ فلا تأثير له على اشارة المشتقة لأنه عدد موجب .

لدراسة اشارة القوس $(x-1)$ نرسم خط الاعداد التالي :

$x = 1$

- - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

نلاحظ على هذا الخط ان القوس $(x-1)$ يساوي صفرا عند $x=1$ وأن اشارة القــوس سالبة على يسار $x=1$ وموجبة على يمين $x=1$ لذا نقول أن أشارة المشتقة الأولــى سالبة على يسار $x=1$ أي أن $f'(x)<0$ عندما $-\infty<x<1$ وأن أشارة المشتقة الأولى موجبة على يمين $x=1$ أي ان $f'(x)>0$ عندما $1<x<\infty$ وهذا كلــه يعني ان الدالة متزايدة بالفترة $(1,\infty)$ ومتناقصة بالفترة $(-\infty,1)$

<u>مثال (2):</u>

أدرس تزايد وتناقص الدالة التالية $y=2x^3-6x$

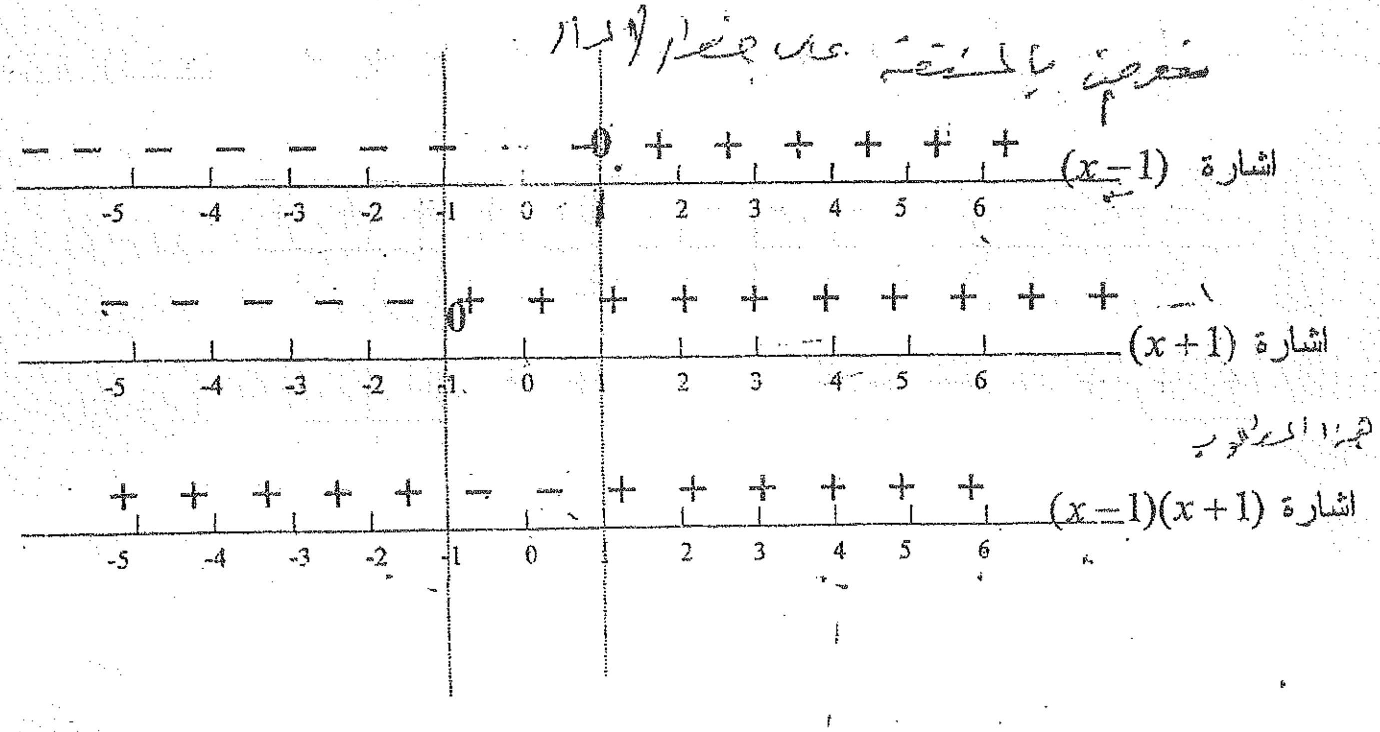
<u>الحل :</u> نجد المشتقة الأولى

$$\frac{dy}{dx}=6x^2-6$$
$$=6(x^2-1)$$
$$=6(x-1)(x+1)$$

x = +1
x = -1

أن اشارة المشتقة الأولى تعتمد على إشارتي القوسين $(x-1)$ و $(x+1)$ دون تدخــل العدد 6 بذلك لأنه عدد موجب لذا سنبدأ بدراسة اشارتي القوسين $(x-1)$ و $(x+1)$ ثم نأتي لدراسة اشارة حاصل ضربهما :

x = -1
x = 1



ماذا نستنتج عند دراستنا لأشارة $(x-1)(x+1)$:

(1) أن $f'(x) > 0$ في الفترة $(-\infty,-1)$ وبذا تكون الدالة $f(x)$ متزايدة في تلك الفترة .

(2) ان الدالة $f'(x) < 0$ في الفترة $(-1,1)$ وبذا تكون الدالة $f(x)$ متناقصة في هذه الفترة .

(3) ان $f'(x) > 0$ في الفترة $(1,\infty)$ وبذا تكون الدالة $f(x)$ متزايدة فيها .

مثال (3): أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ متزايدة و الفترات التي تكون فيها متناقصة .

الحل :

نجد المشتقة الاولى $y'=\frac{dy}{dx}$

$$y'=x^2+x-6$$
$$y'=(x+3)(x-2)$$

اذن اشارة y' تعتمد على اشارتي القوسين $(x-2)$ و $(x+3)$ لذا سندرس اشارتيهما .

	$x<-3$	-3	$-3<x<2$	2	$x>2$
اشارة $(x+3)$	− − − − −	0	+ + + + + +	+	+ + + + +
اشارة $(x-2)$	− − − −	−	− − − − − −	0	+ + + + + +
اشارة $(x+3)(x-2)$	+ + + +	0	− − − − − −	0	+ + + + + +

نلاحظ مايلي :

(1) أن $f'(x) > 0$ بالفترة $(-\infty,-3)$ فالدالة متزايدة في هذه الفترة .

(2) أن $f'(x) < 0$ بالفترة $(-3,2)$ فالدالة متناقصة فيها .

(3) أن $f'(x) > 0$ بالفترة $(2,\infty)$ فالدالة متزايدة في هذه الفترة .

أسئلة التقويم الذاتي

عين الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة او متناقصة :

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 3$

2. $y = |x|$ $\quad y' = \frac{-1}{x^2}$

3. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

4. $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

5. $y = \frac{1}{x-3} = \frac{-1}{(x-3)^2}$

6. $y = \cos x \quad , x \in [0, 2\pi]$

7. $y = 16x - x^3$

8. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$

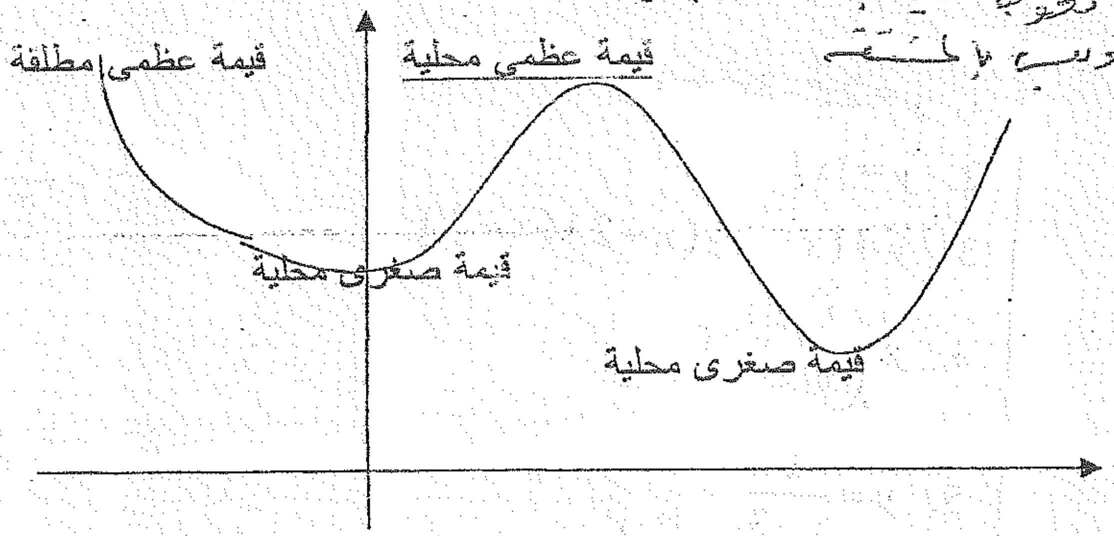
9. $y = \frac{1}{x^3} = \frac{-1}{(x^3)^2}$

10. $y = x^6$

<u>تعريف</u> يقال للنقطة التي فيها المشتقة تساوي صفرا او غير موجودة بانها نقطة حرجة للدالة (critical point)

<u>مثال</u> من الامثلة السابقة نجد ان $x = 1$ نقطة حرجة بالنسبة الى (المثال 1) وان $x = 1$ و $x = -1$ نقاط حرجة بالنسبة الى (المثال 2) و $x = -3$ و $x = 2$ نقاط حرجة بالنسبة الى (المثال 3) .

<u>القيم العظمى و القيم الصغرى</u> ***<u>Maxima and Minima</u>***



<u>تعريف</u>

يقال للدالة $f(x)$ ان لها قيمة صغرى محلية او نهاية صغرى محلية (relative minimum) عند $x = c$ اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل قيم x التي تنتمي لفترة مفتوحة حول c ، ويقال للدالة $f(x)$ ان لها قيمة عظمى محلية او نهاية عظمى محلية (relative maximum) عند $x = c$ اذا كانت $f(x) \leq f(c)$ لكل قيم x التي تنتمي لفترة مفتوحة حول c ويقال لاكبر قيمة تاخذها الدالة $f(x)$ في مجالها بالنهاية العظمى المطلقة للدالة $f(x)$

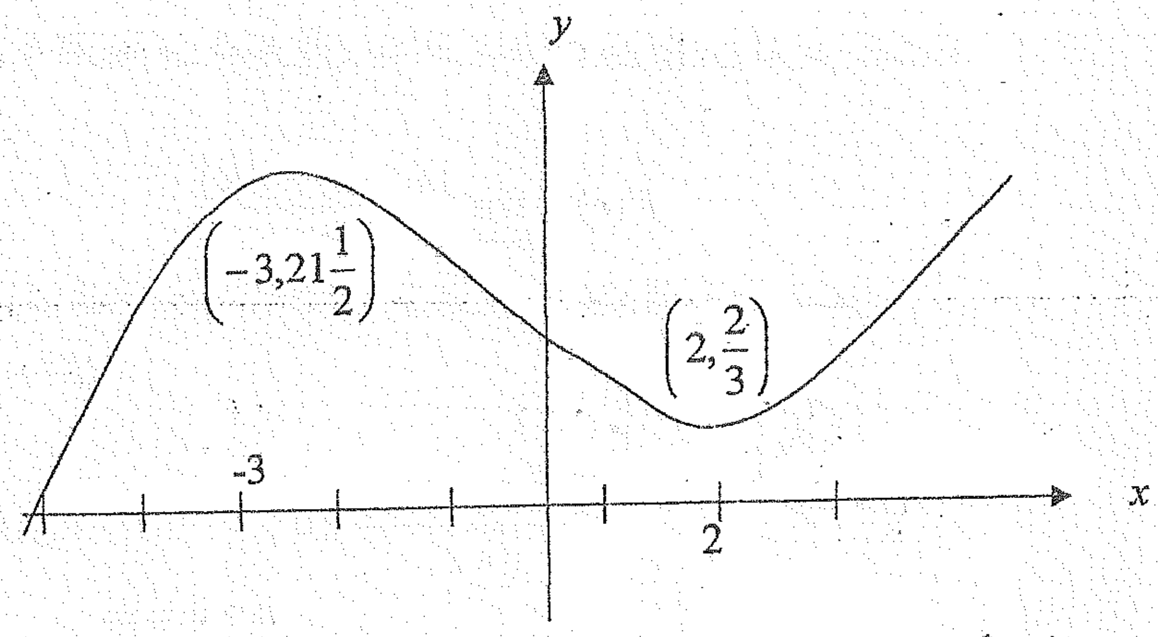
$x = c$ اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ نهاية صغرى

$f(x) \leq f(c)$ نهاية عظمى .

