المنطق الرياضي : هو كتابة العبارات الرياضية في صور رمزية مع وضع قواعد ثابتة سهلة استخدام .

العبارة البسيطة : هي جمل خبرية مفيدة ذات معنى ومدلول تكون اما صادقة او كاذبة ، ولا تكون صادقة وكاذبة في أن واحد .

سوف نرمز للعبارات او نسميها باحد الحروف الصغيرة بالرموز $P,q,r,\ \ldots .\ ,\ etc$

قيم الصدق Truth Values ويطلق على صدق او كذب العبارات ويرمز للعبارة الصادقة(**T**) وللعبارة الكاذبة **(F)**.

مثال

اي من العبارات التالية عبارة .

1- بغداد عاصمة العراق عبارة صادقة

2- $2+1= 7$ عبارة كاذبة

3- الى اين انت ذاهب ؟ هذه جملة استفهامية وليست عبارة

4- لاتلعب بالنار . هذه جملة طلبية وليست عبارة

5- هو لاعب كرة قدم جيد . هو عبارة تعريفية وليست عبارة

6- $X-2$ رموز وارقام وليست عبارة

النفي:

تأمل العبارتين (الجو بارد) (ليس الجو بارد)

نلاحظ انه اذا كانت العبارة الاولى صادقة فأن العبارة الثانية كاذبة ، وبالعكس اذاكانت العبارة الاولى كاذبة فأن العبارة الثانية صادقة ، لذا يقال للعبارة الثانية هينفي العبارة الاولى .

ويرمز عادة **p** ~ (هي نفي العبارة p اية عبارة فأن)

كما مبين :

p	$\sim p$
T	F
F	T

العبارات المركبة:- يمكن ربط عبارتين بأداة ربط لأجل تكلوين عبارة جديدة يطللق عليها عبارة مركبة فالعبارة (يدرس احمد في الصف او في المكتبة) مكونة من العبارة(يدرس احمد فيالصف) او (يدرس احمد في المكتبة) ويطللق على كل من هاتين العبارتين عباارة بسيطة ، ويطلق على العبارة الاصلية عبارة مركبة ، كملا يطللق عللى(أو) اداة ربط وهناك أداة ربط اخرى هي(و) و(أذا كان ... فأن) و (أذا وفقط أذا) ....

العطف او الفصل :

يستعمل الحرف(و) (and)في المنطق لربط عبارتين وتكوين عبارة مركبةواستعماله هنا يختلف قليلا عن استخدامه في الملفة اذ قد لاتكون هنالك صلة بين العبارتين المرتبطتين بالحرف(و)، and (الذي يطلق عليه اداة العطف ويطلق على العبارة المركبة الناتجة من عطف العبارتيين الاصليتين ويرمز عادة الى اداة العطف (و)ب ((∧)) وتكون عبارة العطف هنا صاادقة في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون العبارتان الاصليتان المكونتان لهما صادقتين وفيما عدا ذلك تكون كاذبة.

اذا كانت كل من p ، q عبارات فأن ($P \wedge q$) هي عطف العبارتين, (p وq).

وتوضح هذه الحالات في جدول يطلق عليه جدول صدق العبارة المركبةTruth table المبين في ادناه ، حيث تمثل T كلمة صادقة Truth و F كلمة كاذبة Falsep .

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال: (العبارة المركبة)

1-تقع بغداد على نهر دجلة و - 3 < 5 — صادقة لان كل من العبارتيين صادقتين.

2- تقع بغداد على نهر دجلة و - 3 = 5 — كاذبة لان الاولى صادقة والثانية كاذبة.

3- تقع بغداد على نهر النيل و - 3 < 5 — كاذبة لان الاولى كاذبة والثانية صادقة .

4- تقع بغداد على نهر النيل و - 3 = 5 — كاذبة لان كلا العبارتين كاذبتين.

الانفصال:

تستعمل اداة العطف التفصلية (او)،(or) في المنطق لربط عبارتين وتكوين عبارة مركبة جديدة تدعى انفصال العبارتين الاصليتين ويرمز لها ($\vee$) وعلى هذا الاساس تكون العبارات المركبة ($p \vee q$) التي تقرأ(p أو q) وتكون كاذبة في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون p,q كاذبة وهكذا يكون جدول صدق العبارات المركبة كما في الجدول الاتي :-

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

القضايا وجداول الصدق:

بأستعمال ادوات الربط المنطقية الانفة الذكر ($\sim$ ، $\vee$ ، $\wedge$)كذلك التي سوف يرد ذكرها لاحقا تكون من العبارات

r,q,p عبارات مركبة جديدة ، في حالة كون العبارات r,q,p لاحقا تكون من العبارات

متغيرة فيطلق على العبارات المركبة الناتجة قضية ويرمز لها P(p,q,r)

مثال

كون جدول صدق العبارة الاتية :- $\sim(p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

التتلوجي -:(تحصيل حاصل)(صادقة منطقيا)اذا كانت العبارة المركبة صادقة بغض النظر عن صدق مكوناتها فتسمى العبارة (تحصيل حاصل او تتولوجي).

التناقض :-اذا كانت العبارة المركبة كاذبة بغض النظر صدق مكوناتها العبارة تسمى تناقضا أو (كاذبة منطقيا).

مثال :

أثبت ان العبارة الاتية تتولوجي :- $(p\wedge q)\vee \sim(p\wedge q)$

p	q	p∧q	~(p∧q)	(p∧q)v ~(p∧q)
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

نلاحظ في العمود الاخير لجدول ان كل القيم صادقة لذلك يطلق على هذه العبارة تتولوجي

مثال

اثبت ان العبارة الاتية هي تناقض :- $(p\wedge\neg q)\wedge(\sim p\vee q)$

p	q	~q	p∧~q	~p	(~pvq)	(p∧~q)∧(~pvq)
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F

نلاحظ في العمود الاخير لجدول ان كل القيم كاذبة لذلك يطلق على هذه العبارتناقض

العبارة الشرطية:-

اذا كان p,q عبارتين فانه يطلق على العبارة اداة الربط (اذا كان ...فان) ويرمز لها ب $(p \rightarrow q)$ لربط بين اي عبارتين لاجل تكوين عبارة جديدة .ونجد هذه العبارة كاذبة في حالة واحدة فقط $(T,F \rightarrow F)$.

ويكون جدول صدق $(p \rightarrow q)$ كما مبين في الجدول الاتي :

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

عبارة ثنائية الاشتراط:-

اذا كانت p,q عبارتين العبارة(اذا وفقط اذا) ويرمز لها$(p \leftrightarrow q)$ وتكون صادقة عندما تكون العبارتين المرتبطتين صادقتين صادقتين او كاذبتين وتكون كاذبة اذا كانت العبارتين مختلفيتين .

ويكون جدول صدق$(p \leftrightarrow q)$ كما مبين في الجدول الاتي :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

التكافؤالمنطقي:- لتكن P,Q عبارة يقال بأن العبارة P تكافؤ منطقيا العبارة Q اذا وفقط اذا كان جدول صدق P هونفسه جدول صدق Q وسنعبر عن ذلك بلرمز $(Q \equiv P)$

مثال:- باستخدام جدول الصدق أثبت أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Homework

باستخدام جدول الصدق جد نواتج العبارات الاتية:-

1. $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$.
2. $p\wedge(\sim q\vee r)$.
3. $\sim(p\wedge\sim q)$.
4. $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$.
5. $\sim p\vee(p\vee q)$.

