شبكة الابحاث والدرسات الاقتصادية

بحوث العمليات

الجزء الأول
البرمجة الخطية

WWW.RR4EE.N

البـرمجة الخطيـة Linear Programming

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمة كلمة Programming كأداه تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمنشاة من قوة عاملة ومواد أولية الخ لتحقيق اكبر عائد ممكن.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة باسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

وعموماً فان أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعني في حد ذاته البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى. فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فان الهدف عادة يكون الوصول إلى الحد الأدنى وإذا تعلق الأمر بالأرباح فان الهدف يكون هو الوصول إلى الحد الأقصى.

صياغة المشكلة:

المشكلات الامثلية غالبا ما تاتي في صورة كلامية. وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا

النموذج بالاساليب المختلفة. ويمكن اتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي.

1) حدد الكميات التي تحتاج الى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتاخذ الرموز $x1, x2, \ldots, xn$

2) عرف هدف المشكلة وغبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات .

3) حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.

4) اضف الى النموذج الرياضي شرط عدم السالبية(ان جميع المتغيرات يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر).

مثال1:

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون ويكلف 24 جنيه لكل كيلو في حين ان لحم الماعز على 68% لحم و 32% دهون ويكلف 18 جنيه لكل كيلو. ماهي كمية اللحم من كل نوع يجب ان يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم اذا علمت انه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون. بحيث لايذيد عن 25%؟

الحل:

المتغيرات:

نفرض ان وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو = X

نفرض ان وزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو = Y

دالة الهدف:

تصغير $\text{Min } Z = 24X + 18Y$

القيود:

القيد الاول: يحتوي كل كيلو علي $0.20\ X$ من الدهون من لحم البقر و $0.32Y$ من الدهون من لحم الماعز ويجب الا تزيد الدهون في الشطيرة عن 0.25 .

$$0.20\ X + 0.32\ Y \le 0.25$$

القيد الثاني: ويجب ان يكون وزن لحم البقر و لحم الماعز مجتمعين في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد.

$$X + Y = 1$$

القيد الثالث: قيد عدم السالبية

$X \ge 0$ و $Y \ge 0$

النموذج الرياضي:

تصغير $\textbf{Min } Z = 24X + 18Y$

علماً بان: $0.20\ X + 0.32\ Y \le 0.25$

$X + Y = 1$

$X \geq 0$ و $Y \geq 0$

<u>الحل البياني للمثال رقم 1</u>

للحصول علي السم الباني الممثل للمشكلة يتم اتباع الخطوات التالية:

1. *رسم محوري العمودي X والراسيY كا هو موضح بالرسم التالي* ≥

2. *رسم القيود كما يلي:*

القيد الاول :

بفرض ان X= 0 نجد ان Y = 0.78 نحصل على النقطة (0, 0.78)

بفرض ان Y= 0 نجد ان X = 1.25 نحصل على النقطة (1.25, 0)

نوقع النقتطين (0, 0.78) و (1.25, 0) علي الرسم.

القيد الثاني :

بفرض ان X= 0 نجد ان Y = 1 نحصل على النقطة (0, 1)

بفرض ان Y= 0 نجد ان X = 1 نحصل على النقطة (1, 0)

نوقع النقتطين (0, 1) و (1, 0) علي الرسم.

بحل المعادلتين:

$0.20 X + 0.32 Y \leq 0.25$ و $X + Y = 1$

نحصل على:

$$X^* = 7/12 \,,\ Y^* = 5/12$$

بالتعويض في Z نجد ان $Z = 24\,(7/12) + 18(\,5/12) = 21$

مما بعني ان المحال يجب ان يستخدم 7/12من لحم البقر والباقي 5/12 من لحم الماعز وذلك يحقق اقل تكلفة والتي تساوي 21 جنيه للكيلو.