(Absolute maximum) واقـل قيمـة لـها بالنهايـة الصغـرى المطلقـة
(Absolute minimum)

مثال الدالة $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ معرفة على الفترة [3 , -6] جـد القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة .

الحل



نلاحظ

(1) $x=-6$ قيمة صغرى مطلقة لان $f(-6)\le f(x)$ لكل x [-6 , 3]

(2) $x=-3$ قيمة عظمى محلية لان $f(-3)\ge f(x)$ لكل $x\in(-3.25\ ,\ -2.5)$

(3) $x=2$ قيمة صغرى محلية لان $f(2)\le f(x)$ لكل $x\in(\ 1.5\ ,\ 2.5\ )$.

(4) $x=-3$ قيمة عظمى مطلقة لان $f(-3)\ge f(x)$ لكل $x\in[\ -6,3\ ]$

ملاحظة : يقال لاكبر قيمة [illegible] في الفترة [illegible] بالنهاية العظمى المطلقة [illegible]

<u>نظرية</u> لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[\,a\,,\,b\,]$ وان لها قيمة عظمى (او صغرى) محلية في النقطة $x = c$ حيث $c \in (\,a\,,\,b\,)$ فاذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

<u>البرهان</u> لنفرض ان الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ أي ان

$f(\,c\,) \leq f(x)$ لكل قيم x في فترة حول c .

بقول آخر فان

$$f(\,c\,) \leq f(\,c + h\,)$$

لجميع قيم h القريبة من الصفر (أي عند اقتراب $c+h$ من c) من الفرض المشتقة

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

موجودة ولها قيمة محددة ونحن نريد ان نبرهن ان هذه القيمة هي الصفر.

الان لدينا حالتان :

$(x)_c = f(c)$

الحالة الاولى : $\qquad \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

عندما $h > 0$

الحالة الثانية : $\qquad \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

عندما $h < 0$

لان البسط $f(c+h) - f(\,c\,)$ في كلتا الحالتين إما ان يكون موجبا او صفرا ، ولأننا افترضنا بداية ان للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = c$ فاذا اقتربت h من الصفر باخذها قيما موجبة فانه ينتج من الحالة الاولى :

$$f'(c) \geq 0$$

اما اذا اقتربت h من الصفر باخذها قيما سالبة فانه ينتج من الحالة الثانية :

$$f'(c) \leq 0$$

ولان المشتقة موجودة بالفرض فانه يجب ان نحصل على نفس الغاية في الحالتين أي ان

$$0 \le f'(c) \le 0$$

وهذا يكون عند

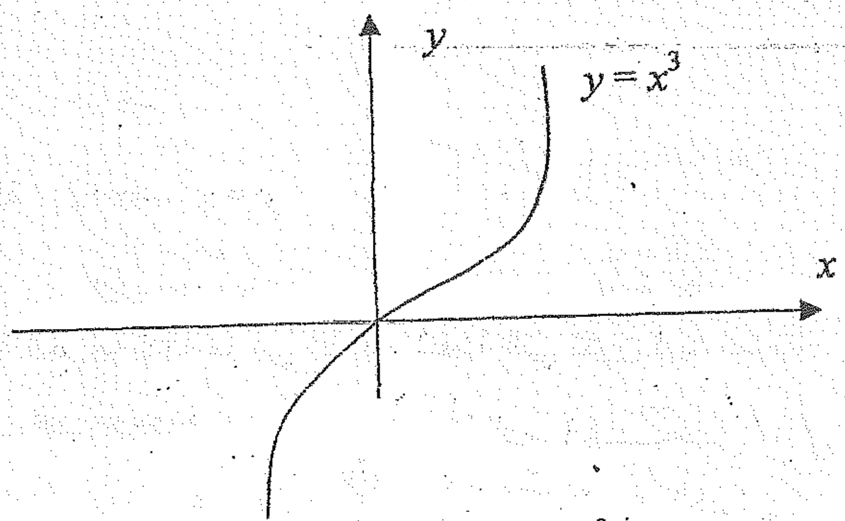
$$f'(c) = 0$$

<u>تدريب</u>

برهن صحة هذه النظرية اذا كانت الدالة $f(x)$ لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

<u>ملاحظة</u> ان معكوس هذه النظرية غير صحيح وسنوضح ذلك بالمثال التالي

<u>مثال داحض</u>



الشكل اعلاه يمثل الدالة $f(x) = x^3$

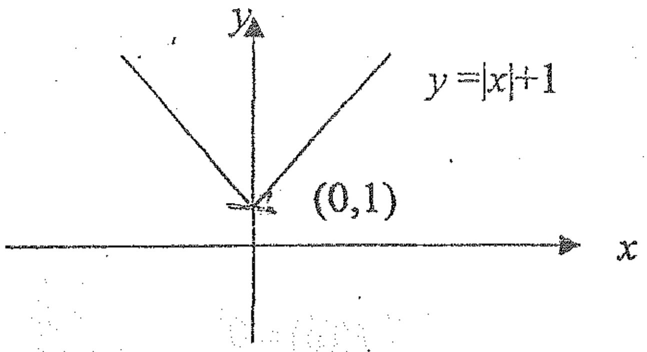
المشتقة الاولى لهذه الدالة هي

$$f'(x) = 3x^2$$

عند $x = 0$ فان $f'(x)$ تساوي صفر ولكن $f(0) = 0$ ليست قيمة عظمى او صغرى فالدالة $f(x)$ متزايدة دائما . لان

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1)^3 < (x_2)^3 \quad \text{لكل } x_1 \text{ و } x_2$$

مثال



الشكل اعلاه يمثل الدالة $f(x) = |x| + 1$

عندما $x > 0$ فان $f'(x) = +1$

وعندما $x < 0$ فان $f'(x) = -1$

أي ان $f'(x) \neq 0$ ولكن عند $x = 0$ فالدالة لها قيمة صغرى محلية $f(0) = 1$ هذا المثال يبين لنا بامكانية وجود دالة لها قيمة صغرى محلية في نقطة ما في حين لا توجد لها مشتقة عند تلك النقطة .

مثال

جد القيم الحرجة للدالة $y = x^2 - 4x + 2$

الحل :

كما نعرف فان النقطة الحرجة لدالة ما هي الا تلك النقطة التي تكون فيها المشتقة مساوية الى الصفر او غير موجودة

١- نجد المشتقة الأولى للدالة
٢- نساوي المشتقة بالصفر
٣- نحل المعادلة
٤- نعوضها في الدالة الاصلية

اذن

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2X = 4$$

$$\therefore X = 2$$

$x = 2$ نقطة حرجة لان $f'(2) = 0$

ملاحظة بشكل عام نستطيع القول انه لو تغيرت اشارة المشتقة الاولى حول النقطة الحرجة من الموجب الى السالب فهنالك قيمة عظمى واذا تغيرت من السالب الى الموجب فهناك قيمة صغرى .

مثال جد القيم الحرجة للدالة

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+10$$

حيث (مجموعة الاعداد الحقيقية) $x \in IR$

ثم جد القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة .

الحل الدالة قابلة للاشتقاق على مجالها لانها متعددة الحدود ومشتقتها الاولى هي

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

وبما ان القيم الحرجة توجد عند $f'(x)=0$ فان

$$x^2-2x-3=0$$

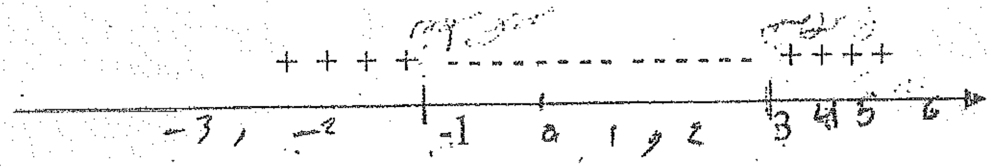
$$(x+1)(x-3)=0$$

اذن للدالة قيمتين حرجتين

$$x=-1$$

$$x=3$$

لمعرفة القيم العظمى والصغرى ندرس اشارة $f'(x)$ حول القيمتين الحرجتين



فنجد ان اشارة $f'(x)$ موجبة لجميع قيم x التي لا تقع في الفترة [3 , 1-] وان اشارة $f'(x)$ سالبة لجميع قيم x التي تقع في الفترة (3 , 1-) أي ان $f'(x)$ تغير اشارتها من الموجب الى السالب عندما تمر بالنقطة $x = -1$ في اثناء حركتها من اليسار الى اليمين لذا فالدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وهذه القيمة هي

$$f(-1) = 11\frac{2}{3}$$

والمشتقة $f'(x)$ تغير اشارتها من السالب الى الموجب عند تمر بالنقطة الحرجة $x = 3$ في اثناء حركتها من اليسار الى اليمين وبذا تكون للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ وهي

$$f(3) = 1$$

<u>مثال</u> أذا كانت

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x \boxed{+ 4}$$

(أ) جد فترات التزايد والتناقص للدالة

(ب) جد القيم العظمى والصغرى للدالة .

<u>الحل</u> (أ)

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$2(x - 1)(x + 2)(2x + 1) = 0$$

اذن القيم الحرجة هي

$$x = 1$$

$$x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

الان

(I) عندما $x < -2$ فأن $f'(x)$ سالبة أي أن الدالة متناقصة

(ii) عندما $-2 < x < -\frac{1}{2}$ فأن $f'(x)$ موجبة أي أن الدالة متزايدة.

(iii) عندما $-\frac{1}{2} < x < 1$ فأن $f'(x)$ سالبة أي أن الدالة متناقصة

(iv) عندما $x > 1$ فان $f'(x)$ موجبة أي أن الدالة متزايدة .

(ب) (I) عندما تزداد x عبر النقطة الحرجة $x = -2$ فان $f'(x)$ تتغير من (−) الى (+) وهذا يعني انه عند $x = -2$ توجد قيمة صغرى هي:

$$f(-2) = 0$$

(ii) عندما تزداد قيمة x عبر النقطة الحرجة $x = -\frac{1}{2}$ فان $f'(x)$ تتغير من (+) الى (−) وهذا يعني انه عند $x = -\frac{1}{2}$ توجد قيمة عظمى هي :

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{81}{16}$$

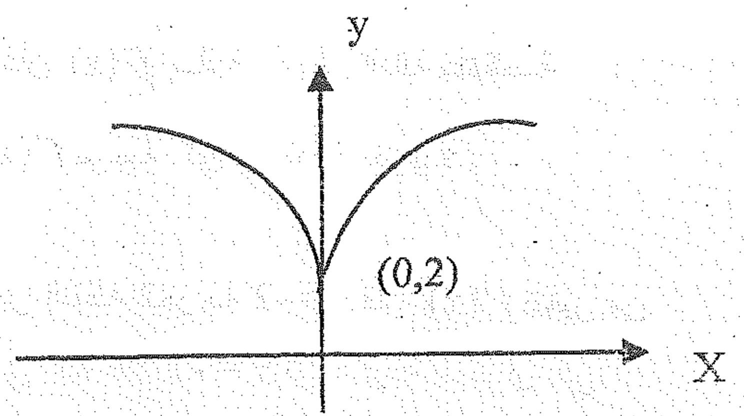
(iii) عندما تزداد قيمة x عبر النقطة الحرجة $x = 1$ فان $f'(x)$ تتغير من (−) الى (+) وهذا يعني انه عند $x = 1$ توجد قيمة صغرى هي :

$$f(1) = 0$$

والشكل التالي يلخص جميع هذه المعلومات:

	قيمة صغرى	قيمة عظمى	قيمة صغرى
	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = 1$
$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
$f'(x) = (-)$	$f'(x) = (+)$	$f'(x) = (-)$	$f'(x) = (+)$
متناقص	متزايد	متناقص	متزايد

<u>مثال :</u>



جد القيم العظمى والصغرى وفترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2$

$f(X) = \frac{2}{3} X^{\frac{2}{3} - \frac{3}{3}} + 2$

$= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2$

<u>الحل</u> الشكل أعلاه يمثل الدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2$ $\frac{2}{3} - \frac{3}{3} \quad -\frac{1}{3}$

$f(x) = 0 \quad = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 = 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2}{1}$

بما أن $f'(0)$ غير موجودة لذا تصبح $x = 0$ نقطة حرجة .