باستخدام جدول الصدق، اثبت ان :-

6. $p\rightarrow q\equiv\sim p\underline{\vee q}$
7. $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$
8. $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]\equiv(p\leftrightarrow q)$

جبر العبارات

لتكن العبارات الجزئية العشوائية p,q,r .فالتطبيقات التالية الموجودة في الجدول الاتي هي قولنين جبرية يمكن الوصول اليها باستخدام جدول الصدق.

1) قوانين الإبدال $a)\ p \vee q \equiv q \vee p$ $b)\ p \wedge q \equiv q \wedge p$	5) قوانين المحايد $a)\ p \vee T \equiv T \quad b)\ p \vee F \equiv p$ $c)\ p \wedge F \equiv F \quad d)\ p \wedge T \equiv p$
2) قوانين التجميع $a)\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $b)\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	6) قوانين المتمم $a)\ p \vee \neg p \equiv T \quad b)\ p \wedge \neg p \equiv F$ $c)\ \neg T \equiv F \quad c)\ \neg F \equiv T$
3) قوانين التوزيع $a)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $b) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	7) قانون متمم المتمم $\neg\neg p \equiv p$
4) قوانين اللانمو $a)\ p \vee p \equiv p$ $b)\ p \wedge p \equiv p$	**8) قوانين دي مورجان** $a)\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $b)\ \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

مثال

باستخدام جدول الصدق برهن قانون التجميع(2a) .

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

نلاحظ ان قيم صدق $(p\vee q)\vee r$ الموجودة في العمود الخامس وقيم صدق في العمود السابع $p\vee(q\vee r)$ متطابقة اذن نستنتج ان :-

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

مثال

باستخدام جدول الصدق بين ان:- $(p\wedge q)\vee p \equiv p$

(قانون الامتصاص)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ ان العمود الاول (p) مطابق للعمود الاخير $(p\wedge q)\vee p$

مثال:- باستخدام قوانين جبر العبارات بين ما يلي:-

1. $\sim p\wedge\sim q$
2. $\sim(\sim p\wedge\sim q)$
3. $(p\vee q)\wedge\sim p$
4. $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$

الحل:-

1. $\sim p\wedge\sim q \equiv\sim(p\vee q)$ (قانون دي مورغان).
2. $\sim(\sim p\wedge\sim q) \equiv\sim\sim p\vee\sim\sim q$ (قانون دي مورغان).
   $\equiv(p\vee q)$ (قانون متمم المتمم).

3. $(p\vee q)\wedge\sim p \equiv(p\wedge\sim p)\vee(q\wedge\sim p)$ (قانون التوزيع)
   $\equiv F\vee(q\wedge\sim p)$ α (قانون المتمم).
   $\equiv F\vee p\equiv p$ (قانون المحايد).

4. $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$ (قانون دي مورغان).
$\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee q)$ (قانون التوزيع)
$\equiv(\sim p\wedge t)$ (قانون المحايد).
$\equiv\sim p$

قوانين المتمم

مثال:- أثبت ان :- $(p\vee q)\wedge p\equiv p$ باستخدام جدول الصدق

a) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p$

الحل:

(a

السبب		مراحل الحل
قانون دي مورجان	$(8a)$	$\neg(p\vee q)\vee(\neg p\wedge q)\equiv(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$
قانون التوزيع	$(3b)$	$\equiv\neg p\wedge(\neg q\vee q)$
قانون المتمم	$(6a)$	$\equiv\neg p\wedge T$
قانون المحايد	$(5d)$	$\equiv\neg p$

b) $\{(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)\}\vee q\equiv T$

(b

السبب		مراحل الحل
قانون التوزيع	$(3a)$	$\{(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\}\vee q\equiv\{\neg q\vee(p\wedge\neg p)\}\vee q$
قانون المتمم	$(6b)$	$\equiv\{\neg q\vee F\}\vee q$
قانون المحايد	$(5b)$	$\equiv\neg q\vee q$
قانون المتمم	$(6a)$	$\equiv T$

المحاورات:-

المحاورة او المجادلة او التعليل المنطقي لتكن $S_1,S_2,S_3,\ldots..S_n$ مجموعة من العبارات ولتكن s عبارة ممكن استنتاجها من $S_1,S_2,S_3,\ldots..S_n$ وتسمى هذه العبارات المقدمات او الفرضيات و(s) تسمى نتيجة ونرمز لمجادلة $\{S1, S2, S3, \ldots.Sn\}$.

مثال :-

بين فيما اذا كانت المحاورة الاتية شرعية لتكن العبارة

اذا كان سالم غنيا فانه سعيد......$S1$

وسالم سعيد ......$S2$ لذلك لأن سالم غني....S

الحل:- نحول العبارة اللفظية الى رمزية

نفرض سالم غني = P ، نفرض سالم سعيد= q

$$\{(p \to q) \land q\} \to p$$

p	q	$p \to q$	$(p \to q)\land q$	$\{(p \to q) \land q\} \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

بما ان السطر الثالث يحتوي على F اذن العبارة ليست تتلوجي (المحاورة غير شرعية).

مثال:-

اذا كان سالم غنيا فانه سعيد ..... $S1$ سالم فقير...... $S2$ لذلك سالم غير سعيد..... S

نفرض سالم غني = p ، نفرض سالم سعيد= q

$$\{(p \to q) \wedge \sim p\} \to \sim q$$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim p$	$\{(p \to q) \wedge \sim p\} \to \sim q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

بما ان السطر الثالث يحتوي على F اذن العبارة ليست تتلوجي (المحاورة غير شرعية).

مثال:-

اذا درست فانك لم ترسب هذا العام S1

اذا لم تشاهد برامج التلفزيون غالبا فانك سوف تدرس.... S2

رسبت هذا العام .... S3 اذن لقد شاهدت برامج التلفزيون غالبا.... S

الحل :-

نفرض درست =P، نفرض رسبت هذا العام =q، نفرض شاهد برامج r=T.V

$$[\{(P \to \sim q) \wedge (\sim r \to p)\} \wedge q] \to r$$

∴ العبارة تحتوي على T فقط ∴ العبارة تتلوجي ∴ العبارة شرعية

مثال :-

اذا كان نبيل يسوق سيارة فان عمره لا يقل عن 18 سنة ..... $S1$

نبيل لايسوق سيارة ..... $S2$، عمر نبيل اقل من 18 سنة... S

الحل :-

نفرض نبيل يسوق سيارة =p، نفرض عمر نبيل لايقل عن 18 سنة =q

$$\{(p \to q) \wedge \sim p\} \to \sim q$$

محاورة غير شرعية

علوم رياضيات م ١

الفصل الثاني

(رياضيات)

نظرية المجموعات (set theory)

١-١: المقدمة

يعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الغير قابلة للتعريف اذ ان اية محاولة لتعريف المجموعة تؤدي الى استخدام كلمات مرادفة.

اول من استعمل مجموعة (set) هو العالم الرياضي كانتور (G. Cantor) 1880 اذ لاحظ وجود كلمات مترادفة يكثر استعمالها تعبر عن مفهوم واحد هو «تجمع من الاشياء» لذلك وقع اختياره على كلمة مجموعة لتعبر عن جميع تلك المرادفات ومن ذلك الحين استخدم هذا المفهوم للمجموعة ليكون الاساس في نظرية المجموعات «set theory»

ومن الامثلة على تجمع من الاشياء

م. فريق كرة قدم لاحد الاندية الرياضية.

ب. الاسرة التعليمية لاحدى المدارس.

ج. مجموعة حروف كلمة القران.

اي ان المجموعة عبارة عن تجمع من الاشياء معرف تعريفاً تاماً جيداً «well defined» من اشياء متمايزة (Distincts).

وهذا يعني انه (ليس كل تجمع من الاشياء يحدد مجموعة بالمعنى الرياضي الدقيق). فلا يمكن ان نكون مجموعة بالاعتماد على صفة يكون تقديرها شخصي فيختلف من شخص الى اخر ويختلف باختلاف المكان والزمان.

مثال / هل يمكن اطلاق مفهوم المجموعة (بالمعنى الرياضي الدقيق) عن كل من التجمعات التالية:

م. الشجعان في بلد معين

ب. الجميلات في مدينة معينة.

لا يمكن ذلك لان صفة الشجاعة في (م) هي صفة نسبية يختلف تقديرها من شخص لاخر ومن مكان لاخر وكذلك تختلف من زمان لاخر. وكذلك صفة الجمال في (ب) نسبية ايضاً.

تستخدم الحروف اللاتينية الكبيرة مثل $A, B, X, Y, \ldots$ للدلالة على المجموعات

بينما تستخدم الحروف الصغيرة مثل $a, b, x, y \ldots$ للدلالة على عناصر تلك المجموعات

1

(1 - 2)

يمكن التعبير عن المجموعة باحدى الطرق التالية

١. طريقة القائمة (list method)

يعبر عن المجموعة في هذه الطريقة بذكر جميع عناصرها بين قوسين متوسطين { } مع وضع فارزة بين كل عنصرين متتاليين.

امثلة :

* لتكن A مجموعة حروف كلمة (method) فيمكن التعبير عنها بالطريقة المذكورة كما يلي

$$A = \{m, e, t, h, o, d\}$$

* لتكن X مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن 8

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

2. طريقة القاعدة او الخاصية . (Rule Method)

في هذه الطريقة تعين المجموعة بذكر الخاصية (الصفة) التي تميز عناصرها عن عناصر اية مجموعة اخرى .

مثال/ يمكن كتابة المجموعة A في 1 كما يلي

A = { X : X حرف من حروف كلمة method }

يمكن كتابة المجموعة X كما يلي

X = { X : X عدد صحيح موجب , X < 8 }

ملاحظة :-

1. لا داعي للتكرار عند كتابة عناصر المجموعة مثلاً عند كتابة مجموعة حروف كلمة (Baghdad)

$$B = \{b, a, g, h, d\}$$

٢. ليس لترتيب عناصر المجموعة اي اثر عليها . فيمكن كتابة المجموعة

$$B = \{a, b, d, g, h\}$$

1-3 مفاهيم اساسية : (Principle Concepts)

1-3-1 * اذا كان b عنصر من المجموعة B ، نقول ان b ينتمي الى المجموعة B وتكتب بالشكل التالي : $b \in B$

اما اذا كان العنصر b لا ينتمي للمجموعة B فيكتب بالشكل $b \notin B$

أمثلة : اذا كانت لدينا المجموعات التالية :

1. $X=\{2,9,10\}$
2. $E=\{e:$ عدد صحيح زوجي $e\}$
3. $A_3=\{x: x^2-3x+2=0\}$ $\qquad A_3=\{1,2\}$

لذا فأن $-1\notin A_3$ ، $2\in X$ ، $-3\notin A$ ، $99\notin X$ ، $-204\in E$ ، $83\notin E$

1.3.2 : المجموعة الخالية Empty (or Null) set

تعرف المجموعة الخالية بانها المجموعة التي لا تحتوي على اي عنصر ويرمز لها بالرمز $\emptyset$

امثلة 1. $\emptyset=\{\ \}$

2. $\emptyset=\{x: x\neq x$ ، عدد $x\}$ هذه المجموعة خالية لانه لا يوجد عدد لا يساوي نفسه

3. $\emptyset=\{x: 16<x<16$ ، عدد صحيح $x\}$

1.3.3 : المجموعة الجزئية (sub set)

اذا كان كل من A و B مجموعة ، يقال ان A هي مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كان كل عنصر من A ينتمي الى B . ويعبر عن ذلك كما يلي $A\subseteq B$
ويقال ان B تحتوي المجموعة A او ان المجموعة A محتواة في المجموعة B

ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي

$$A\subseteq B \iff \forall x\in A \Rightarrow x\in B$$

الرموز المستخدمة في التعريف اعلاه تعني ما يلي

الرمز $\iff$ يعني (اذا وفقط اذا ، if and only if ، iff)

الرمز $\Rightarrow$ يعني (يؤدي الى implied to)

الرمز $\forall$ يعني (لكل for every)

ملاحظة / اذا كانت المجموعة A ليست جزئية من B فيكتب ذلك بالشكل $A\not\subseteq B$ ويكون ذلك صحيحاً اذا وجد عنصر واحد في الاقل ينتمي الى المجموعة A ولا ينتمي الى B .

أمثلة: نفرض لدينا المجموعات التالية

$$A_1 = \{7, 18, 19\}$$
$$A_2 = \{20, 19, 18, 7, 80\}$$
$$A_3 = \{19, 20\}$$

فأن $A_1 \subseteq A_2$ ، $A_3 \subseteq A_2$

واذا كانت $A_4 = \{10, 20, 30\}$

فأن $A_4 \nsubseteq A_2$ ، $A_4 \nsubseteq A_1$

1.3.4 المجموعة الجزئية الفعلية proper subset

لتكن A و B مجموعة يقال ان A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B اذا وفقط اذا

1. A مجموعة جزئية من B
2. يوجد على الاقل عنصر واحد في B غير موجود في A ويعبر عن ذلك كالاتي

$$A \subset B$$

مثال / لتكن $A = \{1, 2\}$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\therefore A \subset B$$

ملاحظة

من مفهوم المجموعة الجزئية يمكن استنتاج ما يلي

1. المجموعة الخالية تكون مجموعة جزئية لاية مجموعة معطاة .
2. كل مجموعة تكون مجموعة جزئية لنفسها وهذا يعني اذا كانت لدينا المجموعة A فان $A \subseteq A$.

1.3.5 : المجموعة الشاملة (Universal set)

اذا كانت جميع المجموعات قيد الدراسة مجموعات جزئية من مجموعة معينة وثابته فان هذه المجموعة تسمى بالمجموعات الشاملة ويرمز لها بالرمز (U) .

امثلة / اذا كانت $A = \{a, e, i, o, u\}$

وكانت $B = \{x, y, z\}$

فأن المجموعة الشاملة لهما هي مجموعة حروف اللغة الانكليزية

$$U = \{a, b, c, ----, z\}$$

1.3.6 المجموعات المتساوية (equal sets)

يقال ان المجموعتين A , B متساويتان اذا وفقط اذا احتويا على نفس العناصر وبعبارة اخرى تتساوى المجموعتان A و B اذا كان كل عنصر في A موجود في B وكل عنصر في B موجود في A ويمكن التعبير عن ذلك بما يلي

$$A = B \iff A \subset B \ , \ B \subset A$$

امثلة

1. اذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

وكانت $Y = \{y : 1 \leq y \leq 8 ,$ y عدد صحيح $\}$

فان $X = Y$

2. اذا كانت $A = \{a : a^2 - 3a + 2 = 0 ,$ a عدد صحيح $\}$

$B = \{1, 2\}$

$C = \{2, 2, 1, 1\}$

فأن $A = B = C$

تكون المجموعتان غير متساويتين (A , B) اذا وجد على الاقل عنصر واحد في احد المجموعتين لا ينتمي الى المجموعة الاخرى .