مثال 2

حل البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad \boldsymbol{z} &= 5\boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{Y} \quad \textbf{صغر} \\ \text{s.t.} \quad 2\boldsymbol{X} + 5\boldsymbol{Y} &\geq 10 \\ 4\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} &\geq 12 \\ \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} &\geq 4 \\ \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} &\geq 0 \end{aligned}$$

رسم القيود:

القيد الأول: $4X - Y \geq 12$ بفرض ان $\boldsymbol{Y} = 0$, نجد ان $\boldsymbol{X} = 5$

وعندما نفرض ان $\boldsymbol{X} = 0$ نجد ان $\boldsymbol{Y} = 2$ اذا وصل النقتطين (0,5) و (2,0)

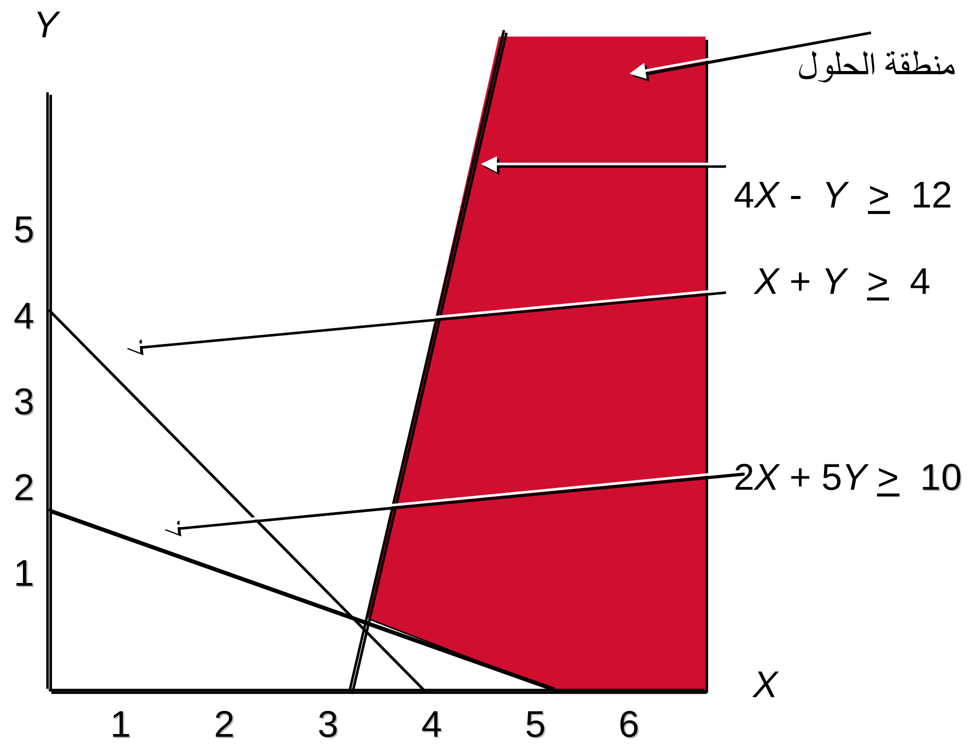
القيد الثاني: $X + Y \geq 4$

بفرض ان $Y = 0,$ نجد ان $X = 3$ وعندما نفرض ان $X = 0$ نجد ان $Y = -12$ والتي ليست على الرسم لذلك لذلك نفرض ان $X = 5$ نجد ان $Y = 8$

اذا وصل النقتطين (3,0) و (5,8)القيد الثالث: $X + Y \geq 4$

بفرض ان $Y = 0,$ نجد ان $X = 4$ وعندما نفرض ان $X = 0$ نجد ان $Y = 4$

إذا وصل النقتطين (0,4) و (4,0)