عندما $x < 0$ فأن $f'(x) < 0$ أي ان الدالة متناقصة . X أصغر من صفر متناقصة

عندما $x > 0$ فأن $f'(x) > 0$ أي ان الدالة $\boxed{\text{متزايدة}}$. X أكبر من صفر متزايدة

وللدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وهي :

$$f(0) = 2$$

اسئلة التقويم الذاتي

جد القيم العظمى والقيم الصغرى وفترات التزايد والتناقص للدوال :

(1) $f(x)=x^2+2x-3$

(2) $f(x)=x^4-8x^2$

(3) $f(x)=|4-x^2| \quad on[-3,3]$

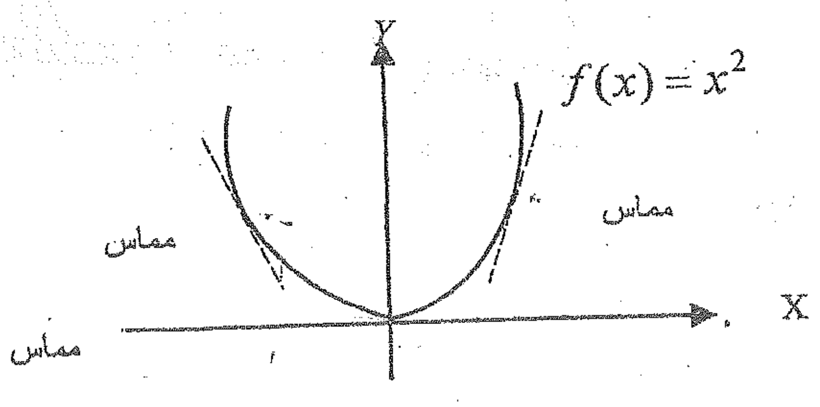
اشارة المشتقة الثانية *The sign of the second derivative*

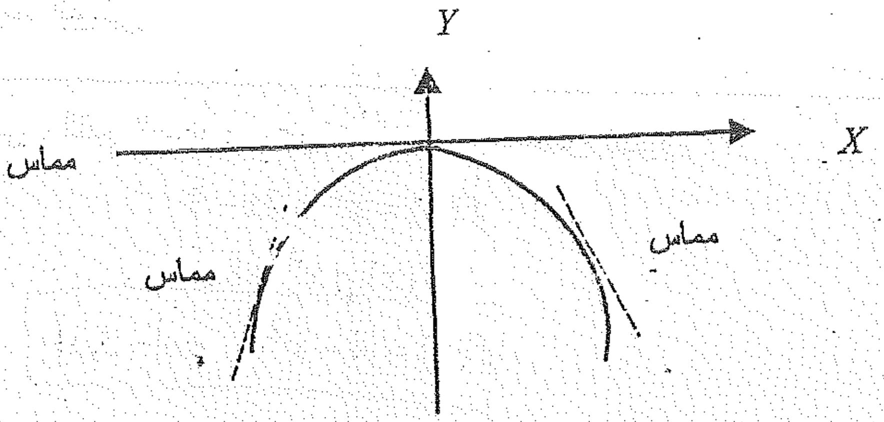
لقد تبين لنا من دراستنا السابقة أهمية دراسة المشتقة الأولى للدالـــة والتـــي كانت لنا خير عون في دراسة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة وفي تحديد فترات تزايد الدالة وتناقصها بالاضافة الى ايجاد معادلة المستقيم المماس والعمود للدالة فـــي نقطة ما .

ندرس الآن المشتقة الثانية وسنبين أهميتها في تحديد تقعرات المنحـــي وفـــي تحديد القيم العظمى والصغرى للدالـــة بالاضافـــة الـــى تعييـــن نقـــاط الانعطـــاف (أو الانقلاب) وسنرى أهمية ذلك كله في تخطيط منحي الدالة وفي حـــل بعـــض المسائل العملية التي تتطلب إيجاد القيم العظمى أو الصغرى .

التقعـــر *concavity*

تقعر نحو الأعلى





<u>تقعر نحو الأسفل</u>

$$f(x) = -x^2$$

اذا درسنا الدالة $f(x) = x^2$ نلاحظ أن مشـــتقتها المتمثلـــة بالدالـــة $f'(x) = 2x$ متزايدة دائما وذلك لأن مشتقة هذه الدالة $\left(f'(x)\right)' = f''(x) = 2$ دائما أكبر مـــن صفر وفي هذه الحالـــة يقـــال للدالـــة $f(x) = x^2$ بأنـــها مقعـــرة الـــى الأعلـــى (Concave up) .

نـــدرس الآن الدالـــة $f(x) = -x^2$ فنلاحـــظ مشـــتقتها المتمثلـــة بالدالـــة $f'(x) = 2x$ هي دالة متناقصة دائما وذلك بسبب أن مشتقة الدالـــة $f'(x) = -2x$ هي $\left(f'(x)\right)' = f''(x) = -2$ أي أن $f''(x)$ أصغر من صفر دائما وفـــي هـــذه الحالـــة نقـــول أن الدالـــة $f(x) = x^2$ ... ـــرة الـــــى الأســـــفل (Concave down) .

<u>تعريف :</u>

يقال للدالة $f(x)$ القابلة للأشتقاق في الفترة (a, b) بأنها مقعرة الى الأعلى علـــى الفترة (a, b) اذا كانت الدالة $f'(x)$ دالة متزايدة في هذه الفـــترة ويقـــال للدالـــة

$f(x)$ بأنها مقعرة الى الأسفل على الفترة (a, b) اذا كانت الدالـــة $f'(x)$ دالـــة متناقصة في هذه الفترة .

ملاحظة :

المهم في هذا التعريف هو أن $f'(x)$ موجودة في الفترة (a,b) فالدالة $f(x)=|x|$ ليس لها أي تقعر في أي فترة تحوي الصفر .

يمكننا أن نفسر فكرة "تقعر هندسيا بما يلي :

اذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للأشتقاق عند كل نقطة في الفترة (a, b) فـــأن $f(x)$ مقعرة الى الأعلى في هذه الفترة اذا كان المستقيم المماس عند كل نقطة مــن هذه الفترة يقع أسفل مخطط الدالة $f(x)$.

والدالة $f(x)$ مقعرة الى الأسفل في هذه الفترة اذا كان المستقيم المماس عند كل نقطة من هذه الفترة يقع أعلى مخطط الدالة $f(x)$ كمـــا موضـــح فـــي الشـــكل السابق.

نلاحظ ايضا اذا كانت الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى فأن الدالة $f'(x)$ متزايدة الأمر الذي يعني بأن مشتقة الدالة $f'(x)$ والتي رمزنا لها بـــالرمز $f''(x)$ تكون موجبة $(f''(x)>0)$ واذا كانت الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأسفل فـــأن الدالة $f'(x)$ متناقصة ومشتقتها $f''(x)$ تكون سالبة $(f''(x)<0)$ من جهـــة اخرى اذا كانت $(f''(x)>0)$ فأن $f'(x)$ دالة متزايدة وهذا يعني أن الدالـــة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى اما اذا كانت $(f''(x) \leq 0)$ فـــأن $f'(x)$ دالـــة متناقصة وهذا يؤدي الى أن الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأسفل .

مما سبق نستطيع القول بأننا نستطيع أن نحدد نوع التقعر من خلال دراســـتنا لأشارة المشتقة الثانية $f(x)$ فنقول :

اذا كانت $(f''(x)>0)$ فأن الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى .

اذا كانت $(f''(x)<0)$ فأن الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأسفل .

<u>مثال :</u>

أدرس تقعرات الدالة $f(x)=(x+3)^3$

<u>الحل :</u>

$3(x+3)^2 \cdot 1$

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ متعددة حدود لذا فهي مستمرة كما وأن $f'(x)$ ، معرفتيــن وهما : $f''(x)$

$$f'(x)=3(x+3)^2$$

$$f''(x)=6(x+3)$$

$$(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$$

$$3x+15$$

<u>ونلاحظ ما يلي</u>

(1) عندما $(x+3)>0$ أي عندما $x>-3$ فأن $f''(x)>0$ الأمر الــــذي يعني أن الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى في الفترة $(-3,\infty)$.

(2) عندما $(x+3)<0$ أي عندما $x<-3$ فأن $f''(x)<0$ وهـــذا يعنــي أن الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأسفل في الفترة $(-\infty,-3)$.

وهنا نطرح السؤال التالي ماذا يحدث للتقعر عند $x=-3$ ؟

للأجابة عن هذا السؤال نقول لا نستطيع القول أنه عند $x=-3$ يوجـــد تقعـــر الـــى الأعلى أو تقعر الى الاسفل ولكننا لاحظنا أن الدالة $f(x)=(x+3)^3$ في المثال قد غيرت تقعرها عند $x=-3$ من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى لذا فالنقطـــــة $x=-3$ ستسمى بنقطة أنقلاب أو أنعطاف (Inflection Point) لأن تقعـــر المنحي قبلها يتغير الى نقيضه بعدها وسنذكر الآن مزيد من خصائص هذه النقطـــــة في التعريف التالي :-

تعريف :

تسمى النقطة التي تقع على منحي الدالة $f(x)$ والتي يغير المنحي عندها تقعره من الأعلى الى الأسفل أو بالعكس نقطة انقلاب (أو انعطاف)

فأذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a\ ,\ b]$ وكانت $c\in(a,b)$ فالنقطة $(c\ ,f(c))$ تكون نقطة انقلاب اذا تحقق الشرطان :

(1) الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=c$.

(2) منحي الدالة $f(x)$ يغير اتجاه تقعره حول c من الأعلى الى الأسفل أو بالعكس .

اذا كانت $x=c$ نقطة انقلاب للدالة $f(x)$ فهذا يعني بأن الدالة $f'(x)$ تتحول عند c من دالة متزايدة الى متناقصة أو من دالة متناقصة الى متزايدة الأمر الذي يعني بأن $x=c$ هي نقطة نهاية عظمى أو صغرى للدالة $f'(x)$ وفي كلتا الحالتين فأن $f''(c)=0$.

نظرية :

لتكن $x=c$ نقطة انقلاب للدالة $f(x)$ فأذا كانت $f''(c)$ موجودة فأن $f''(c)=0$

ملاحظة :

معكوس هذه النظرية غير صحيح فالدالة $f(x)=x^4$ لا تملك نقطة انقلاب عند $x=0$ مع ان $f''(0)=0$.

مثال :

الدالة $f(x)=x^3$ لها نقطة انقلاب عند $x=0$ لأن $f''=6x$ تغير اشارتها عندها أي يتغير التقعر عند $x=0$.

مثال :

الدالة $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ لها نقطة انقلاب عند $x=0$ علما ان المشتقة الثانية $f''(x)$ غير موجودة هناك .

نظرية :

اذا كانت $f'(c)=0$ وان $f''(c)>0$ فأن $f(x)$ لها نهاية صغرى عند c .

واذا كانت $f'(c)=0$ وأن $f''(c)<0$ فأن $f(x)$ لها نهاية عظمى عند c .

مثال :

أدرس تقعرات منحي الدالة :

$$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3$$

ثم جد نقطة الانقلاب إن وجدت

الحل :

$$f'(x)=3x^2+x-2$$

$$f''(x)=6x+1$$

$$6x+1=0 \qquad \Rightarrow 6x=-1$$

$$\therefore x=-\frac{1}{6} \qquad x=-\frac{1}{6}$$

الان ندرس اشارة المشتقة الثانية

اشارة $f''(x)=6x+1$

$x<-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$x>-\frac{1}{6}$
- - - - - - - - - - -		+ + + + + + + + + + + +
سالبة		موجبة

$f''(x)$ تكون سالبة لجميع قيم $x<-\frac{1}{6}$

$f''(x)$ تساوي صفر عندما $x=-\frac{1}{6}$

$f''(x)$ تكون موجبة لجميع قيم $x>-\frac{1}{6}$

لذا فمنحني الدالة مقعر الى الاسفل على الفترة $(-\infty,-\frac{1}{6})$ ومقعرا الى الأعلى على الفترة $(-\frac{1}{6},\infty)$ أما عند $x=-\frac{1}{6}$ فهناك نقطة انقلاب .

<u>مثال</u> ادرس تقعرات منحنى الدالة $f(x)=x^2+2x-4$ ثم جد نقاط الانقلاب ان وجدت .