وعندئذ تكتب $A \neq B$

1.3.7 المجموعات المنتهية , المجموعات غير المنتهية (Finite and infinite sets)

يقال للمجموعة A انها منتهية (Finite set) اذا كانت مجموعة خالية او كانت تحتوي على عدد من العناصر يمكن عدها , وفي غير ذلك يقال بأن المجموعة A غير منتهية " infinte set "

امثلة

1. مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن 100 هي منتهية .
2. مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة التي تزيد عن 100 هي غير منتهية .
3. مجموعة النقاط على المستوي غير منتهية .
4. مجموعة المحافظات العراقية منتهية .

ملاحظة / يقال للمجموعة التي تحتوي عنصر واحد فقط انها مجموعة احادية (singleton set)

$A = \{1\}$

1.3.8 مجموعة المجموعات (set of sets)

يقال للمجموعة مثل S بانها مجموعة المجموعات اذا كان كل عنصر من عناصرها على شكل مجموعة

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{7, 10\}$

$A_3 = \{3, 4, 5\}$, $\emptyset = \{\ \}$

$S = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3\}$

نلاحظ ان عناصر المجموعة S عبارة عن مجموعات ايضاً لذا تسمى S بانها مجموعة المجموعات.

1.3.9 مجموعة القوى (power set)

تعرف مجموعة القوى بانها مجموعة المجموعات الجزيئية المشتقة من مجموعة معينة، ولو فرضنا بأن A اية مجموعة فيرمز لمجموعة القوى للمجموعة A بالرمز P(A)، واحياناً بالرمز 2^A ويمكن التعبير عنها رياضياً كمايلي

$$P(A) = \{X : X \subset A\}$$

مثال لتكن $A = \{a, b, c\}$

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

ملاحظات /

1. ان مجموعة القوى لاية مجموعة هي مجموعة المجموعات
2. اذا كان (n) عدد عناصر مجموعة معينة فان (2^n) عناصر مجموعة القوى فيما يخص المجموعة المعطاة.

مثال / نفرض $A = \{6, 30\}$ نلاحظ ان عدد عناصر A هو (2) اي ان $n=2$ لهذا فان عدد عناصر مجموعة القوى بالنسبة للمجموعة A هو $2^2 = 4$ وهي

$$P(A) = \{\emptyset, \{6\}, \{30\}, A\}$$

مبرهنة : اذا كانت $A \subset B$ وكانت $B \subset D$ فان $A \subset D$

البرهان : نفرض ان $a \in A$

بما ان $A \subset B$ بالفرض

فان $a \in B$ (حسب تعريف المجموعة الجزيئية

لكن $B \subset D$ بالفرض

عليه فان $a \in D$ حسب تعريف المجموعة "

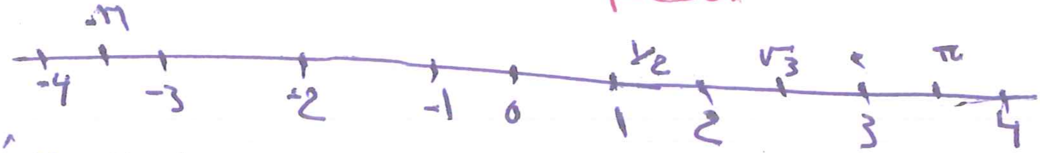
$A \subset D$ " " " "

1-5 مجموعات الاعداد (Set of number)

هناك عدد من المجموعات العددية والتي لها تطبيقات في الرياضيات وعلوم الحاسبات وغيرها في العلوم الاخرى

1-5-1 مجموعة الاعداد الحقيقية (Set of real number)

يمكن تمثيل مجموعة الاعداد الحقيقية على خط مستقيم كنقاط يسمى بالخط الحقيقي (~~Real~~ Real line) وكما يلي



نلاحظ ان العدد (صفر) يقع في منتصف المستقيم الحقيقي وتقع الاعداد السالبة الى اليسار الصفر بينما تقع الاعداد الموجبة على يمين الصفر يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$ ويعبر عنها كما يلي:-

$\mathbb{R} = \{x :$ عدد حقيقي $x\}$

2-5-1 مجموعة الاعداد الصحيحة Integer set

ويرمز لها بالرمز Z وتوصف كما يلي

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

وهي الاعداد التي كل منها يزيد على العدد الذي قبله بواحد وكل عدد فيها لا يحتوي على اي جزء كسري

- اما مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة (Set of positive integer) فيرمز لها بالرمز Z^+ ويعبر عنها كالاتي

$Z^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

اما مجموعة الاعداد السالبة (set of negative integers) فيرمز لها بالرمز Z^- ويعبر عنها

$Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

مثال/ اذا كانت $X=\{a,b\}$, $Y=\{b,c,d\}$

نلاحظ ان المجموعتين X , Y غير قابلتين للمقارنة لان $X \not\subset Y$ وان $Y \not\subset X$

1.3.11 المجموعات المنفصلة (Disjoint sets)

اذا كانت لدينا المجموعتان A , B يقال انهما مجموعتان منفصلتان اذا كان تقاطع كل منهما مجموعة خالية

مثال ليكن

$E=\{x :$ عدد صحيح زوجي $x\}$

$O=\{x$ عدد صحيح فردي $x\}$

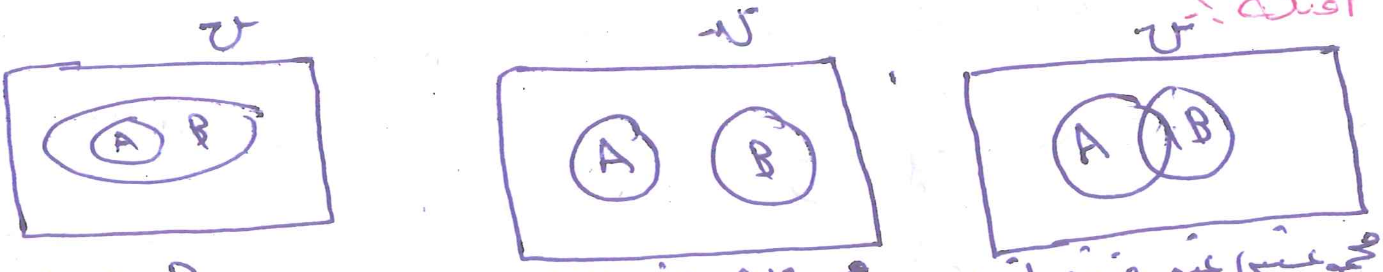
المجموعتان E , O مجموعتان منفصلتان لان

$$E \cap O = \phi$$

1.4 مخططات فين (Venn Diagrams)

يمكن تمثيل عناصر المجموعة بنقاط مستو محاط باحدى المنحنيات المغلقة (closed curves) وقد تستعمل منحنيات مغلقة منتظمة كالدائرة (Circle) والمربع (square) والمستطيل (Rectangle) او اي شكل اخر حتى انه كانت غير منتظمة مغلقة وفي كلتا الحالتين يسمى الشكل بـ (مخطط فين) (venn diagram)

أمثلة:



مجموعتين غير منفصلتين وغير قابلتين للمقارنة

مجموعتان منفصلتان وغير قابلتان للمقارنة

$A \subset B$

- الاعداد الصحيحة الزوجية (set of even integeres) بالرمز E كالاتي

$E = \{x : x = 2y$ عدد صحيح $y\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

- اما مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية (set of odd integers) فيرمز لها بالرمز O ويعبر عنها كالاتي :

$O = \{x : x = 2y + 1$ عدد صحيح $y\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

- اما مجموعة الاعداد الصحيحة الاولية (set of prims integers) يرمز لها بالرمز P ويعبر عنها كالاتي

$P = \{x : x$ عدد اولي $\}$

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, \ldots\}$

(1-5-3) مجموعات الاعداد الطبيعية (natural numbers set)
~~ويعبر عنها كالاتي~~ ويرمز الى مجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز N ويعبر عنها كالاتي

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

(1-5-4) مجموعة الاعداد النسبية (Rational numberes)
ويرمز لها بالرمز Q ويعبر عنها كالاتي

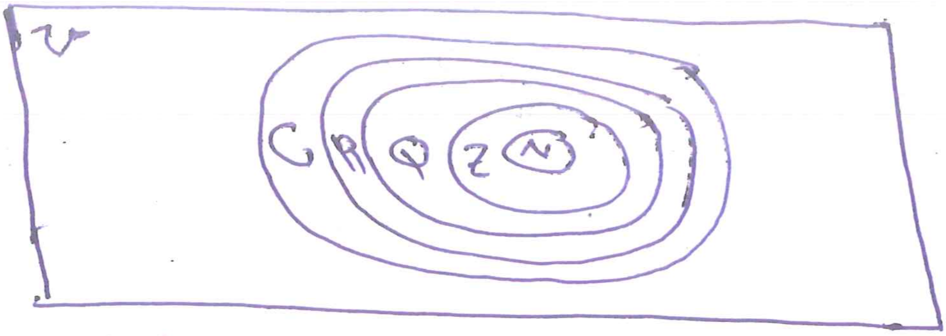
$Q = \{a/b ; b \neq 0, a, b \in Z\}$

(1-5-5) مجموعة الاعداد العقدية (Complex numbers)
ويعرف العدد العقدي G بانه العدد الذي يكتب بالصيغة التالية
$C = x + iy$
حيث ان x, y عددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$
يرمز لمجموعة الاعداد العقدية بالرمز G ويعبر عنها كالاتي

$C = \{G = x + iy : i = \sqrt{-1}, y \in R, x \in R\}$

-5-

يمكننا التعبير عن العلاقات بين المجموعات ~~العددية~~ العددية بمخطط فين كما يلي



(6-5-1) جبر المجموعات (Algebra of sets)

- اتحاد المجموعات (Union of sets)

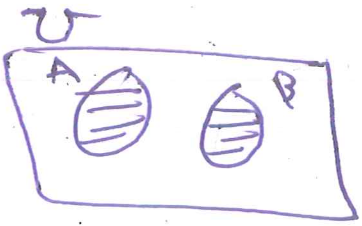
اذا كانت كل من A و B مجموعة فان اتحاد A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او الى B او الى كليهما ويرمز له

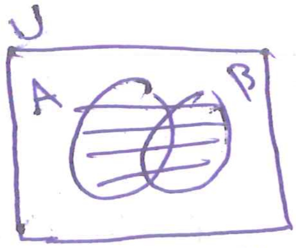
$$A\cup B=\{x : x\in B \text{ or } x\in A\}$$

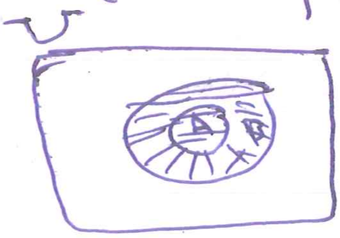
* وهذا يعني

$$x\in A\cup B \Longrightarrow x\in A \vee x\in B$$

يمكن استخدام مخطط فين لتوضيح مفهوم الاتحاد

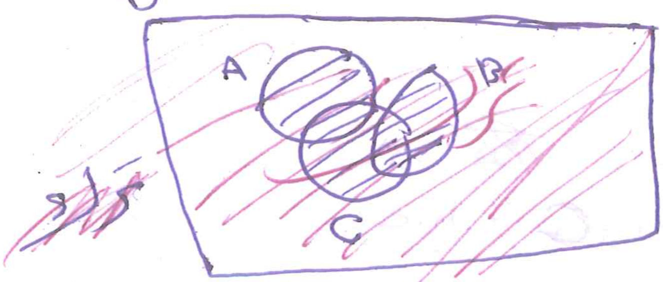




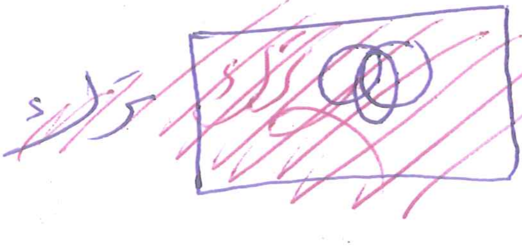


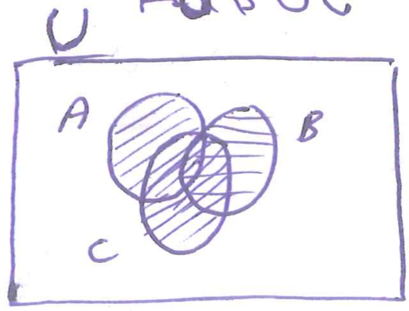
$A\cup B=B$ و if $A\subset B$ الجزء المظلل هو $A\cup B$

اما اذا كانت A و B ، C ثلاث مجموعات يرمز لها $A\cup B\cup C$



مخطط فين لمجموعة الاتحاد $A\cup B\cup C$





وبشكل عام يمكن التعبير اذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ عبارة عن المجموعات
فيمكن التعبير عن اتحاد هذه المجموعات كما يلي
$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

* امثلة
1- لتكن

$$A = \{1, 2, 3, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

*2- لتكن لدينا المجموعات التالية

$$E = \{x : x = 2y, \text{ عدد طبيعي } y\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$
$$O = \{x : x = 2y + 1, y \in N\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$
$$E \cup O = \{x : x \in N\} = \{0, 1, 2, \dots\} = Z^+ \cup \{0\}$$

3- نفرض لدينا المجموعات التالية

$$A_1 = \{x : -8 \leq x \leq 3\}$$
$$A_2 = \{x : 3 < x \leq 10\}$$
$$A_3 = \{x : 1 \leq x < 20\}$$
$$\therefore A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x : -8 \leq x < 20\}$$

مبرهنة (1-5-1)
لتكن كل من B ، A مجموعة فان
1- $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$
2- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

البرهان :- (1) نفرض ان $x \in A$
$\therefore x \in A \cup B$ (حسب تعريف الاتحاد)
$\therefore A \subset A \cup B$ (حسب تعريف المجموعة الجزئية)
نفس الطريقة نبرهن ان $B \subset A \cup B$

برهان 2 واجب

6-

— مبرهنة 2-5-1:

لتكن U مجموعة شاملة للمجموعات الجزئية A, B

1- $A \cup A = A$

2- $A \cup \emptyset = A$

3- $A \cup B = B \cup A$ قانون التبادل (Commutative law)

4- $A \cup U = U$

5- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ قانون التجميع Associative law

— برهان 5 -

نفرض $x \in (A \cup B) \cup C$

$$x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$$

$$\rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

$$\therefore (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \quad \ldots\ldots (1)$$

الآن نفرض

$$x \in A \cup (B \cup C)$$

$$\therefore x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

$$\therefore A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C \quad \ldots (2)$$

من العلاقتين 1, 2 نحصل على

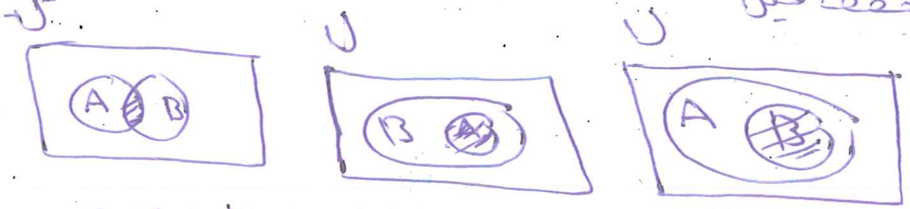
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

تقاطع المجموعات (Intersection of sets)

B, A مجموعتان فان A تقاطع B هو العناصر المشتركة بين المجموعتين

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

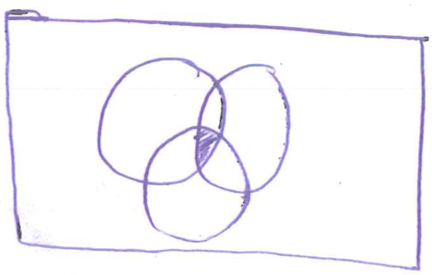
ونمثله بمخطط فين



اذا كانت ثلاث مجموعات C و B و A فان التقاطع يكون

$$A \cap B \cap C$$

ويمثل كما يلي



بشكل عام اذا كانت المجموعات

A_1 و A_2 و ..... و A_n عبارة عن

n من المجموعات فان التقاطع يعبر عنه كما يلي

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

امثلة: لتكن

$A = \{x : x \le 10, x \in N\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

$B = \{x : x \le 10, x \text{ is prime no.}\}$

$\therefore B = \{2, 3, 5, 7\}$

$\therefore A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$

-7-

مثال ١ لتكن $A_1 = \{x : 1 \leq x \leq 8\}$

$A_2 = \{x : -2 \leq x \leq 3\}$

$A_3 = \{x : 0 \leq x \leq 10\}$

$\therefore A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$

مبرهنة / لتكن A, B مجموعتان فأن

١. $A \cap B \subset A$ ، $A \cap B \subset B$

٢: $A \subset B \iff A \cap B = A$

البرهان / ① نفرض ان $x \in A \cap B$

من تعريف التقاطع نحصل على

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore A \cap B \subset A$ (حسب تعريف المجموعة الجزئية)

بنفس الطريقة نبرهن ان $A \cap B \subset B$

الاتجاه الاول $\Longrightarrow$

٢) نفرض ان $A \subset B$ من اجل اثبات $A \cap B = A$

نفرض ان $x \in A$

$x \in A \Rightarrow x \in B$ (بالفرض $A \subset B$ لان)

$\therefore x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$A \subset A \cap B$ --- ①

$\therefore$

$A \cap B \subset A$ --- ② من الفرع ①

$\therefore$ حسب تعريف تساوي المجموعات من العلاقة ① ، ②

نحصل على $\Leftarrow$ $A \cap B = A$

اثبات الاتجاه الثاني (واجب)

*

لتكن A ، B ، C مجموعات فأن

١. $A \cap A = A$ (قانون اللانمو (Idempotent law

٢. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ قانون التجميع

٣. $A \cap B = B \cap A$ قانون التبديل

ب البرهان : الفرع (3)

نفرض ان $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ تعريف التقاطع

$\Rightarrow x \in B \wedge x \in A$

$\Rightarrow x \in (B \cap A)$

$\therefore A \cap B \subset B \cap A$ ---- ①

الان نفرض $y \in B \cap A$

$\Rightarrow y \in B \wedge y \in A$

$\Rightarrow y \in A \wedge y \in B$

$\Rightarrow y \in A \cap B$

$\therefore B \cap A \subset A \cap B$ --- ②

من ① و ② نحصل

$A \cap B = B \cap A$

مبرهنة / لتكن A اي مجموعة فأن

١. $A \cap \phi = \phi$

٢. $A \cap U = A$

البرهان واجب

8

مبرهنة: لتكن A, B, C ثلاث مجموعات فأن

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (توزيع الاتحاد على التقاطع)

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ توزيع التقاطع على الاتحاد

يطلق على هاذين القانونين قانونا التوزيع

غير مطلوب

* البرهان الفرع ① واجب

الفرع ②

نفرض ان $x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

من تعريف المجموعة الجزئية

$\therefore A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ --- ① ∴

وبنفس الطريقة نفرض ان

$y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow y \in (A \cap B) \vee y \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (y \in A \wedge y \in B) \vee (y \in A \wedge y \in C)$

$\Rightarrow y \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$\Rightarrow y \in A \wedge (y \in (B \cup C))$

$\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \in A \cap (B \cup C)$ --- ②

من ① و ② نحصل انه

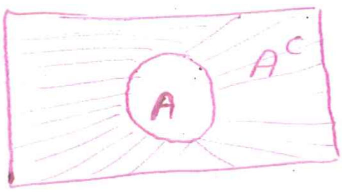
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Complement of aset   المجموعة المتممة لمجموعة

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U نعرف متممة A بأنها المجموعة التي تكون عناصرها من المجموعة الشاملة ولا تنتمي الى A ونرمز لها بالرمز A^c

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

يمكن توضيح ذلك باستخدام اشكال فن كما يلي



مثال

① لتكن $U = \{x : x \text{ is letter in English lang}\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\therefore A^c = \{x : x$ حرف من حروف اللغة الانكليزية بعد الحرف $f\}$

② لتكن المجموعة الشاملة هي

$Z = \{0, \mp 1, \mp 2, ---\}$

$A = \{x : x \geq 3\}$

$A = \{3, 4, 5, ---\}$

$A^c = \{x : x < 3, x \in Z\}$

$A^c = \{---, -3, -1, 0, 1, 2\}$

٩

مبرهنة / لتكن A, B مجموعتان فإذا كانت $A \subset B$
فأن

① $B^c \subset A^c$

② $A \cap B^c = \emptyset$

③ $B \cup A^c = U$

* البرهان : ① نفرض ان $x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin B$ (تعريف المجموعة المتممة)

لكن $A \subset B$

$\therefore x \notin B \Rightarrow x \notin A$

$\Rightarrow x \in A^c$

$\therefore$ كل عنصر في B^c هو عنصر في A^c

$\therefore B^c \subset A^c$

برهان ② , ③ واجب

* مبرهنة / لتكن A اية مجموعة فأن $(A^c)^c = A$

البرهان نفرض ان

$x \in (A^c)^c$

$\Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore (A^c)^c \subset A$ ---①

نفرض

$y \in A$

$y \in A \Rightarrow y \notin A^c \Rightarrow y \in (A^c)^c$

$\therefore A \subset (A^c)^c$ ---②

من العلاقة ① و ② نحصل ان

$(A^c)^c = A$

مبرهنة / لتكن A مجموعة فأن

① $U^c=\phi$

② $\phi^c = U$

③ $A \cap A^c = \phi$

④ $A \cup A^c = U$

* البرهان ① اذا لم تكن $U^c=\phi$

∴ يوجد عنصر مثل x ينتمي الى U^c

$x \in U^c \Rightarrow x \notin U$

لكن لاي مجموعة اذا x ينتمي لتلك المجموعة اولا ينتمي اليها فأن $x \in U$

∴ $x \in U$ ، $x \notin U$ في نفس الوقت وهذا تناقض

∴ $U^c = \phi$

مبرهنة مهمة

قانونا ديمورگن (DeMorgan's law)

اذا كانت كل من A ، B مجموعة فأن

① $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

② $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

البرهان

① نفرض

$x \in (A\cup B)^c$

$x \in (A\cup B)^c \Rightarrow x \notin (A\cup B)$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$

$\Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$

∴ $(A\cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$

-١٥

$A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ لاثبات ان

بالعكس نفرض ان

$y \in A^c \cap B^c$

$y \in A^c \cap B^c \Rightarrow y \in A^c \wedge y \in B^c$

$\Rightarrow y \notin A \wedge y \notin B$

$\Rightarrow y \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow y \in (A \cup B)^c$

$\therefore A^c \cap B^c \subset (A \cup B)$ --- ②

من العلاقة ① و ② نحصل على ان $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

مجموعة الفضلة (الفرق)

Difference set

لتكن كل من A ، B مجموعتان فان مجموعة الفضلة يرمز لها بالرمز

$A - B$ او $A \setminus B$

$A - B = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

ملاحظة/

لازم $A - B = (A \cap B^c)$

*

$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B^c\} = A \cap B^c$

مثال/ برهن ان $A - B = B^c - A^c$

الحل/ يجب ان نبرهن ان ① $A - B \subset B^c - A^c$ ② $B^c - A^c \subset A - B$

حسب تعريف الفضلة

1. let $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A^c \wedge x \in B^c$ حسب تعريف المتممة

$\Rightarrow x \in B^c \wedge x \notin A^c \Rightarrow x \in (B^c - A^c)$ حسب تعريف الفضلة

$\therefore A - B \subset B^c - A^c$

2. let $x \in (B^c - A^c) \Rightarrow x \in B^c \wedge x \notin A^c$

$\Rightarrow x \notin B \wedge x \in A$ تعريف المتممة

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A - B)$.

$\therefore B^c - A^c \subset A - B$

$\therefore A - B = B^c - A^c$

الفصل الثالث

السسسس

العلاقات Relations

تعريف الزوج المرتب (ordered pair)
الزوج المرتب لعنصرين a , b هو عبارة عن ترتيب رياضي للعنصرين مأخوذ بالترتيب a ثم b حيث يسمى a العنصر الاول (المركبة الاولى) للزوج المرتب ويقال لـ b بأنه العنصر الثاني (المركبة الثانية) للزوج المرتب ويرمز له بالرمز (a,b).

ملاحظة: يكون الزوجان المرتبان (a,b) ، (c,d) متساويين اذا $a=c$ و $b=d$.

تعريف: الضرب الديكارتي (الجداء الديكارتي) Cartesian product .
لتكن كل من A و B مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B هو مجموعة جميع الازواج المرتبة (a,b) حيث a ينتمي الى A و b ينتمي الى B ويرمز له بالرمز $A\times B$ ويعبر عن ذلك رياضيا

$$A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\}.$$

مثال: لتكن $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$ جد $A\times B$ ؟

الحل: $A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

خواص الضرب الديكارتي (Properties of Cartesian product)

1- اذا كانت المجموعة A تحتوي m من العناصر والمجموعة B تحتوي n من العناصر فأن عدد عناصر $A\times B$ هو $(m\cdot n)$.

* في المثال اعلاه نلاحظ عدد عناصر ~~A×A~~ A يساوي 3 وعدد عناصر B يساوي 2 فأن عدد عناصر $A\times B$ هو $3\times 2=6$.

2- اذا كانت المجموعتان A و B غير خاليتين وغير متساويتين فأن $A\times B \neq B\times A$.

مثال: لتكن $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3\}$ بين أن $A\times B \neq B\times A$

الحل:
$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$$
$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$
$$\therefore A\times B \neq B\times A$$

3- تكون المجموعتين A و B متساويتين اذا $A\times B=B\times A$.
أي أن ($A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$)

البرهان

$\Rightarrow$ اذا: $A=B$ (معطى)
$$\Rightarrow A\times B=A\times A=B\times A$$
$$\therefore A\times B=B\times A$$

$\Leftarrow$ لاجل اثبات $A=B$

يجب ان نثبت $A\subset B$ و $B\subset A$

① let $a\in A \wedge b\in B \Rightarrow (a,b)\in A\times B$

$\because A\times B=B\times A$ (بالفرض معطى)

$\Rightarrow (a,b)\in B\times A \Rightarrow a\in B \wedge b\in A$ (من تعريف الضرب الديكارتي)
$$\therefore A\subset B$$
$$\therefore B\subset A$$ بنفس الطريقة
$$\therefore A=B$$

④ اذا كانت A أو B هي المجموعة الخالية فأن A x B مجموعة خالية ايضاً.

* eg: $A \times \Phi = \Phi$

let $A \times \Phi \neq \Phi \Rightarrow$ يوجد $\exists (a,b) \in A \times \Phi$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in \Phi$ وهذا تناقض

$\therefore A \times \Phi = \Phi$

* eg $\Phi \times A = \Phi$ (H.W) البرهان بنفس الاسلوب

⑤ حاصل الضرب الديكارتي توزيعي على عملية الاتحاد، اي ان

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

eg: let $A = \{1,2\}$, $B = \{4,5\}$, $C = \{6\}$

prove that $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Sol

$B \cup C = \{4,5,6\}$

$A \times (B \cup C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5)\}$

$A \times C = \{(1,6), (2,6)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (1,6), (2,6)\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

⑥ حاصل الضرب الديكارتي توزيعي بالنسبة لعملية التقاطع اي ان

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

eg: H.W give an example for property ⑥ — H.W اعط مثال على الخاصية ⑥

تعريف: لتكن كل من A و B مجموعة فأن كل مجموعة جزئية من $A\times B$
تسمى علاقة من A الى B (اي ان $R\subseteq A\times B$) حيث يرمز لأي
علاقة من A الى B بالرمز R .

* اذا كان $(a,b)\in R$ فاننا نكتب احياناً aRb ونقرأ a يرتبط
مع b بالعلاقة R . واذا كان $(a,b)\notin R$ فنعبر عن ذلك $a \not R b$
اي ان a لا يرتبط مع b .

* اذا كانت $(A=B)$ فأن R تسمى علاقة على A عند اذن
R تكون مجموعة جزئية من $A\times A$ اي ان $R\subseteq A\times A$.

مثال: اذا كانت $A=\{1,2,\dots,6\}$ و $B=\{3,4,5\}$ وان R معرفة
بالشكل $R=\{(x,y);\ x<y\}$ حيث R علاقة من A الى B .

الحل: $R=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),$
$(3,4),(3,5),(4,5)\}$ نلاحظ ان $(1,3)\in R$ اي ان $1R3$
لكن $(4,3)\notin R$ اي ان $4\not R 3$.

تعريف: لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B . يطلق على
المجموعة B مستقر العلاقة R (Codomain) ويطلق على مجموعة
المساقط الاولى لعناصر R بالمنطلق (Domain) كما يطلق على مجموعة
المساقط الثانية لعناصر R بالمدى (Range) . نلاحظ ان منطلق R
هو مجموعة جزئية من A ومدى R مجموعة جزئية من B .

تعريف
عكس الزوج المرتب: ليكن (a,b) زوجاً مرتباً يطلق على الزوج المرتب (b,a)
أنه عكس الزوج المرتب (a,b) .

تعريف: عكس العلاقة: لتكن R علاقة من A الى B نعرف عكس العلاقة R
أنها العلاقة التي عناصرها عكس الازواج المرتبة في R ونرمز لعكس العلاقة R
بالرمز (R^{-1}) وواضح انه R^{-1} هي علاقة من B الى A اي ان

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B\times A : (a,b) \in A\times B\}.$$

مبرهنة: لتكن R علاقة من A الى B فإن $(R^{-1})^{-1} = R$.

البرهان
يجب ان نبرهن انه ① $(R^{-1})^{-1} \subset R$
② $R \subset (R^{-1})^{-1}$

let $(a,b) \in (R^{-1})^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$
$\Rightarrow (a,b) \in R$
$\therefore (R^{-1})^{-1} \subset R$
$\therefore R \subset (R^{-1})^{-1}$ بنفس الاسلوب H.W
$\therefore (R^{-1})^{-1} = R$.

مبرهنة: لتكن كل من R_1 و R_2 علاقة من A الى B فإذا كانت $R_1 \subseteq R_2$ فإن $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$ ،

proof
let $(a,b) \in R_1^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R_1$ (حسب تعريف عكس العلاقة)
$\Rightarrow (b,a) \in R_2$ ($R_1 \subseteq R_2$ لانه بالفرض)
$\Rightarrow (a,b) \in R_2^{-1}$ (حسب تعريف عكس العلاقة)
$\therefore R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$

مهم *
مبرهنة: اذا كانت R علاقة من A الى B $(R: A\to B)$ فإن
① $\mathrm{Dom}\, R = \mathrm{Rang}\, R^{-1}$ ② $\boxed{\mathrm{Rang}\, R = \mathrm{Dom}\, R^{-1}}$
(بنفس الاسلوب) H.W

البرهان: ① let $x \in \mathrm{Dom}\, R$
$\Rightarrow \exists y \in B \mid (x,y) \in R$
بالعكس باتجاه عكسي $\Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$
$\Rightarrow x \in \mathrm{Rang}\, R^{-1} \Rightarrow \mathrm{Dom}\, R \subset \mathrm{Rang}\, R^{-1}$ -- ①
$\mathrm{Rang}\, R^{-1} \subset \mathrm{Dom}\, R$ --- ②
من ①,② نحصل $\mathrm{Dom}\, R = \mathrm{Rang}\, R^{-1}$

أنواع العلاقات. Types of Relations

١- العلاقة الانعكاسية: لتكن A مجموعة ما، R علاقة على A فتسمى R علاقة انعكاسية على المجموعة A اذا تحقق الشرط الاتي

$$\forall x \in A \rightarrow (x,x) \in R$$

٢- العلاقة المتناظرة: لتكن A مجموعة ما، R علاقة على A فتسمى R علاقة متناظرة على A اذا تحققت الشرط الاتي

$$\text{If } \forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

٣- العلاقة المتعدية: لتكن A مجموعة ما، R علاقة على A فتسمى R علاقة متعدية على A اذا تحقق الشرط الاتي

$$\text{If } \forall (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R.$$

٤- علاقة التكافؤ: لتكن A مجموعة ما و R علاقة على A يقال ان R علاقة تكافؤ اذا كانت R علاقة انعكاسية، متناظرة ومتعدية.

مثال

لتكن $A=\{1,2,3\}$ ولتكن R معرفة بالصيغة

$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,2),(3,3),(2,3)\}$ هل R انعكاسية، متناظرة، متعدية، تكافؤ.

الحل: ① R انعكاسية لانه

$$\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$$

اي ان $1 \in A \Rightarrow (1,1) \in R$ ، $2 \in A \Rightarrow (2,2) \in R$ ، $3 \in A \Rightarrow (3,3) \in R$

② R متناظرة لانه $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

اي ان $(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$ ، $(3,2) \in R \wedge (2,3) \in R$

③ R متعديه لانه $\forall (x,y),(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

اي إن $(1,2),(2,1)\in R \wedge (1,1)\in R$

$(2,3),(3,2)\in R \wedge (2,2)\in R$

④ R علاقه تكافوء لانه R انعكاسيه ومتعديه ومتناظرة .

مثال: لتكن $A=\{1,2,3\}$ ولتكن R معرفه بالصيغه

$$R=\{(1,2),(2,3),(3,3)\}$$

① R ليست انعكاسيه لانه $1\in A$ و $(1,1)\notin R$

② R ليست متناظرة لانه $(1,2)\in R$ لكن $(2,1)\notin R$

③ R ليست متعديه لانه $(1,2)\in R$ و $(2,3)\in R$

لكن $(1,3)\notin R$

④ R ليست تكافوء.

تعريف: صف التكافوء (Equivalence class)

لتكن R علاقه تكافوء على مجموعه A ولكل $a\in A$ نعرف المجموعه $[a]=\{x\in A / (x,a)\in R\}$ ، تدعى المجموعه $[a]$ بأنها صف تكافوء a ويقال للعنصر a أنه ممثل لصف التكافوء $[a]$.

ملاحظه: $[a]\neq\phi$ لانه R علاقه تكافوء اي انه دائماً aRa (لانه R علاقه انعكاسيه) وعليه $a\in[a]$.

ملاحظه: لا يمكن استخراج صفوف التكافوء اذا كانت R ليست علاقه تكافوء.

مثال: لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ و R معرفه على A بالشكل

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$ جد جميع صفوف التكافوء؟

الحل: R علاقه تكافوء (H.W.) ⇐ نستطيع ان نجد صفوف التكافوء وكما يلي

$[1]=\{x\in A/(x,1)\in R\}=\{1,3\}$
$[2]=\{x\in A/(x,2)\in R\}=\{2\}$
$[3]=\{x\in A/(x,3)\in R\}=\{3,1\}$
$[4]=\{x\in A/(x,4)\in R\}=\{4\}$

نلاحظ ان $[1]=[3]$

∴ صفوف التكافؤ هي $[1],[2],[4]$

خواص صفوف التكافؤ (properties of equiv. class)

مبرهنة

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن

① $a\in[a]$

② $(a,b)\in R$ (aRb) اذا $[a]=[b]$.

③ $b\in[a]$ اذا $[a]=[b]$.

④ لكل $a,b\in A$ يكون اما $[a]=[b]$ أو $[a]\cap[b]=\phi$

البرهان:

١- من تعريف صف التكافؤ

$[a]=\{x\in A/(x,a)\in R\}$ ...①

∵ R علاقة تكافؤ ⇐ R علاقة انعكاسية

$\therefore \forall a\in A \Rightarrow (a,a)\in R$ ...②

∴ من ①و② نحصل على $a\in[a]$.

-٢ ⇐ نفرض أن $(a,b)\in R$ ونبرهن $[a]=[b]$.

let $x\in[a] \Rightarrow (x,a)\in R$ / (حسب تعريف صف التكافؤ)

∵ $(a,b)\in R$ (معطى)

∴ $(x,a)\wedge(a,b)\in R \longrightarrow (x,b)\in R$ (لانه R متعدية)