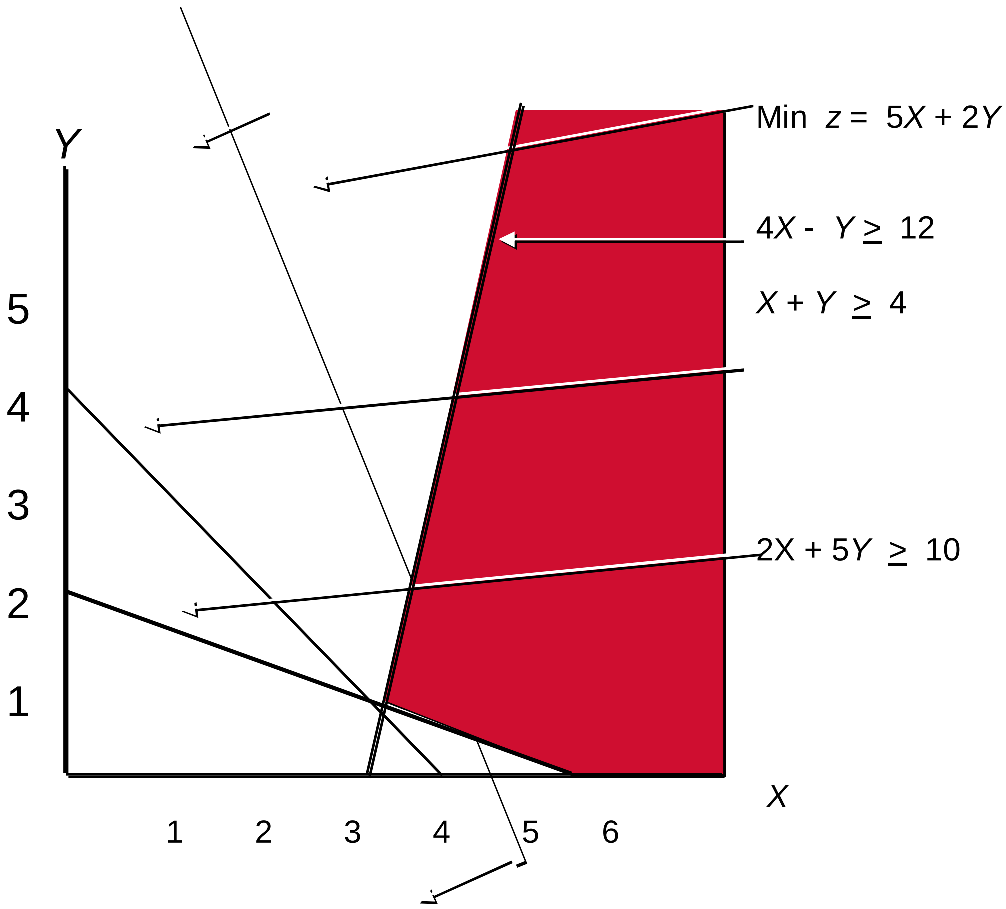


رسم دالة الهدف:

افرض ان دالة الهدف تساوي أي رقم اختياري وليكن 20

اذا $5\boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{Y} = 20,$ عندما $\boldsymbol{X} = 0,$ اذاً $\boldsymbol{Y} = 10$ وعندما $\boldsymbol{Y}= 0,$ اذاً $\boldsymbol{X}$

$=4.$ وصل النقتطين (4,0) و (0,10). حرك دالة الهدف في اتجاة تصغير القيمة حتى تصل إلى أخر نقطة في منطقة الحلول المحددة بأخر قيدين.



حل نقط التقاطع للقيود الحاكمة التي يقع عليها الحل

$X + Y = 4 \qquad , \quad 4X - Y = 12$

بحل المعادلتين السابقتين نجد ان:

$5X = 16$ or $X = 16/5.$

بالتعويض في $X + Y = 4$ نجد ان $Y = 4/5$

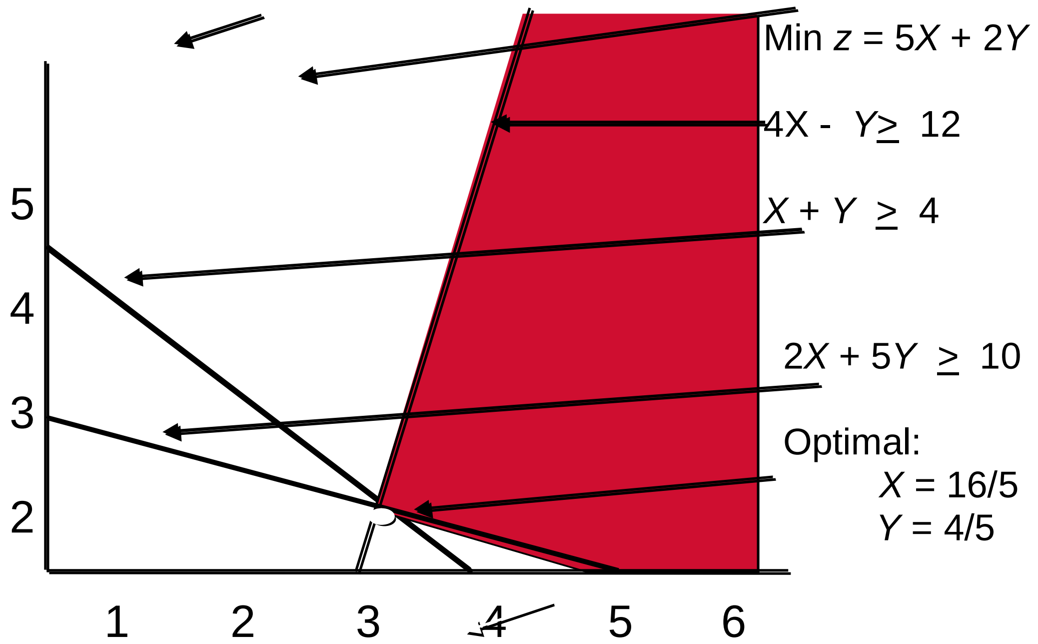
بالتعويض في دالة الهدف كما يلي:

$$z = 5X + 2Y = 5(16/5) + 2(4/5) = 88/5.$$

نجد ان الحل الامثل هو:

$$X = 16/5;\ \ Y = 4/5;\ \ z = 88/5$$

كما هو موضح بالرسم التالي



البرمجة الخطية
باستخدام طريقة السمبلكس
Linear Porogramming Using Simplex Method

نظرا لان طريقة الحل بالرسم البياني لا تصلح لأكثر من اثنين او ثلاث متغيرات وكذلك لو نظرنا الي المشكلات الواقعية نجد ان معظم المشكلات في الواقع العملي تحتوي على العديد من المتغيرات مما يصعب استخدام الطرق البيانية في الحل. ومن ثم استلزم وجود طرق اخري للتعامل مع مثل هذة المشكلات. ومن بين هذه الطرق والتي تصلح للتعامل مع مشكلات البرمجة الخطية طريقة السمبلكس Simplex Method. بالاضافة لصلاحية هذة الطريقة للتعامل مع المشكلات ذات المتغيرات كثيرة العدد فانه يوجد الكثير من برامج الحاسب الالي التي تعمل وفق هذه الطلريقة والتي يمكن ان تستخدم لحل مشاكل البرمجة الخطية ذات الابعاد الكبيرة (عدد كبير من المتغيرات وعدد كبير من القيود) والتى تعطي حلول في اوقات صغيرة جدا وتجيب علي كثير من التسائلات ومن اشهر تلك التسائلات ما يعرف ب ماذا لو what if qustions. وفيما يلي سوف نعرض الخطوات الرئيسية لطريقة السمبلكس.

طريقة السمبلكس

وفيما يلي يمكن اتباع الخطوات التالية للوصول الى الحل الامثل من خلال استخدام طريقة السمبلكس.

1. حدد اعلى قيمة سالبة في الصف السفلي من جدول السمبلكس باستثناء العمود الاخير، ويطلق على العمود الذي تظهر فيه هذة القيمة عمود العمل. في حالة تساوي اكثر من قيمة اختار احداهما.
2. كون نسبا من خلال قسمة القيم الموجبة في عمود العمل علي القيم المناظرة لها في اخر عمود وذلك باستثناء اخر صف. وان لم يوجد قيم موجبة في عمود العمل فان المشكلة ليس لها حل.
3. اختار العنصر الذي ينتمي الي عمود العمل والذي له اقل نسبة (يسمى العنصلر المحوري)
4. استخدم العمليات الاولية لتحويل العنصر المحوري الى واحد صحيح وبقي العمود اصفار.
5. استبدل المتغير x في صف المحور والعمود الاول بالمتغير x في الصف الاول وعمود المحور (عمود المتغيرات الاساسية).
6. كرر الخطوات من 1-5 حتى تحصل على جدول ليس به اعداد سالبة في الصف الاخير باستثناء العمود الاخير.

7. نحصل على الحل الامثل من خلال تخصيص كل في العمود الاخير والمتغير المناظر له في العمود الاول . وباقي المتغيرات تاخذ قيمة صفر. والقيمة المثلي للهدف z^* هي العدد الموجود في الصف الاخير والعمود الاخير وذلك في حالة التعظييم. والقيمة السالبة لهذا العدد في حالة التصغيير.