<u>الحل</u>

$$f'(x)=2x+2$$
$$f''(x)=2$$

أي ان اشارة المشتقة الثانية موجبة دائما الأمر الذي يعني ان الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى لجميع قيم x ولاتوجد نقطة انقلاب .

مثال

باستخدام المشتقة الثانية عين القيم العظمى والقيم الصغرى ونقاط الانقلاب ان وجدت للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 3x(x-2)$$

$$3x(x-2) = 0$$

$x = 0 + 2$

نقاط حرجة $x = 0$, $x = 2$

نجد الان المشتقة الثانية $f''(x) = 6x - 6$

نعوض النقاط الحرجة في $f''(x)$

سالبة $f''(0) = -6$ $\quad 6x - 6 = 0$, $6x = 6 + 6$

لان $f'(0) = 0$ وان $f''(0) < 0$ فان الدالة $f(x)$ لها نهاية عظمى عند $x = 0$ وتساوي $f(0) = 2$ (نظرية)

نعوض الان $x = 2$ في $f''(x)$ $\quad f''(x) = 6x - 6$

موجبة $f''(2) = 6.2 - 6 = 6$

لان $f'(2) = 0$ وان $f''(2) > 0$ فان الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى عند $x = 2$ وهي $f(2) = -2$ (نظرية)

لايجاد نقاط الانقلاب نضع $f''(x) = 0$

$$6x - 6 = 0$$

$= 6x = 6 \qquad x = \frac{6}{6} = 1$

$$x = 1, f(1) = 0$$

اذن النقطة $(1,0)$ نقطة انقلاب .

مثال باستخدام المشتقة الثانية جد القيم العظمى والقيم الصغرى ونقاط الانقلاب ان وجدت للدالة $f(x) = x^4 - 32x + 48$

الحل

$$f'(x) = 4x^3 - 32$$

$$4x^3 - 32 = 0$$

$$4(x^3 - 8) = 0$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8 \quad x = 2$$

$\therefore \; x = 2$ نقطة حرجة

$$f''(x) = 12x^2 \qquad 12(2)^2$$

موجبة

$$f''(2) = 48$$

اذن الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى عند $x = 2$ وهي $f(2) = 0$

بما ان اشارة $f''(x)$ موجبة دائما فالتقعر لا يتغير ولا توجد نقطة انقلاب .

أسئلة التقويم الذاتي :

(١) اذا كانت $f(x) = \left|4 - x^2\right|$ جد القيم العظمى والقيم الصغرى .

(٢) استخدم المشتقة الثانية لايجاد القيم العظمى والقيم الصغرى ونقاط الانقلاب ان وجدت للدوال التالية :

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(ii) $f(x) = (2 - x^2)^2$

(iii) $f(x) = x - x^3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$3x(x-2)$

$f'(x) = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 0 + 0$

$x = 2$

$f'(x) \; 3x^2 - x$

$f'(x) = 0$

تخطيط المنحنيات Graphing

ندرس الان كيفية تخطيط منحنيات الدوال مستخدمين جميع ما درسناه سابقا حول النقاط الحرجة والقيم العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب واشارتي المشتقة الأولى والثانية للدالة لهذا الغرض .

لتخطيط منحنى دالة مثل $f(x)$ نعمل الاتي :

(١) نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين السيني والصادي بوضع $x=0$ مرة و $y=0$ مرة اخرى .

(٢) نحسب المشتقة الأولى $f'(x)$ المشتقة الثانية $f''(x)$.

(٣) باستخدام $f'(x)$ و $f''(x)$ نعين النقاط الحرجة والقيم العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب

(٤) نعين الفترات التي تتزايد فيها الدالة والفترات التي تتناقص فيها باستخدام المشتقة الأولى . باستخدام ...

(٥) نعين فترات التقعر الى الأعلى أو الى الاسفل باستخدام المشتقة الثانية .

(٦) نعين نقاطا اضافية على المنحني

(٧) نرسم منحني املس يمر بالنقاط التي وجدناها .

$y=f(x)$

مثال :

خطط منحني الدالة $f(x)=x^3-3x^2+4$

الحل :

(١) نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين :

اولا: نعوض عن $x=0$ بمعادلة المنحني لايجاد نقطة تقاطع المنحني مع المحور الصادي

$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+4=4$$

اذن النقطة $(0,4)$ تمثل نقطة تقاطع المنحني مع المحور الصادي

ثانيا: نعوض عند $y = f(x)$ بالصفر كي نجد تقاطع المنحني مع المحور السيني

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + x^2 + 4 + 4x - 4x = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x(x-2)^2 + (x-2)^2 = 0$$

$$(x-2)^2(x+1) = 0$$

اذن النقاط (-1,0) و (2,0) تمثل نقاط تقاطع المنحني مع المحور السيني .

(٢) نجد $f'(x)$ و $f''(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 3x(x-2)$$

(3) نضع $3x(x-2) = 0$

اذن عند $x = 0$ و $x = 2$ نقاط حرجة

نجد المشتقة الثانية

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$6(x-1) = 0$$

اذن عند $x = 1$ نقطة انقلاب

الان نعوض النقاط الحرجة في $f''(x)$

$f''(0) = -6$ سالبة

ولان $f'(0) = 0$ وان $f''(0) < 0$ فللدالة $f(x)$ قيمة عظمى عند $x = 0$ وتساوي

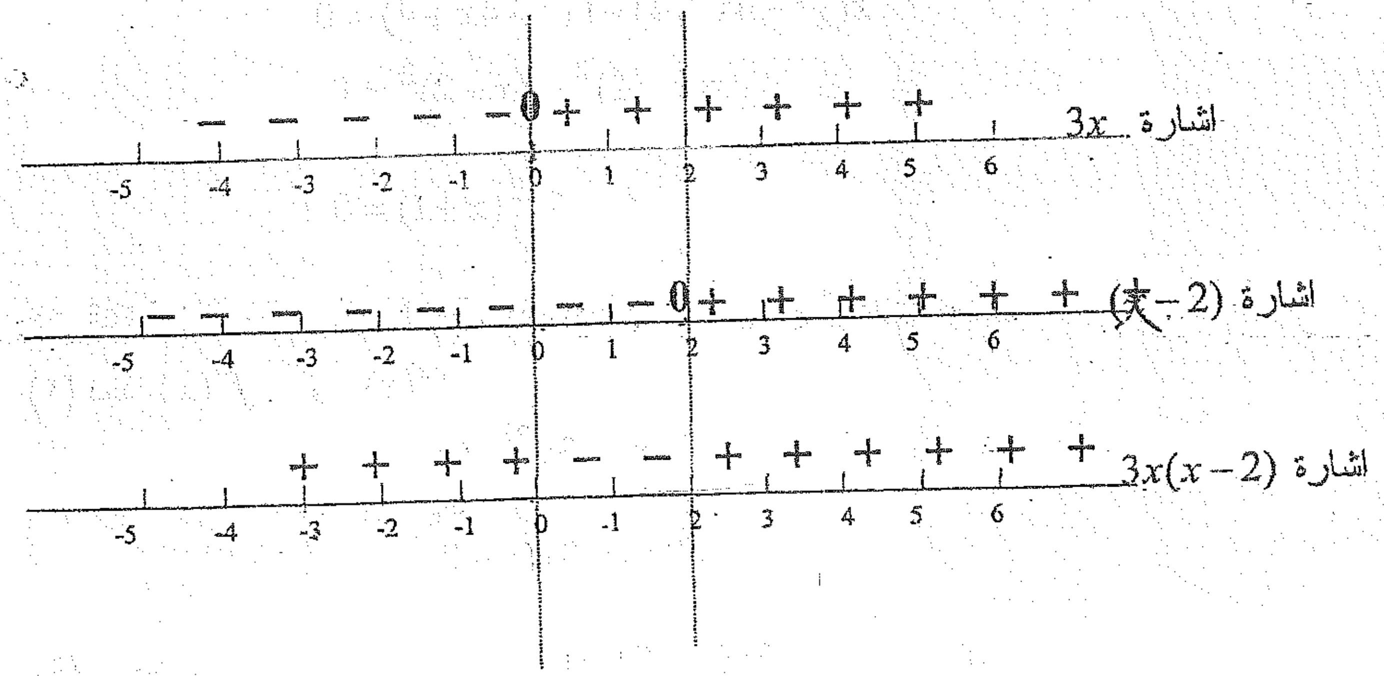
$f(0) = 4$

الان نعوض $x=2$ في $f''(x)$

موجبة $f''(2)=6.2-6=6$

لان $f'(2)=0$ وان $f''(2)>0$ فللدالة $f(x)$ قيمة صغرى عند $x=2$ وتساوي $f(2)=0$

(4) ندرس اشارة $f'(x)$

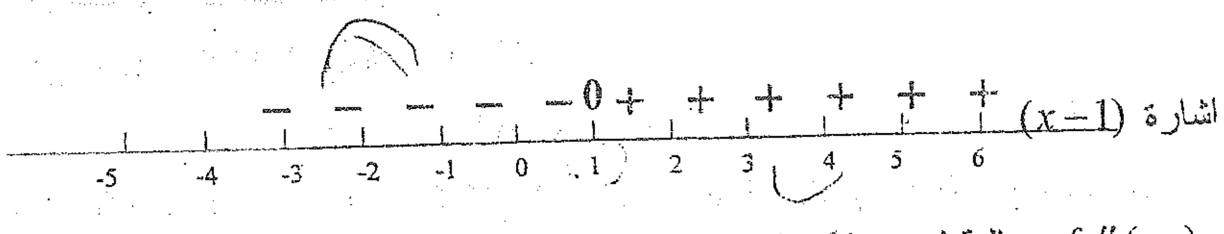


اذن الدالة $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$ لان اشارة $f'(x)$ في هذه الفترة موجبة .

والدالة متناقصة في الفترة $(0, 2)$ لان اشارة $f'(x)$ في هذه الفترة سالبة.

والدالة متزايدة في الفترة $(2, \infty)$ لان اشارة $f'(x)$ في هذه الفترة موجبة.

(٥) ندرس اشارة المشتقة الثانية $f''(x)$ والمساوية الى $6x-6$



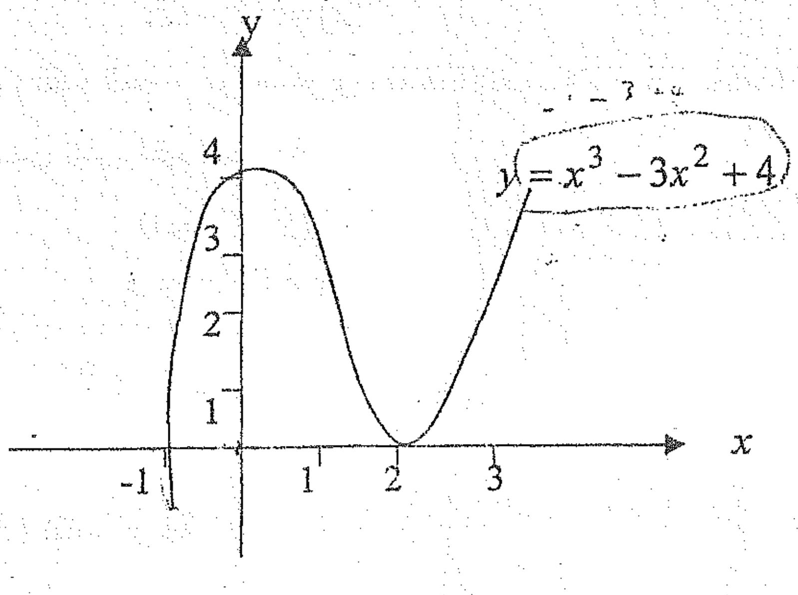
$f''(x)$ سالبة لجميع قيم $x<1$ لذا فالدالة $f(x)$ مقعرة الى الاسفل على الفترة $(-\infty,1)$

$f''(x)$ موجبة لجميع قيم $x >$ لذا فالدالة $f(x)$ مقعرة الـــى الاعلـــى علـــى الفترة $(1,\infty)$

(6) نعين نقاط اضافية على المنحني وبخاصة النقاط التي تقع بين النقـــاط الحرجـــة ونقاط الانقلاب او النقاط التي تقع على يمينها او يسارها .

x	y
-1	0
0	4
1	2
2	0
3	4

(7) نرسم منحني املس .



<u>مثال</u> خطط منحني الدالة $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

<u>الحل</u>

(1) نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين

نضع $y = 0$ في معادلة المنحني

$y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

$4 \cdot \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 = 0$

$y' = 2x^3 - 6x^2 = 0$

~~$2x^2(x-1)=0$~~

$y'' = 6x^2 - 12x = 0$

$2x^2(3 -$

$$\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 = 0$$

$$\therefore\ x = 0\ ,\ x = 4$$

$$f(0) = 0\ ,\ f(4) = 0$$

اذن المنحني يقطع المحور السيني في النقطتين $(4,0)$ ، $(0,0)$

نضع الان $x = 0$ في معادلة المنحني

$$y = \frac{1}{2}(0)^4 - 2(0)^3$$

$$\therefore y = 0$$

أي ان المنحني يقطع المحور الصادي في $(0,0)$

(2) نجد $f'(x)$ و $f''(x)$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 6x^2 - 12x$$

(3) نعين القيم الحرجة والقيم العظمى والصغرى ونقاط الانقـــلاب نضـــع $f'(x)$ مساوية الى الصفر لنحصل على القيم الحرجة

$$2x^2(x-3) = 0$$

$$\therefore\ x = 0\ ,\ x = 3$$

$$f(0) = 0\ ,\ f(3) = -\frac{27}{2}$$

اذن $(0,0)$ و $(3,-\frac{27}{2})$ نقاط حرجة

نعوض النقاط الحرجة في $f''(x)$

$$f''(0) = 0 \text{ و } f''(3) = 18$$

اذن اشارة المشتقة الثانية موجبة وهذا يعني انه توجد قيمة صغرى عند $(3,-\frac{27}{2})$

للحصول على نقطة الانقلاب نضع $f''(x) = 0$

$6x^2-12x=0$

$$6x(x-2)=0$$
$$\therefore\ \ x=0\ \ ,\ \ x=2$$

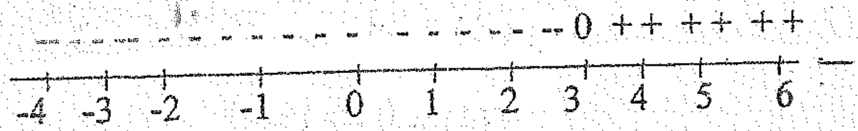
$$f(0)=0\ \ ,\ \ f(2)=-8$$

اذن $(2,-8)$ و $(0,0)$ نقاط انقلاب

(4) ندرس المشتقة الاولى $f'(x)$

$$f'(x)=2x^2(x-3)$$

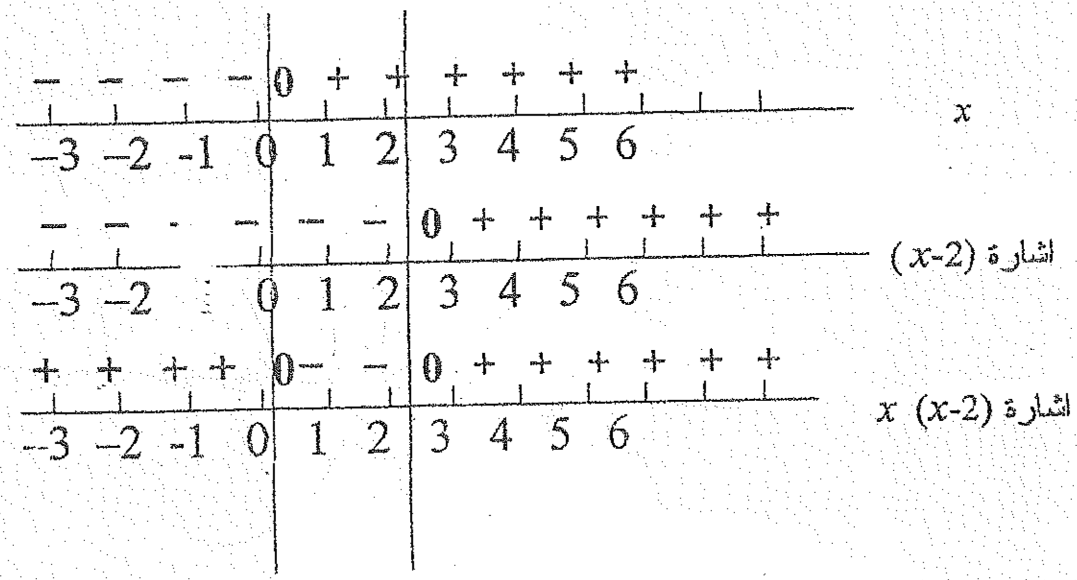
ولان $2x^2$ كمية مربعة في عدد موجب فاشارتها دائما موجبة وهذا يعني ان اشارة $f'(x)$ تعتمد كليا على القوس $(x-3)$



اذن الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(3\ ,\ \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty, 3)$

(5) ندرس اشارة المشتقة الثانية $f''(x)$

$$f''(x)=6x(x-2)$$



في الفترة $(2\,,\infty)$ اشارة $f''(x) > 0$ فالدالة $f(x)$ مقعرة نحو الاعلى

في الفترة $(0\,,2)$ اشارة $f''(x) < 0$ فالدالة $f(x)$ مقعرة نحو الاسفل

في الفترة $(-\infty\,,0)$ اشارة $f''(x) > 0$ فالدالة $f(x)$ مقعرة نحو الاعلى

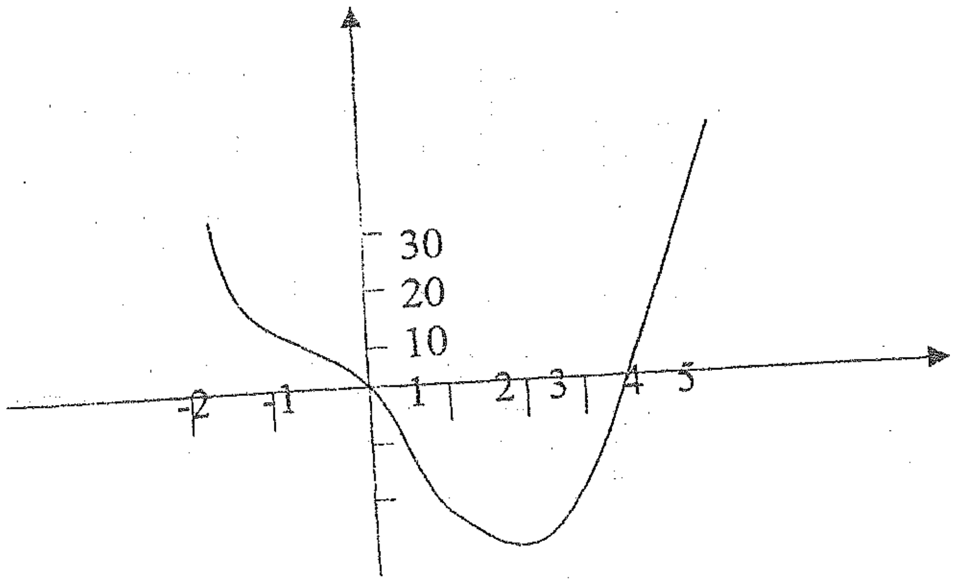
عند النقطة $(0\,,0)$ يتغير التقعر من الاعلى الى ا٧ :١،

عند النقطة $(2\,,-8)$ يتغير التقعر من الاسفل الى الاعلى .

(6) نعين نقاط اضافية

$$f(-2) = 24 \Rightarrow (-2\,,24)$$
$$f(-1) = \frac{5}{2} \Rightarrow (-1\,,\frac{5}{2})$$
$$f(1) = 24 - \frac{3}{2} \Rightarrow (1\,,-\frac{3}{2})$$
$$f(4) = 0 \Rightarrow (4,0)$$
$$f(5) = \frac{125}{2} \Rightarrow (5\,,\frac{125}{2})$$

(7) ارسم منحني املس



<u>مثال</u> ارسم مخطط منحني الدالة $y = f(x) = \frac{1}{16}(-x^3 + 12x^2 - 32)$

<u>الحل</u>

$$f'(x) = \frac{1}{16}(-3x^2 + 24x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{16}(-6x + 24) \qquad (-x + 6)$$

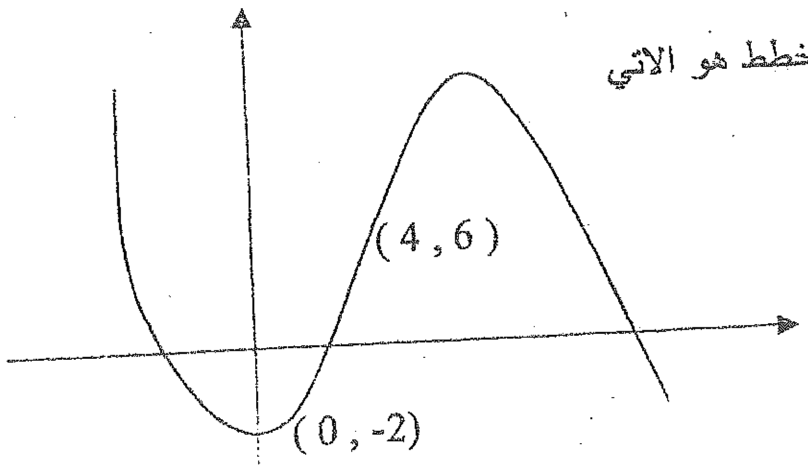
منحني الدالة مقعر الى الاعلى عندما $x < 4$

منحني الدالة مقعر الى الاسفل عندما $x > 4$

النقطة (4 , 6) نقطة انقلاب

النقطتان (0 , -2) و (8 , 14) هما نقطتا نهاية صغرى وعظمى على التوالي

المخطط هو الاتي



اسئلة التقويم الذاتي

(1) خطط منحني الدالة $y = f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$

(2) خطط منحني الدالة $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(3) خطط منحني الدالة المستمرة $y = f(x)$ والتي لها الخصائص التالية :

$f'(2) = f'(-2) = 0 \qquad f(-2) = 7$

$f'(x) > 0 \;, |x| < 2 \qquad f(0) = 4$

$f''(x) < 0 \;, x < 0 \qquad f(2) = 0$

$f''(x) > 0 \;\; x > 0 \qquad f'(x) > 0 \;, |x| > 2$

(4) خطط منحني الدالة $y = x - \frac{1}{x}$

٢٤٦
تحويل قوة الرقم الى ضرب الأس في لوغارتم العدد

The logarithm function and the exponential function الدوال اللوغاريتمية و الدوال الاسية

The natural logarithm function دالـــة اللوغـــاريتم الطبيعـــي

ان تكامل أي دالة مستمرة $f(t)$ من $t = a$ الى $t = x$ هو

$$\int_a^x f(t)dt$$

وهذا التكامل نستطيع ان نعامله كدالة الى x اى اننا نستطيع ان نكتب الاتي

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

وهذا يفتح لنا الطريق لتعريف دوال جديدة منها على سبيل المثال دالة اللوغاريتم الطبيعـــي للعدد الموجب x والذي نرمز له بالرمز Inx أي ان دالة اللوغاريتم الطبيعي Inx دالة معرفة بواسطة التكامل وكالآتي :

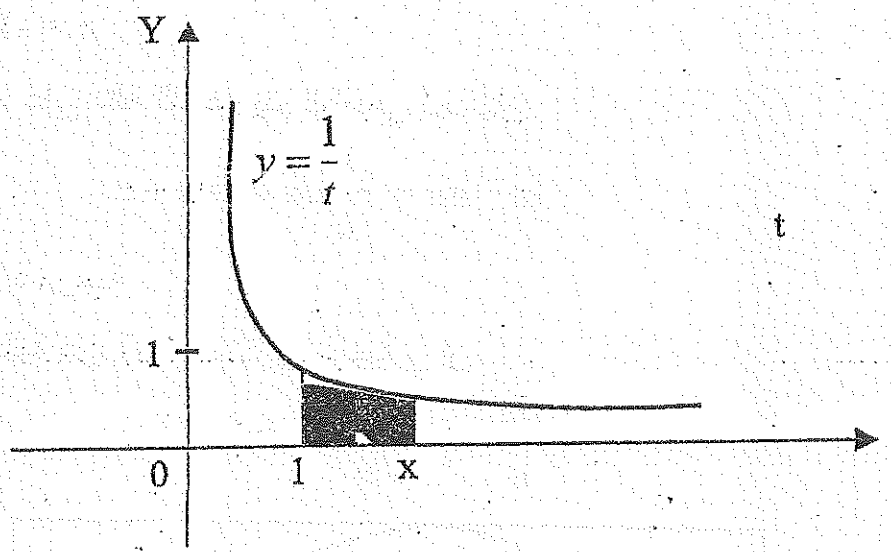
<u>تعريف</u> دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد الموجب x هي قيمة التكامل المحدد مـن $t = 1$ الـى $t = x$ للدالة $y = \frac{1}{t}$.

أي ان $x > 0$ و $Inx = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

من الواضـــح ان التكـامل $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ يمثـل المساحة المحصورة بالمنحي $y = \frac{1}{t}$ مـــن

الاعلى وبالمحور - t من الاسفل ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمســتقيم $t = x$

حيث x عدد اكبر من الواحد كما في الشكل



فاذا كانت $x = 1$

اذن $$In1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

و اذا كانت x اصغر من واحد

$$Inx = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$

من الواضح بان

$$\boxed{\frac{dInx}{dx} = \frac{1}{x}}$$

و اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فان

$$\boxed{\frac{dInu}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$$

ان صيغة التكامل $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$

لا تصح عندما تكون $n=-1$

و لكن و بعد ان تعرفنا على دالة اللوغاريتم الطبيعي نجد بان

$$\int u^{-1}du=\int\frac{1}{u}du=Inu+c$$

هذا في حالة ان الدالة u موجبة

اما في حالة كون u سالبة فان $(-u)$ ستكون موجبة و ان

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{d(-u)}{-u}=In(-u)+c$$

و اختصارا نكتب

$$\boxed{\int\frac{du}{u}=In|u|+c}$$

ناتي الان على ذكر خواص اللوغاريتم الطبيعي

<u>نظرية</u> $\text{In}\, ax=\text{In}\, a+\text{In}\, x$ حيث a و x موجبان

<u>البرهان</u>

$$\frac{d(Inax)}{dx}=\frac{1}{ax}\frac{d(ax)}{dx}$$

$$=\frac{1}{ax}a$$
$$=\frac{1}{x}$$
$$=\frac{d(Inx)}{dx}$$

ان تساوي مشتقة $\text{In}\ ax$ مع مشتقة $\text{In}\ x$ يعني بان

$$\text{In}\ ax = \text{In}\ x + c$$

حيث c عدد ثابت

كي نجد قيمة c نعوض $x = 1$

اذن
$$\text{In}\ a = \text{In}\ 1 + c$$
$$= 0 + c$$
$$= c$$

اذن
$$\text{In}\ ax = \text{In}\ x + \text{In}\ a$$

نظرية $In\left(\frac{x}{a}\right) = Inx - Ina$

البرهان
$$In\left(\frac{x}{a}\right) = In\left(x\cdot\frac{1}{a}\right)$$
$$= Inx + In\frac{1}{a}$$ (من النظرية السابقة)

نحاول الان ان نجد $In\frac{1}{a}$ لذا سنعوض $x=\frac{1}{a}$ في $\text{In ax} = \text{In x} + \text{In a}$

فنحصل على ما يلي

$$In\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = In\frac{1}{a} + Ina$$
$$In1 = In\frac{1}{a} + Ina$$

$$0 = In\frac{1}{a} + Ina$$

اذن $$In\frac{1}{a} = -Ina$$

و لما كان $$In\left(\frac{x}{a}\right) = Inx + In\frac{1}{a}$$

اذن $$In\left(\frac{x}{a}\right) = Inx - Ina$$

نظرية اذا كانت n عدد نسبي فان

$$Inx^n = nInx$$

البرهان $$\frac{d\left(Inx^n\right)}{dx} = \frac{1}{x^n}\frac{d\left(x^n\right)}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^n} nx^{n-1}$$

$$= \frac{n}{x}$$

$$= \frac{d(nInx)}{dx}$$

ماذا تبين ؟

لقد تبين بان مشتقة $\ln x^n$ تساوي مشتقة $n \ln x$ و هذا يعني بان

$$Inx^n = nInx + c$$

لايجاد قيمة c ناخذ $x = 1$ و نعوض

$$In1^n = nIn1 + c$$

$$0 = 0 + c$$

اذن $$c = 0$$

و هذا يعني بان $$Inx^n = nInx$$

<u>مخطط الدالة $y = \ln x$</u>

نلاحظ بان مجال الدالة $y = \ln x$ هو جميع الاعداد الحقيقية الموجبة أي الفترة $(0 , \infty)$ اما مداها فهي الفترة $(-\infty , \infty)$ كما نلاحظ بان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

لذا فان $\frac{dy}{dx}$ موجودة على الفترة $(0 , \infty)$ وهذا يعني ان الدالة $y = \ln x$ مستمرة على هذه الفترة .

من الواضح ان $\frac{dy}{dx} > 0$ وهذا يعني ايضا بان الدالة $y = \ln x$ متزايدة

المشتقة الثانية تساوي $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

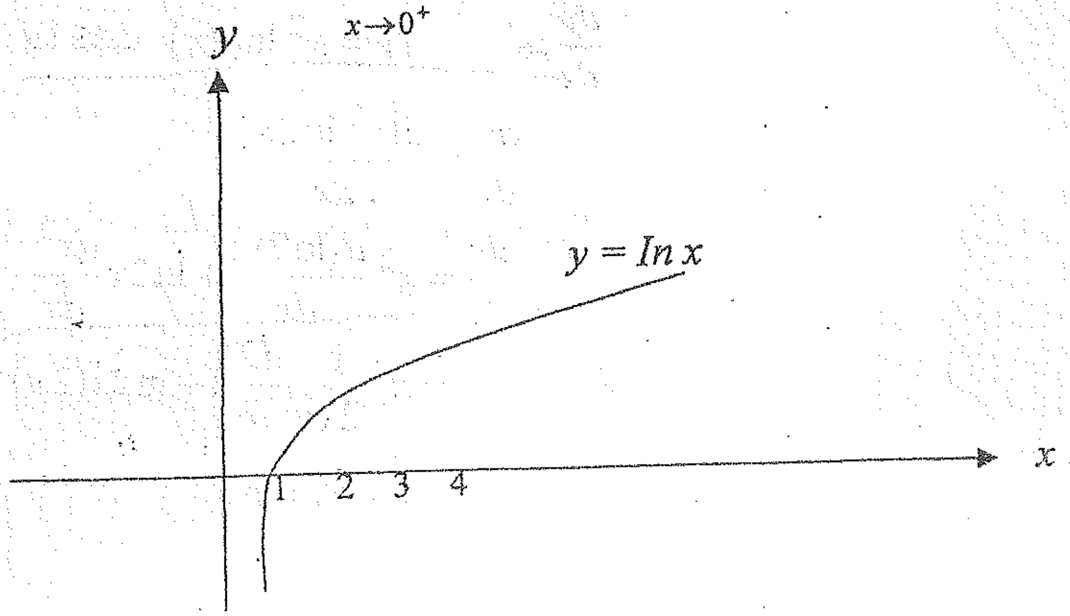
وهي سالبة دائما لذا فمنحني الدالة $y = \ln x$ مقعر الى الاسفل في كل نقطة من نقاط مجالها .

من تعريف الدالة $y = \ln x$ منحني الدالة يمر بالنقطة $(1 , 0)$ ولا يقطع منحني الدالة المحور السيني.

كما وان

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$



مشتقة لن x =

مشتقة $\ln x = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = \ln(1-2x^3)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\ln(1-2x^3)\right)}{dx}$$

$$= \frac{1}{1-2x^3}\;\frac{d(1-2x^3)}{dx}$$

$$= \frac{-6x^2}{1-2x^3}$$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln x)^2$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)^2}{dx}$$

$$= 2(\ln x)^{2-1}\,\frac{d\ln x}{dx}$$

$$= 2\ln x.\frac{1}{x}\;\frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{2\ln x}{x}$$

مثال اذا كانت $y = x^2\ln(2x)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2\ln 2x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\,\frac{d(\ln 2x)}{dx} + \ln 2x\,\frac{dx^2}{dx}$$

$$= x^2\,\frac{1}{2x}\;\frac{d2x}{dx} + \ln 2x(2x)$$

$$= x + 2x\ln 2x$$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y=\ln(\sin x+\cos x)$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\ln(\sin x+\cos x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sin x+\cos x}\ \frac{d(\sin x+\cos x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)$$

$$=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

مثال اذا كانت $y=\tan^{-1}(\ln x)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\tan^{-1}(\ln x)\right)}{dx}$$

$$=\frac{\frac{d(\ln x)}{dx}}{1+(\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln x)^2}$$

$$=\frac{1}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$$

مثال اذا كانت $y=\ln(\ln x)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\ln(\ln x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln x}\ \frac{d(\ln x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\ln x}\ \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x}$$

مثال اذا كانت $y = \ln(\tan x)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل $\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln(\tan x)}{dx}$

$$= \frac{1}{\tan x} \frac{d \tan x}{dx}$$

$$= \frac{1}{\tan x} \sec^2 x$$

مثال جد $\int \frac{x^3}{3x^4+1} dx$

الحل $\int \frac{x^3}{3x^4+1} dx = \frac{1}{12} \int \frac{12x^3 dx}{3x^4+1}$

$$= \ln(3x^4+1) + c$$

مثال جد $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 5}$

اذا كانت مشتقة المقام موجودة في البسط

الحل $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 5} = \ln(\sin x + 5) + c$

مثال جد $\int \tan x dx$

الحل $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$\int \tan x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

<u>مثال</u> جد $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$

مشتقة $\ln x$ موجودة
نضيف للأس ١
ونقسم على الأس + ١

<u>الحل</u>

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \frac{(\ln x)^{3+1}}{3+1} + c$$
$$= \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

<u>مثال</u> جد $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

<u>الحل</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c$$

<u>مثال</u> جد التكامل التالي $\int \frac{x}{5-x^2} dx$

<u>الحل</u> ان مشتقة المقام هي : $-2x$

لذا نضرب البسط في (-2) وخارج التكامل في $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ونحصل

$$\int \frac{x}{5-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{5-x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2} \ln\left|5-x^2\right| + c$$

<u>مثال</u> جد $\int \frac{\ln x}{x \ln 3} dx$

<u>الحل</u> اذا اردنا ان نستخدم طريقة التعويض

نفرض
$$u = \ln x$$

اذن
$$du = \frac{1}{x} dx$$

ولان $\ln 3$ عدد ثابت لذا نستطيع ان نخرجه خارج التكامل ويصبح الحال كالاتي :

$$\int \frac{\ln x}{x\ln 3}dx = \frac{1}{\ln 3}\int u \quad du$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\frac{u^2}{2} + c$$

نعوض $\ln x$ بدلا من u ونحصل على ان

$$\int \frac{\ln x}{x\ln 3}dx = \frac{1}{\ln 3}\frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

<u>مثال</u> (في هذا المثال سنبين ان استخدام خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية يسهل عملية حساب المشتقة)

اذا كانت $y = \ln \frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}$ جد $\frac{dy}{dx}$

<u>الحل</u>

$$y = \ln \frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}$$

$$= \ln x\sqrt{x+5} - \ln(x-1)^3$$

$$= \ln x + \ln\sqrt{x+5} - \ln(x-1)^3$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+5) - 3\ln(x-1)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+5)} - \frac{3}{x-1}$$

<u>ملاحظة</u> من المثال السابق نستطيع القول بان اخذ لوغارتم طرفي د : معقدة يسهل جدا عملية ايجاد مشتقتها ونذكر المثال التالي للتوضيح:

مثال

<u>مثال</u> جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y^{\frac{1}{2}} = \frac{(2x+5)^{\frac{1}{3}}(x^2+3)}{\sqrt[3]{(x^2-9)(2x+1)}}$

حيث $x > 3$

الحل من الواضح ان المعادلة التي تعبر عن الدالة معقدة وان عملية ايجاد مشتقتها بالطرق المالوفة ستاخذ وقتا ليس بالقصير لذا سناخذ لوغارتم الطرفين

$$\ln y^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(2x+5)^{\frac{1}{3}}(x^2+3)}{\sqrt[3]{(x^2-9)(2x+1)}}$$

$$\frac{1}{2}\ln y = \ln(2x+5)^{\frac{1}{3}}(x^2+3) - \ln(x^2-9)^{\frac{1}{3}}(2x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\ln y = \ln(2x+5)^{\frac{1}{3}} + \ln(x^2+3) - \ln(x^2-9)^{\frac{1}{3}} - \ln(2x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\ln y = \frac{1}{3}\ln(2x+5) + \ln(x^2+3) - \frac{1}{3}\ln(x^2-9) - \frac{1}{3}\ln(2x+1)$$

الان نشتق الطرفين:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{2}{2x+5} + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2-9} - \frac{1}{3}\frac{2}{2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4y\left(\frac{1}{3(2x+5)} + \frac{x}{x^2+3} - \frac{x}{3(x^2-9)} - \frac{1}{3(2x+1)}\right)$$

الا تجد بان هذه الطريقة بسيطة لايجاد المشتقة سنسمي هذه الطريقة بطريقة (الاشتقاق باللوغاريتمات)

مثال جد مشتقة $y = \frac{(5x+2)^7}{\sqrt{3x-1}}$

الحل ناخذ لوغارتم الطرفين

$$\ln y = \ln \frac{(5x+2)^7}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\ln y = \ln(5x+2)^7 - \ln(3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = 7\ln(5x+2) - \frac{1}{2}\ln(3x-1)$$

نشتق

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=7\left(\frac{5}{5x+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3x-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{35}{5x+2}-\frac{3}{2(3x-1)}\right)$$

تدريب عام

(1) باستخدام طريقة الاشتقاق باللوغاريتمات جد مشتقة الدالة

$$\sqrt{y}=\frac{x^5\tan^{-1}x}{(3-2x)\sqrt[3]{x}}$$

(2) جد النقاط الواقعة على منحني الدالة $y=\sin^{-1}3x$ والتي عندها يتوازى مماس المنحني مع الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (7 , 4) و (2 , -3).

(3) جد ناتج التكامل $\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

٢٠٨
٤٠

اسئلة التقويم الذاتي

احسب مشتقة كل من الدوال التالية :

1) $y=\ln(\ln\sec x)$

2) $y=\ln\sqrt[3]{x^2}$

3) $y=\ln\dfrac{(x^3-1)^3}{\sqrt{x+1}}$

4) $y=\ln(\sin 2x\sin 3x)$

5) $y=\ln\sqrt{\tan x}$

باستخدام الاشتقاق باللوغاريتمات جد $\dfrac{dy}{dx}$

1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2) $y=x\cos x\sin x$

3) $y=(x-1)^2(3x+1)^3(5x-7)^5$

احسب التكاملات الاتية:

1) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{1-3\cos 2x}dx$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(3x+2)^2}$

الدالة الاسية *The exponential function*

ان دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ دالة مجالها الفترة $(0, \infty)$ ومداها $(-\infty, \infty)$ وهي دالة متقابلة وقابلة للاشتقاق لذا فان هذه الدالة تمتلك معكوس (inverse) وهذا المعكوس قابل للاشتقاق وسنرمز لهذا المعكوس بالرمز e^x والذي هو دالة مجالها الفترة $(-\infty, \infty)$ ومداها $(0, \infty)$

تعريف لكل عدد حقيقي x يعرف العدد e^x بانه

$$e^x = \ln^{-1} x$$

أي ان

$$y = e^x \text{ اذا و اذا فقط } x = \ln y$$

ان العدد e يحقق المعادلة الاتية :

$$\ln e = 1$$

وان قيمة e المقربة هي :

$$e = 2.71828\ldots.$$

ولان $\ln 1 = 0$ فان e^0

من الواضح ايضا ان

$$e^{\ln x} = x \quad \text{لكل } x > 0$$

$$\ln e^x = x \quad \text{لكل قيم } x$$

لان $\ln x^n = n \ln x$ حيث n عدد نسبي

فان $\ln e^n = n \ln e$

ولكن $\ln e = 1$

اذن $\ln e^n = n$

اذن $\ln e^3 = 3$

فمثلا $\ln e^{-2} = -2$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

كما يدل اسمها فان خواص الدالة الاسية e^x هي نفسها قوانين الاسس التي مـــرت علينا بدراستنا السابقة في مرحلة الاعدادية لذا فان :

نظرية : اذا كانت x_1 ، x_2 اعداد حقيقية فان :

عند الضرب تجمع الاسس

$$\boxed{e^{x_1}.e^{x_2} = e^{x_1+x_2}}$$

البرهان نفرض ان

$$x_1 = \ln y_1$$
$$x_2 = \ln y_2$$

لذا فان

$$x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2$$
$$x_1 + x_2 = \ln y_1 y_2$$

اذن
$$y_1 y_2 = e^{x_1+x_2}$$

ولكن
$$x_2 = \ln y_2 \quad , \quad x_1 = \ln y_1$$

أي ان
$$y_2 = e^{x_2} \qquad y_1 = e^{x_1}$$

اذن
$$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

نظرية

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$\ln(1 \times 2)$

$= \ln 1 + \ln 2$

عند [illegible] ضرب داخل ln

البرهان نفرض
$$y = e^{-x}$$

أذن
$$-x = \ln y$$

أي أن
$$x = -\ln y$$

$$x = \ln\frac{1}{y}$$

عند [illegible]

$$\ln\frac{x^5}{\sin x} = \ln x^5 - \ln \sin x$$

أذن $$e^x = \frac{1}{y}$$

او $$y = \frac{1}{e^x}$$

أي ان $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

ملاحظة

(1) للتخلص من اللوغاريتم في معادلة ما نأخذ الدالة الاسية لطرفي المعادلة .

(2) للتخلص من الدالة الاسية في معادلة ما نأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة.

مثال جد y اذا كانت

(i) $$\ln(y\text{-}1) - \ln y = 2x$$

(ii) $$e^{5y} - 3 = \sin x$$

(iii) $$\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \cos x$$

(iv) $$e^{(x+1)} e^{x^2} = e^y$$

الحل

(i) $$\ln(y\text{-}1) - \ln y = 2x$$

اذن $$\ln\frac{y-1}{y} = 2x$$

باخذ الدالة الاسية لطرفي المعادلة نحصل على :

$$e^{\ln\frac{y-1}{y}} = e^{2x}$$

$$\frac{y-1}{y} = e^{2x}$$

$$y - ye^{2x} = 1$$

$$y(1 - e^{2x}) = 1$$

اذن
$$y = \frac{1}{1-e^{2x}}$$

(ii)
$$e^{5y} - 3 = \sin x$$

باخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة نحصل على

$$\ln e^{5y} = \ln(\sin x + 3)$$
$$5y = \ln(\sin x + 3)$$
$$y = \frac{1}{5}\ln(\sin x + 3)$$

(iii)
$$\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \cos x$$
$$\ln\frac{y^2-1}{y+1} = \cos x$$

باخذ e الطرفين
$$e^{\ln\frac{y^2-1}{y+1}} = e^{\cos}$$
$$\frac{y^2-1}{y+1} = e^{\cos x}$$

اذن
$$y - 1 = e^{\cos x}$$
$$y = e^{\cos x} + 1$$

(iv)
$$e^{(x+1)}.e^{x^2} = e^y$$
$$e^{(x+1)+x^2} = e^y$$

خذ $\ln$ الطرفين

$$\ln\ e^{x^2+x+1} = \ln\ e^y$$

اذن
$$y = x^2 + x + 1$$

مشتقة e مرفوعة لأي قوة

٨ الدالة x مشتقة الأس e

مثال بسط ما يلي :

(i) $e^{\ln 3 + 2\ln x}$

$$\frac{de}{\ } = e^{x} \cdot \frac{d}{dx}$$

(ii) $e^{\ln x+x}$

(iii) $\ln(e^{-x^2})$

(iv) $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)$

<u>الحل</u>

(i)

$$= e^{\ln 3}.e^{2\ln x}$$
$$= 3e^{\ln x^2}$$
$$= 3x^2$$

(ii)

$$e^{\ln x+x} = e^{\ln x}.e^x$$
$$= x\,e^x$$

(iii)

$$\ln\left(e^{-x^2}\right) = -x^2$$

(iv)

$$\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(e^{-x}\right)$$
$$= -x$$

لقد توضح لنا بان الدالة الاسية e^x هي عكس دالة اللوغاريتم سنستخدم هذه الحقيقة في ايجاد مشتقة الدالة $y = e^x$ وكالاتي

ناخذ لوغاريتم طرفي المعادلة $y = e^x$ نحصل على

$$\ln y = \ln e^x$$

اذن

$$\ln y = x$$

نشتق طرفي هذه المعادلة ضمنيا بالنسبة الى x فنجد

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = 1$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = y$$

أي ان

$$\boxed{\frac{de^x}{dx} = e^x}$$

واذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x وباستخدام قانون السلسلة نحصل على ان

$$\boxed{\frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du} \; \frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}}$$

اذن

$$\boxed{\int e^u du = e^u + c}$$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت

(i) $y = e^{\sin^{-1} x}$

(ii) $y = e^{\sqrt{x}+x}$

(iii) $y = e^x \sqrt{x+1}$

(iv) $y = \cos^{-1}\left(e^{-x}\right)$

(v) $y = e^x + \ln \sin e^x$

(vi) $y = x^x$

الحل

(i)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(e^{\sin^{-1} x}\right)}{dx}$$

$$= e^{\sin^{-1} x} \frac{d\left(\sin^{-1} x\right)}{dx}$$

$$= e^{\sin^{-1} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(e^{\sqrt{x}+x}\right)}{dx} \qquad \text{(ii)}$$

$$=e^{\sqrt{x}+x}\,\frac{d\left(\sqrt{x}+x\right)}{dx}$$

$$=e^{\sqrt{x}+x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(e^{x}\sqrt{x+1}\right)}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

$$=e^{x}\,\frac{d(x+1)^{\frac{1}{2}}}{dx}+\sqrt{x+1}\,\frac{de^{x}}{dx}$$

$$=e^{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+e^{x}\sqrt{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\cos^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)}{dx} \qquad \text{(iv)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{-x}\right)^{2}}}\,\frac{d\left(e^{-x}\right)}{dx}$$

$$=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(e^{x}+\ln\sin\ \ )}{dx} \qquad \text{(v)}$$

$$=\frac{de^{x}}{dx}+\frac{d\left(\ln\sin e^{x}\right)}{dx}$$

$$=e^{x}+\frac{1}{\sin e^{x}}\;\frac{d\left(\sin e^{x}\right)}{dx}$$

$$= e^x + \frac{1}{\sin e^x} \cos e^x \frac{de^x}{dx}$$

$$= e^x + \frac{e^x \cos e^x}{\sin e^x}$$

(vi) ناخذ ln الطرفين

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

نشتق الطرفين

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = x\frac{d\ln x}{dx} + \ln x \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x)$$

مثال جد الت..ملات التالية:

(i) $\int x^2 e^{x^3} dx$

(ii) $\int \sec^2 x e^{\tan x} dx$

(iii) $\int \frac{\ln x}{x \ln 3} dx$

(iv) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

(v) $\int e^{2x} \sin e^{2x} dx$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \text{(vi)}$$

$$\int \frac{1+3e^{3x}}{x+e^{3x}}\,dx \qquad \text{(vii)}$$

<u>الحل</u> (i) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

لو اردنا ان نستخدم طريقة التعويض في حل هذا التكامل لفرضنا بان

$$u = x^3$$

اذن

$$du = 3x^2\,dx$$

$$\frac{1}{3}du = x^2 dx$$

الآن نعوض

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \int e^u \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + c$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

(ii) $\int \sec^2 x e^{\tan x} dx$

لاحظ ان

$$u = \tan x$$

اذن

$$du = \sec^2 x\,dx$$

$$\int \sec^2 x e^{\tan x} dx = \int e^u du$$

$$= e^u + c$$

$$= e^{\tan x} + c$$

(iii) $\int \frac{\ln x}{x \ln 3}\,dx$

لأن ln3 ثابت فنستطيع ان نكتب

$$\int \frac{\ln x}{x \ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3} \int \ln x \frac{1}{x} dx$$

قارن التكامل $\int \ln \frac{1}{x} dx$ مع $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ تجد ان

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$n = 1$$

اذن

$$\int \frac{\ln x}{x \ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3} \int u \; du$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \; \frac{u^{1+1}}{1+1} + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \; \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

(iv) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

اذا فرضنا بان

$$u = \frac{1}{x}$$

اذن.

$$du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$-du = \frac{1}{x2} dx$$

نعوض

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int e^u du$$

$$= -e^u + c$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} + c$$

(v) $\int e^{2x} \sin e^{2x} dx$

نفرض ان

$$u = e^{2x}$$

اذن

$$du = 2e^{2x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}du = e^{2x}dx$$

نعوض

$$\int \sin e^{2x} e^{2x} dx = \int \sin u \left(\frac{1}{2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u \quad du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cos e^{2x} + c$$

(vi) $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

لاحظ بان e^{2x} يمكن كتابتها $\left(e^x\right)^2$ واذا فرضنا ان

$$u = e^x$$

اذن

$$du = e^x dx$$

نعوض

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$$

$$= \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \tan^{-1} u + c$$

$$= \tan^{-1} e^x + c$$

(vii) $$\int \frac{1+3e^{3x}}{x+e^{3x}}dx$$

اذا فرضنا بان

$$u = x + e^{3x}$$

فان

$$du = dx + 3e^{3x}dx$$

$$du = (1+3e^{3x})dx$$

نعوض

$$\int \frac{1+3e^{3x}}{x+e^{3x}}\,dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|x+e^{3x}\right| + c$$

مثال جد المساحة تحت المنحني $y = e^{-x}$ من $x=0$ الى $x=b$

(حيث $b>0$).

الحل المساحة من $x=0$ الى $x=b$ هي

$$A = \int_0^b y \; dx$$

$$= \int_0^b e^{-x} dx$$

$$= -\int_0^b e^{-x}(-dx)$$

$$= -e^{-x}\Big]_0^b$$

$$= -e^{-b} + e^{0}$$

$$= 1 - e^{-b}$$

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية :

$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y}$, $x > \sqrt{3}$ علما ان $y = 0$ عندما $x = 2$

الحل نستطيع ان نفصل المتغير x عن المتغير y اذا ضربنا طرفي المعادلة في e^{y} وكما يلي:

$$e^{y} \; \frac{dy}{dx} = e^{y}.2x \;\; e^{-y}$$

$$= 2x \quad e^{y-y}$$

$$= 2x \quad e^{0}$$

$$= 2x$$

الان نكامل كلا الطرفين بالنسبة الى x فنحصل على

$$e^{y} = x^2 + c$$

نستخدم الشرط الابتدائي لتعين قيمة c

$$e^0 = (2)^2 + c$$

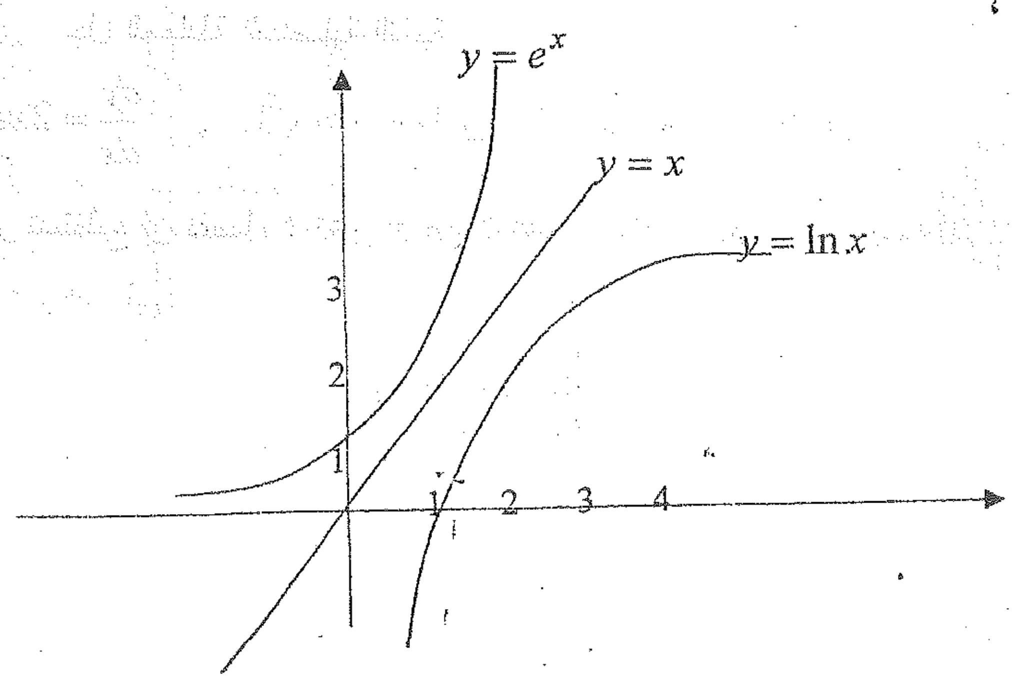
اذن
$$c = -3$$

اذن
$$e^y = x^2 - 3$$

لحل هذه المعادلة ناخذ ln الطرفين

$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3)$$
$$y = \ln(x^2 - 3)$$

ناتي الان الى رسم منحني الدالة $y = e^x$ بالامكان رسم هذا المنحني عن طريق ايجاد المشتقة الاولى والثانية ومن ثم دراسة التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى والتقعرات ونقاط الانقلاب ، او يمكن رسم هذا المنحني من خلال كون الدالة $y = e^x$ عكس الدالة $\ln x$ لذا فمنحني الدالة $y = e^x$ هو المنحني الناتج من انعكاس منحني الدالة $\ln x$ حول المستقيم $y = x$ وكما مبين بالشكل ،



لاحظ بان

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{array}}$$

:

التدريب

(1) بسط ما يلي:

(a) $\ln\left(x^3 e^{-3x}\right)$

(b) $e^{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

(c) $\ln\left(e^{x^3 - x^2}\right)$

(2) احسب $\dfrac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

(a) $y = \dfrac{e^x + x}{x} + \ln\left(e^x\right)$

(b) $y = \sin \ln\left(1 + e^x\right)$

(3) جد $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x+1}}{1 + e^{2x+2}}\, dx$

اسئلة التقويم الذاتي

(1) جد y' لكل ما يلي:

(a) $y = \sec^{-1}\left(e^x\right)$

(b) $y = (1 - 3x)e^{-2x}$

(c) $y = e^{\tan^{-1} \sin x}$

(d) $y = \cos^{-1} e^{2x}$

(e) $y = e^{-x} . e^{x^3}$

(2) احسب التكاملات التالية

(i) $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{x}dx}{1+e^{zx}}$

(ii) $\int_{0}^{1} \frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}$

(iii) $\int_{0}^{1} e^{\ln\sqrt{2x}}\,dx$

(iv) $\int e^{\sec x} \sec x \tan x dx$

$\int \frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)} dx$

الدالة الاسية العامة والدالة اللوغارتمية العامة

The functions a^x and $\log_a^x$

تعرفنا في دراستنا السابقة على الدالة الاسية والتي اساسها العدد e والان سنتعرف على الدالة الاسية ذات الاساس a حيث a عدد موجب .الدالة e^x والدالة $\ln x$ دالتان متعاكستان لذلك

$$a = e^{\ln a}$$

الان نريد ان نرفع العدد a الى أي أس (قوة) وليكن الاس x

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

وهذا يعني بان

$$\ln a^x = x \ln a$$

تعريف اذا كانت $a > 0$ و x أي عدد فان

$$a^x = e^{x \ln a}$$

نستطيع ان نستنتج بان

$$a^{xy} = \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x$$

ولمعرفة مشتقة الدالة a^x نشتق طرفي المعادلة $a^x = e^{x \ln a}$

اذن

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{x \ln a}}{dx}$$

$$= e^{x \ln a} \frac{dx \ln a}{dx}$$

$$= e^{x \ln a} . \ln a$$

($\ln a$ ثابت هنا)

$$= a^x \ln a$$

أي ان

$$\frac{d2^x}{dx} = 2^x \ln 2$$

ان مشتقة الدالة $y = a^x$ موجبة عندما $a > 1$ وسالبة عندما $0 < a < 1$ وبهذا تكون الدالة $y = a^x$ دالة متزايدة الى x عندما $a > 1$ ومن الواضح ان الدالة $y = a^x$ متقابلة لذا فهي تمتلك معكوس .

بالنسبة الى المشتقة الثانية فهي

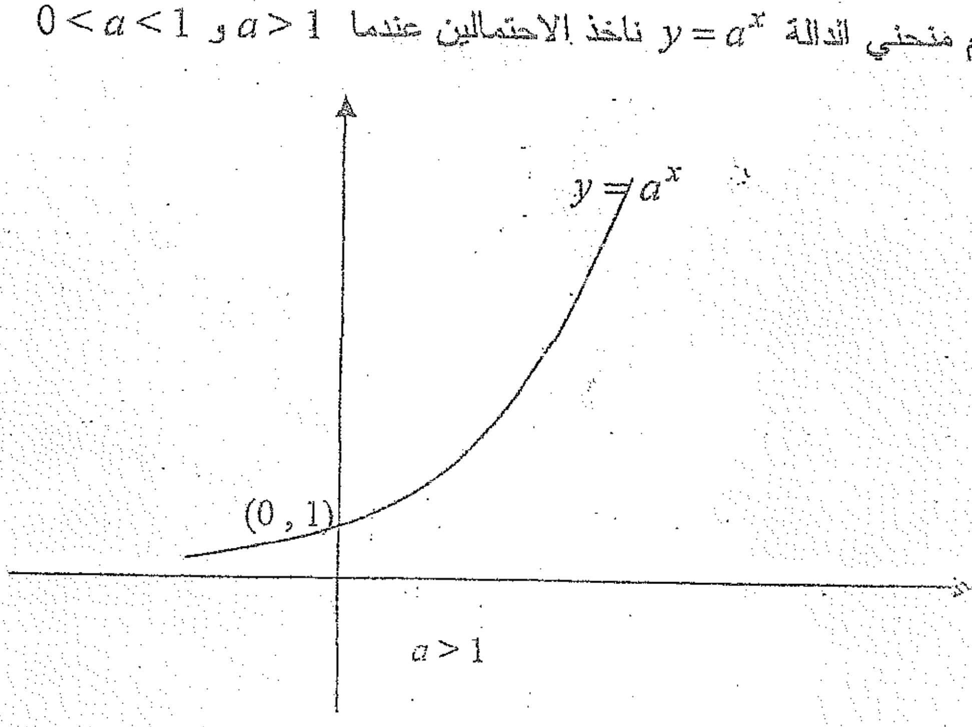
$$y'' = a^x(\ln a)^2$$

واضح ان $y''>0$ وهذا يعني بان منحني الدالة مقعر الى الاعلى كما وان

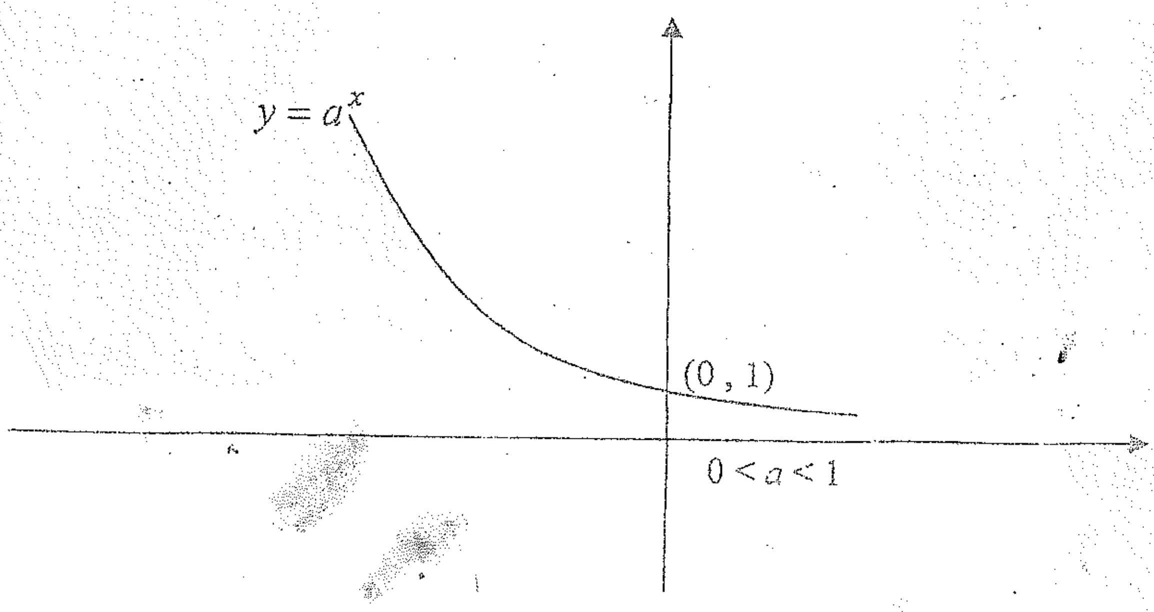
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \;, \quad a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \;, \quad 0<a<1$$

ولرسم منحني الدالة $y=a^x$ ناخذ الاحتمالين عندما $a>1$ و $0<a<1$



$a>1$



$0<a<1$