<u>مثال3</u>

$$\textbf{Max } Z = x_1 + 9x_2 + x_3 \qquad \textbf{تعظيم}$$

علماً بان: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

<u>الحل:</u>

تحويل المتباينات الي الصيغة القياسية كما يالي:

$$\textbf{Max } Z = x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

علماً بان: $x_4 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

تكوين جدول السمبلكس من الصيغة القياسية كما يالي:

		$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	
		1	**9**	**1**	**0**	**0**	
x_4	**0**	1	2*	3	1	0	**9**
x_5	**0**	3	2	2	0	1	**15**
zj-cj		-1	-9	-1	0	0	**0**

لحساب الصف الاخير من الجدول السابق يمكن تطبيف مايلي:

Zj= حاصل ضرب قيم العمود الثاني في القيم المناظرة لها في باقي الاعمدة ثم جمع حاصل الضرب لجميع قيم العمود.

zj-cj = القيم المحسوبة سابقاً – القيمة المناظرة للعمود في الصف الاول.

اختيار العمود المحوري يكون العمود x_2 نظرا لانه صاحب اكبر قيمة

اختيار الصف المحوري بقسمة جميع قيم العمود الاخير على قيم العمود المحوري الموجبة وذلك لتكوين النسب كمايلي: 9/2 , 15/2

اختيار اقل نسبة ليكون وهي 9/2 والتي تنتمي الي العنصر 2 الموضح ب * في الجدول السابق

انشاء الجدول التالي باستخدام العمليات الاولية بتطبيق الخطوة 4 و 5 لنحصل على الجدول التالي:

		$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	
		1	**9**	**1**	**0**	**0**	
x_2	9	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	0	2	0	-1	-1	1	6
zj-cj		7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

نظرا لان الصف الاخير في الجدول السابق كله قيم موجبة فانه يدل على اننا قد وصلنا الى الحل الامثل وهو كما يلي:

$x^*_2 = 9/2$, $x^*_1 = x^*_3 = x^*_4 = x^*_5 = 0$,

وذلك يعطي ربح اجمالي 81/2 جنيه.

تطبيق على الحاسب الآلي

Computer Applications

تخطيط الإنتاج لمنتج واحد

تلقى أحد مصانع السيارات طلبا بستة أتوبيسات ذات الدورين، على أن يقوم بتسليم اثنين في كل مرة خلال الثلاثة اشهر التالية. يتم تسليم الأتوبيسات للعميل في نهاية نفس شهر التجميع ، أو تخزينه لدى الشركة بتكلفة 3000 دولار في الشهر لكل أتوبيس لتوريدها خلال الشهر التالي . لا يوجد مخزون حالي لدى الصانع من هذه الأتوبيسات. ولا يرغب في وجود مخزون في نهاية المدة بعد استكمال العرض.

	الأشهر		
	1	**2**	**3**
الطاقة الإنتاجية العادية بالوحدة	**10**	**20**	**30**
الطاقة الإنتاجية الإضافية بالوحدة	**20**	**20**	**20**
تكلفة الإنتاج العادية 1000 دولار للوحدة	**35**	**43**	**40**
تكلفة الإنتاج الإضافية 1000 دولار للوحدة	**39**	**47**	**45**

للتعامل مع مثل هذه المشكلة يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية التالي كما يلي:

نفرض أن X_{ij} يمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها في الشهر i لتوريدها في الشهر j بالطاقة العادية.

نفرض أن Y_{ij} يمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها في الشهر i لتوريدها في الشهر j بالطاقة الإضافية.

النموذج الرياضي لتخطيط الإنتاج لمنتج واحد

دالة الهدف:

الوصول إلى خطة إنتاج للأتوبيسات المتعاقد عليها بأقل تكلفة (تكلفة تصنيع + تكلفة تخزين) ممكنة .

$$\text{Min } Z = 35\ X_{11} + (35+3)\ X_{12} + (35+6)\ X_{13} + 43\ X_{22} + (43+3)\ X_{23} + 40\ X_{33} + 39Y_{11} + (39+3)\ Y_{12} + (39+6)\ Y_{13} + 47\ Y_{22} + (47+3)\ Y_{23} + 45Y_{33}$$

$$\text{Min } Z = (35\ X_{11} + 38\ X_{12} + 41\ X_{13} + 43\ X_{22} + 46\ X_{23} + 40\ X_{33}) + (39Y_{11} + 42Y_{12} + 45\ Y_{13} + 47\ Y_{22} + 50\ Y_{23} + 45\ Y_{33})$$

قيود الطاقات الإنتاجية العادية

الشهر الأول $\quad X_{11} + X_{12} + X_{13} \quad <= 10$

الشهر الثاني <= 20 $X_{22} + X_{23}$

الشهر الثالث <= 30 X_{33}

قيود الطاقات الإنتاجية الإضافية

الشهر الأول <= 20 $Y_{11} + Y_{12} + Y_{13}$

الشهر الثاني <= 20 $Y_{22} + Y_{23}$

الشهر الثالث <= 20 Y_{33}

قيود التوريد

الشهر الأول >= 20 $X_{11} + Y_{11}$

الشهر الثاني >= 20 $X_{12} + Y_{12} + X_{22} + Y_{22}$

الشهر الثالث >= 20 $X_{13} + Y_{13} + X_{23} + Y_{23} + X_{33} + Y_{33}$

قيود عدم السلبية

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{23}, X_{33}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{33} >= 0$$

جميع الكميات اكبر من أو تساوي الصفر (يقوم الحاسب بوضع هذا القيد)

<u>حل النموذج الرياضي</u>

وباستخدام الحاسب الآلي يمكن أن يحل هذا النموذج الرياضي للحصول على الخطة الإنتاجية التي تحقق اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود المفروضة كالتالي:

$$\mathbf{X_{11} = 10\ ,\ Y_{11} = 10\ ,\ Y_{12} = 10\ ,\ X_{22} = 10\ ,\ X_{33} = 20}$$

بتكلفة إجمالية (2390 ألف دولار)

ويمكن تلخيص خطة الإنتاج فيما يلي:

إنتاج عدد ثلاثون سياراة في الشهر الأول للوفاء بتوريد الشهر الأول وتخزين 10سيارات للشهر الثاني وذلك على النحو التالي:

عدد 10 سيارات بالطاقة العادية،

عدد 20 سيارة بالطاقة الإضافية.

إنتاج 10سيارات في الشهر الثاني بالطاقة العادية.

إنتاج عدد 20 سيارة في الشهر الثالث بالطاقة العادية.

مشاكل التخصيص

Assignment Problems

تتضمن مشكلة التخصيص جدولة العاملين فردا فردا ومن المفترض ان يكون عدد العاملين مساويا عدد الأعمال ويجب ضمان هذا الشرط بإضافة عاملين وهميين او عمل إضافية عند الحاجة من اجل المحافظة على هذا الشرط.
ويكون الزمن (التكاليف ....) cijاللازم للعامل رقم i لإتمام العمل رقم j معروفاً ومن ثم يكون الهدف هو تخصيص العمال على الأعمال بحيث تتم إجمالي الأعمال في اقل وقت ممكن.

الأعمال

		1	**2**	**3**	**. . .**	**n**
	1	C11	C12	C13	. . .	C1n
	2	C21	C22	C23	. . .	C2n
العمال	**3**	C31	C32	C33	. . .	C3n
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	n	Cn1	Cn2	Cn3	. . .	Cnn

خطوات الحل:

1. اطرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف
2. اطرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود.
3. حدد اذا ما كان يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا يوجد صفريين في نفس العمود او الصف.
4. غط كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط.
5. اطرح اقل عدد غير مغطى من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي)
6. اختار عدد n من الاصفار بحيث لا صفريين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي الاعمال عندهم.
7. احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار.

مثال:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	15	10	25	25	10
	B	1	8	10	20	2
عامل	**C**	8	9	17	20	10
	D	14	10	25	27	15
	E	10	8	25	27	12

الحل:

بطرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف نحصل عل المصفوفة التالية:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	5	0	15	15	0
	B	0	7	9	19	1
عامل	**C**	0	1	9	12	2
	D	4	0	15	17	5
	E	2	0	17	19	4

بطرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود نحصل عل

المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
	A	5	0	6	3	**0**
	B	0	7	**0**	7	1
عامل	**C**	0	1	0	**0**	2
	D	4	**0**	6	5	5
	E	2	0	8	7	4

نلاحظ انه لايوجد عدد n من الاصفار وغير مشتركة في صف او عمود لذا يجب تغطية كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئيسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط انظر المصفوفة التالية:

		ماكينة				
		I	II	III	IV	V
	A	5	0	6	3	**0**
	B	0	7	**0**	7	1
عامل	**C**	0	1	0	**0**	2
	D	4	**0**	6	5	5
	E	2	0	8	7	4

نبحث عن اقل قيمة غي مغطاة وهي (2) اطرحها من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد (2) إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي) فنحصل علي المصفوفة التالية:

ماكينة

عامل		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
	A	5	2	6	3	**0**
	B	0	9	**0**	7	1
	C	0	3	0	**0**	2
	D	2	**0**	4	3	3
	E	0	0	6	5	2

بالنظر الي المصفوفة السابقة نجد انه يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا صفريين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي العمالة عندهم. انظر المصفوفة التالية:

ماكينة

عامل		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
	A	5	2	6	3	**0**
	B	0	9	**0**	7	1
	C	0	3	0	**0**	2
	D	2	**0**	4	3	3
	E	**0**	0	6	5	2

احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار كما يلي:

إجمالي اقل التكلفة = A V + B III+ C IV + D II +E I

= 10 + 10+ 20+ 10+ 10

= 60

تلخيص الحل:

يتم تخصيص العامل A علي الماكينة V

و يتم تخصيص العامل B علي الماكينة III

و يتم تخصيص العامل C علي الماكينة IV

و يتم تخصيص العامل D علي الماكينة II

و يتم تخصيص العامل A علي الماكينة I

بإجمالي اقل التكلفة = 60 جنية.

تمارين على البرمجة الخطية

تمرين:1

شركه تقدم بإنتاج نوعين من هياكل الدرجات النوع ألاول الفاخر والثاني والتي يتم إنتاجها باستخدام نوعين من المواد الخام وهي الألومونيوم والحديد وكان ربح الوحدة من الهياكل الفاخرة يقدم بمقدار 10ج ، والثاني لهياكل الدراجات المحترفين بقدر 15ج.

	الألومونيوم	الحديد
الهياكل الفاخرة	2	3
لهياكل الدراجات المحترفين	4	2

ما هو عدد الهياكل التي يجب على الشركة انتاجها علماً بان إجمالي الألومنيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كجم وان إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع ≥ 80 كجم وذلك لتعظيم ربح الشركة. كون النموذج الرياضي للمشكلة

الحل

<u>تمرين 2:</u>

استخدم طريقة الرسم البياني لحل المشكلة بالتمرين السابق

<u>تمرين 3:</u>

استخدم طريقة السمبلكس لحل المشكلة التالية:

تعظيم $\textbf{Max}\ Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3$

علماً بان: $x_1 + 2x_2 + 3\,x_3 \leq 18$

$$6\,x_1 + 4x_2 + 4\,x_3 \leq 30$$

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\ \geq\ 0$$

<u>تمرين 4:</u>

استخدم طريقة الرسم البياني لحل المشكلة بالتمرين السابق

تمارين على مشاكل التخصيص

تمرين 1

احسب أحسن تخصيص للعمالة على مجموعة الماكينات والذي يحقق اقل تكلف طبقا للمعلومات المتوفرة في المصفوفة التالية:

ماكينة

عامل		M1	M2	M3	M4	M5
	E1	15	10	25	25	10
	E2	14	10	25	27	15
	E3	8	9	17	20	10
	E4	1	8	10	20	2
	E5	10	8	25	27	12

الحل:

تمرين 2

احسب أحسن تخصيص المقاولون على مجموعة المشروعات والذي يحقق اقل تكاليف طبقا للمعلومات المتوفرة في المصفوفة التالية:

مشروع

مقاول

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
C1	15	10	25	25	10
C2	14	10	25	27	15
C3	8	9	17	20	10
C4	1	8	10	20	2
C5	10	8	25	27	12

الحل:
