The History of Mathematics- تاريخ الرياضيات

Book · January 2009

1 author:

Salah A. Mabkhout
Thamar university

تاريخ الرياضيات

إهداء

إلى روح المغفور له بإذن الله

أخي و حبيبي و صديقي

ماهر علي مبخوت

تاريخ الرياضيات

صلاح على مبخوت

قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة ذمار

المحتويات

مقدمة

لماذا ندرس تاريخ العلم و تاريخ الرياضيات على وجه الخصوص ؟ . التراث الإنساني و خاصة العلمي متواصل فهو تراكمي كالبنيان يتكون لبنة فوق لبنة على مر التاريخ , فالفكر البشري كائن ينمو و يتطور . دراسة تاريخ الرياضيات تعيننا على فهم آلية تطور الأفكار الرياضية و بدراسة تاريخ الرياضيات كأننا نعيد اكتشاف الرياضيات على شكل استعراض شريط سينمائي سريع . نطوف على علماء الرياضيات و نتحسس معاناتهم في سبيل خلق الإبداع الرياضي . نتذكر العالم النرويجي آبل الذي كتب مذكراته في الرياضيات الحديثة في السجن قبل ساعتين من إعدامه و لم يتجاوز الثلاثين من عمره . و لا ننسى العالم الفرنسي جالوا الذي قتل في مبارزة و هو في الحادية و العشرين من عمره و لكنه ترك نظرية جالوا المهمة في مجال الزمر . لقد تلاقح الإبداع الرياضي قديماً بين المصريين و البابليين كما تلاقح بين الهنود و العرب ليحمل الغرب مشعل الإبداع الرياضي الآن و ليس لأحد الحق أن يدعى احتكارها أو ملكيتها بل هي نشاط فكري ساهمت فيه البشرية جمعاء عبر مختلف الأزمنة و الأمكنة .

تساءل فيثاغورث عن ماهية الوجود ؟ و يبدو أن فيثاغورث وجد الجواب على ما يدور في خلده فحدده بواسطة العدد . فالأشياء إما أن تكون أعدادا أو أنها تحاكي الأعداد و ليس هنالك اختلاف بين المحاكاة و الذات بالنسبة لفلسفة فيثاغورث العقلانية . كان أقليدس ينتمي إلى المدرسة الفيثاغورثية و عندما سأله أحد مستمعيه عن الفائدة العملية لإحدى النظريات التفت اقليدس إلى عبده و قال (إن هذا الرجل يريد أن يربح من العلم أعطه درهما يا غلام) انطلاقا من شعار الفيثاغورثيين (شكل هندسي و خطوة و ليس شكل هندسي و درهم) . يعتبر اقليدس الهندسة نظاما مغلقا من الجدل المنطقي لا يتطلب إدخال أمر يتعلق بالتجربة الإنسانية و لا يعني إلا بالحتمية التي ترافق اكتشاف الحقيقة . ليس هناك مكان أو لحظة في التاريخ يمكن القول هنا و الآن بدأ علم الحساب إذ كان

الناس يعِدُّون مثلما كانوا يتكلمون . لعل أهم ابتكار أنجزه العلماء العرب كان في مجال كتابة الأعداد بحيث تحدد الخانة التي يقع فيها الرقم آحاد أم عشرات و هكذا تطلبت الطريق العربية ابتكار الصفر و الذي قاد إلى طفرة نوعية في الرياضيات . الرياضيات هي دراسة النماذج البنيوية و التغير و الفراغ و دراسة الشكل و العدد . تعتبر الرياضيات امتداد مبسط للقراءة و الكتابة يستخدم نحو و مفردات بشكل مختصر دقيق و مفيد في وصف الطبيعة .

تتعلق فلسفة الرياضيات باليقين الرياضي و ما مداه ؟ و ما مدى حدود الرياضيات ؟ و هل نكتشف الرياضيات فقط أم نبدعها في عقولنا لتصبح فاعلة و مؤثرة في الكون ؟ . السؤال المركزي في فلسفة الرياضيات : ما هي الأسس الأولية بحيث تصبح المقولات الرياضية صحيحة ؟ و أي فرع من الرياضيات هو الأصل الذي تفرعت منه و انبثقت بقية فروع الرياضيات ؟ هل الرياضيات منطق أم حدس ؟ لغة أم فكر ؟ . تفيد الحدسية بأن الرياضيات هي تركيب ذهني بحت و إبداع عقلي حر لا يعتمد البتة على اللغة أو المنطق و أن الرياضيات في جوهرها نشاط عقلي لا لغوي , و تفصل الحدسية الرياضيات فصلا كاملا عن لغة الرياضيات . برهن الفيلسوف الرياضي جوديل بأن علم الحساب نظام رياضي غير مكتمل و لعمري ما الذي يبقى صحيح و مكتمل إذا لم تكن الرياضيات ؟ السؤال الأخير ما هي حقيقة وجود الأشياء أو الكينونات الرياضية ؟ يبقى مثار جدل فلسفي .

المؤلف

1 يناير 2009 م

الباب الأول

الحساب في الحضارات القديمة

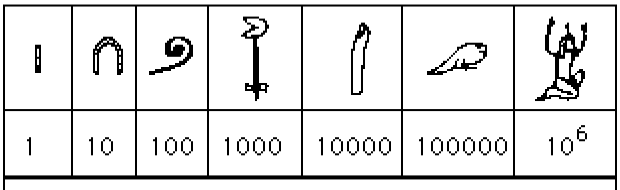
للحيوانات إحساس فطري بالعدد , و هذا يعني أنهم يعرفون من الخبرة الفرق بين عدد الأشياء . عندما تم أخذ بيضة كل يوم سراً من عش طائر الزقزاق , أصرت الأم على أن تبيض كل يوم بيضة إضافية ليعود عدد البيض إلى ما كان عليه . إلا أن إدراك الحيوانات للعدد مرتبط بحاجياتها الضرورية و لا يتجاوز العدد خمسة أو ستة , و ذلك لأن الحيوانات غير قادرة على التفكير المجرد .
ميلاد فكرة الأرقام تضرب بقدمها فيما وراء حقب التاريخ الغابرة . و هذا يجعل من العسير اقتفاء ما تبقي من مخلفات تلك العصور من أدلة تعيننا على تحسس بداية ابتكار الإنسان لفكرة الأرقام و عملية الحساب . أسلافنا القدماء منذ 200000 سنة مضت استشعروا الحاجة الماسة لتعداد المواشي و مرور الأيام .
نشوء عملية الحساب و ظهور الأرقام المقروءة و رموزها المكتوبة , تم تدريجياً ببطء دون إمكانية تحديد دقيق لمراحل تطوره . لا توجد ثقافة مهما كانت بدائية إلا و عندها قدر من الإلمام بالأعداد مثل ملكة التمييز بين 1 و 2 . بعض القبائل الأصلية في أستراليا , مثلاً , لم تزل حتى الآن لا تستطيع العد لأكثر من 2 و لا يوجد في قاموسها اللغوي المفردة ثلاثة و تجمع ما فوق ذلك , كأن تقول بقرة و بقرتان و بقر . القبائل الهندية التي تعيش على ضفاف نهر الأمازون و روافده تفتقر إلى كلمات لتعبر بها عن الأرقام , إلا أنهم أفضل حالاً من القبائل الأسترالية الأصلية إذ يستطيعون العد حتى العدد ستة دون أن تكون لهم أرقام مستقلة للثلاثة , الأربعة , الخمسة و الستة . مثلاً , يقول عن الثلاثة : (اثنان – واحد) و عن الأربعة : (اثنان – اثنان) و هكذا . أيضاً نجد قبائل البشمن الأقزام في جنوب أفريقيا بنفس المنوال قادرين على العد حتى 10 (2+2+2+2+2) . هذه القبائل البدائية لا تستطيع أن تقايض , مثلاً , بقرتان

بأربعة خنازير دفعة واحدة و لكن يقايض بقرة بخنزيرين ثم البقرة الأخرى بخنزيرين آخرين .

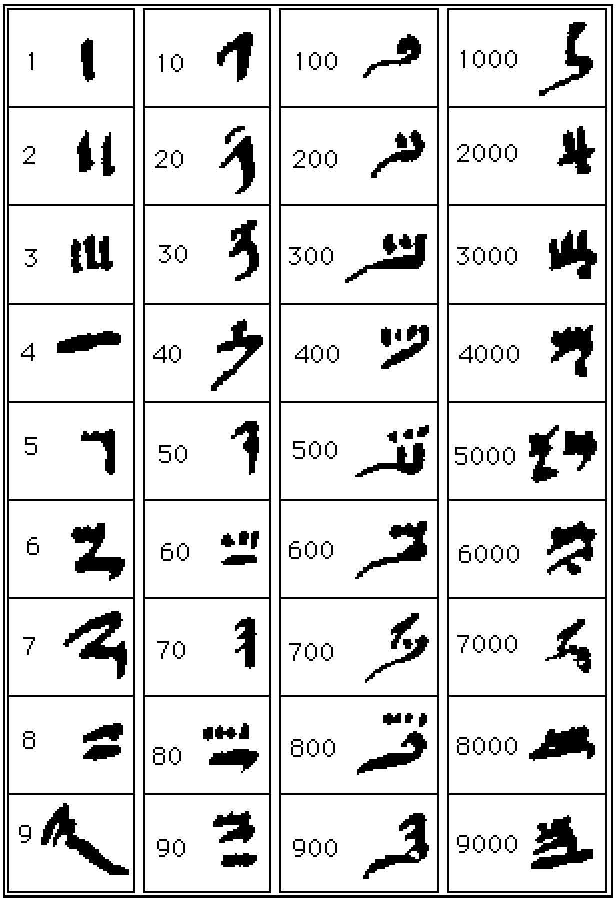
أسلوب التطابق يعتبر من أقدم الطرق التي استخدمها القدماء في عملية الحساب البدائي . عندما يخرج قطيع الخراف من الحظيرة , يتم وضع حجر لكل خروف يخرج . عند عودة القطيع مساءً يتم حذف حجر من الكومة عن كل خروف يدخل الحظيرة حتى يتم التأكد من حضور القطيع بأكمله . إحدى الطرق البدائية للحساب في العصر الحجري كانت تستخدم عظام الحيوانات في كتابة الأعداد و ذلك بواسطة ثلمها . عام 1937 م في تشيكوسلوفاكيا تم اكتشاف عظم ذئب يرجع إلى العصر الحجري , حوالي 30000 سنة قبل الميلاد , منقوش 55 نقش كل 5 نقوش متقاربة بما يدل على استخدامهم مفهوم المجموعات في عملية الحساب , كل 5 في حزمة . في عام 1880 تم اكتشاف كهوف في فرنسا تحتوي على عظام بها نقوش بعدد الأيام بما يتفق و التقويم القمري . [3][1]

<u>الحساب في الحضارة المصرية القديمة</u>

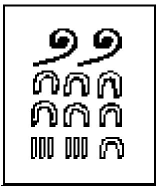
الأرقام المصرية تكتب من اليمين إلى اليسار ولا اعتبار للترتيب . الكسر عبارة عن نفس الرقم فوقه علامة على شكل فم حيث البسط هو دائماً الواحد , مثلا $\frac{1}{5} = \mathring{5}$. عملية الجمع باستخدام رمز ▷ و عملية الطرح باستخدام نفس الرمز في عكس اتجاه الكتابة ◁ . مضاعفات الأرقام تتم بتكرار الرمز ما اقتضت الحاجة .

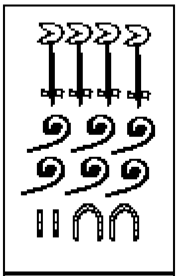


Egyptian numeral hieroglyphs

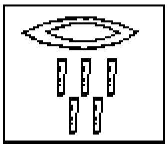


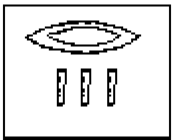
Hieratic numerals


276


4622


1/249


1/5


1/3

<u>بردية أحمس</u> : معظم معرفتنا بالرياضيات المصرية القديمة مستقاة من بردية أحمس و هي عبارة عن أرشيف رياضي مكتوب على ورقة بردي . اشترى بردية أحمس المحامي الاسكتلندي رهايند Rhind من الأقصر في مصر عام 1858 و كانت مجزأة إلى جزأين و للأسف كان الوسط الذي يشكل القدر الأكبر من البردية مفقود . رهايند الذي تحول إلى عالم آثار أرسل البردية , التي أصبحت تحمل اسمه , إلى المتحف البريطاني . بعد أربع سنوات اشترى عالم المصريات سميث ورقة بردي اعتقد خطأً أنها متعلقة بالطب . عقب وفاة سميث عام 1906 أحضرت مقتنياته الأثرية إلى الجمعية التاريخية في نيويورك . في عام 1922 تم

التعرف على أن تلك الورقة من البردي ما هي إلا تكملة بردية أحمس و تم ضمها إلى بردية أحمس القابعة في المتحف البريطاني . يقول الله تعالى ((ذلك من أنباء الغيب نوحيه إليك)) , و هكذا شاءت إرادة الله أن تلتئم ورقة البردي لتكشف لنا خبايا ما خفي من الرياضيات المصرية القديمة . بردية أحمس عبارة عن مسودة كتبت بالقلم و الحبر باللغة الهيروغليفية - اللغة الفرعونية المصرية القديمة – يرجع تاريخها إلى الأسرة الفرعونية الثانية عشر التي حكمت مصر حوالي عام 1650 قبل الميلاد . عقب اكتشاف حجر رشيد الذي احتوى على كتابة بالإغريقية و نسخة مترجمة لها بالهيروغليفية - إبان حملة نابليون لمصر عام 1799 م و الذي أحضر معه ثلة من العلماء - تم فك شفرة الكتابة الهيروغليفية من قبل عالم المصريات الفرنسي شامبليون (1790-1823) . و عليه أصبح من السهولة قراءة بردية أحمس و الاستفادة من محتوياتها . احتلت المسائل العملية حيزاً واسعاً من بردية أحمس . الحساب المصري تجميعي , بمعنى أن عمليتي الضرب و القسمة تختزل إلى تكرار عملية الجمع فحسب. تجرى عملية الضرب بين عددين بمضاعفة أحد العددين ثم جمع المضاعفات المناسبة التي تعطي الناتج . لنأخذ بعض الأمثلة التي وردت في بردية أحمس : [3]21

مثال 1

لإجراء عملية الضرب الآتية 71×19 بمضاعفة المضروب فيه 71 كالآتي :

$\oplus$	1	71
$\oplus$	2	142
	4	284
	8	568
$\oplus$	16	1136
Total	19	1349

تتوقف المضاعفة قبل أن يصبح مضاعف الرقم 71 أكبر من 19 . لأن $16+2+1=19$. بجمع القيم في العمود الأيمن المقابلة لإشارة $\oplus$ نتوصل

للجواب المطلوب : $1349 = 71 + 142 + 1136 = (1+2+16)71 = 19 \times 71$. لاحظ يمكن إجراء عملية الضرب السابقة انطلاقاً من أن المضروب فيه 19 كالآتي :

$\oplus$	1	19
$\oplus$	2	38
$\oplus$	4	76
	8	152
	16	304
	32	608
$\oplus$	64	1216
Total	71	1349

و لأن $71 = 1 + 2 + 4 + 64$, بجمع مضاعفات الرقم 19 المناسبة نحصل على الناتج : $1349 = 19 + 38 + 76 + 1216 = (1+2+4+64)19 = 71 \times 19$.

<u>2 مثال</u>

لإجراء عملية القسمة $7 \div 91$, يمكن النظر إليها بإيجاد الرقم x الذي يحقق المعادلة $91 = 7x$ و هذا يتم بمضاعفة الرقم 7 حتى نوصل للرقم 91 كالآتي :

1	7	$\oplus$
2	14	
4	28	$\oplus$
8	56	$\oplus$
13	91	*Total*

و لأن $91 = 7 + 28 + 56 = (1+4+8)7 = 13 \times 7$, يصبح الجواب 13 .

لاحظ : عملية القسمة المصرية ما هي إلا وجه آخر لعملية الضرب و ليست عملية جديدة أخرى . للأسف عملية القسمة ليست دائماً سهلة كالمثال السابق .

<u>3مثال</u>

لإجراء عملية القسمة $8 \div 35$, نضاعف المقسوم عليه حتى النقطة التي تزيد فيها المضاعفة التالية عن المقسوم 35 .ننصف المقسوم عليه حتى نكمل الباقي, كالآتي

1	8	
2	16	
4	32	$\oplus$
$\frac{1}{2}$	4	
$\frac{1}{4}$	2	$\oplus$
$\frac{1}{8}$	1	$\oplus$
$4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	35	*Total*

<u>4 مثال (المسألة رقم 24 في بردية أحمس)</u>

ما هي الكمية التي إذا أُضيفت إلى سُبعها كان الناتج 19 ؟ . حسب معرفتنا الرياضية الحالية هي مسألة خطية في مجهول واحد , تكتب بالرموز الجبرية :

$x+\frac{x}{7}=19$ أو $\frac{8}{7}x=19$. و لأن الكسور كانت قاصرة على أن يكون البسط 1 فإن الكسر $\frac{8}{7}$ لم يكن مقبول كرمز رياضي . استخدم أحمس الطريقة المعروفة باسم الموضع الخاطئ و التي تتلخص في افتراض أي قيمة مناسبة للكمية المطلوبة . من السهولة أن نختار الرقم 7 ليعطينا النتيجة الخاطئة : $7+\frac{7}{7}=8$ عوضاً عن الكمية المطلوبة 19 . لأن 8 يجب أن تُضرب في $\frac{19}{8}=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ حتى يكون الناتج 19 . القيمة الصحيحة x يتم الحصول عليها نتيجة ضرب القيمة الخاطئة 7 بالمقدار $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. أي أن $x=\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)7=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

<u>مثال :- (المسألة رقم 28 في بردية أحمس)</u>

فكّر برقم سراً في نفسك ثم أضف إليه ثلثيه ثم أطرح ثلث الرقم من الناتج , ما هو الناتج ؟ (لنفرض أن الجواب 10) . أخصم عُشر الجواب , 10 , بما يعطي 9 و هو الرقم المطلوب .

البرهان : إذا كان الرقم هو 9 فإن ثلثيه 6 التي إذا أضفناها إليه أصبح الناتج 15 و ثلثها 5 . بطرح 5 من 15 الجواب 10 و بخصم العُشر منها نحصل على 9 .

π عند المصريين :

توصل المصريون إلي تقريب π بالقيمة 3.1605 وهذا انطلاقا من اعتقادهم بأن الدائرة والتي قطرها تسعه وحدات لها نفس مساحة مربع قطره ثمانية وحدات . المسألة رقم 50 في بردية أحمس تقول : حقل دائري قطره 9 وحدات ما هي مساحته ؟ . الحل : أحذف $\frac{1}{9}$ القطر , أي 1 , يتبقى 8 . أضرب 8 في نفسها , الناتج 64 . نعيد صياغة المسألة وفق مفهومنا الآن :

$$A=\left(d-\frac{d}{9}\right)^2=\left(\frac{8d}{9}\right)^2$$
$$\therefore \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{8d}{9}\right)^2$$
$$\therefore \pi=4\left(\frac{8}{9}\right)^2=3.1605\approx\frac{22}{7}$$

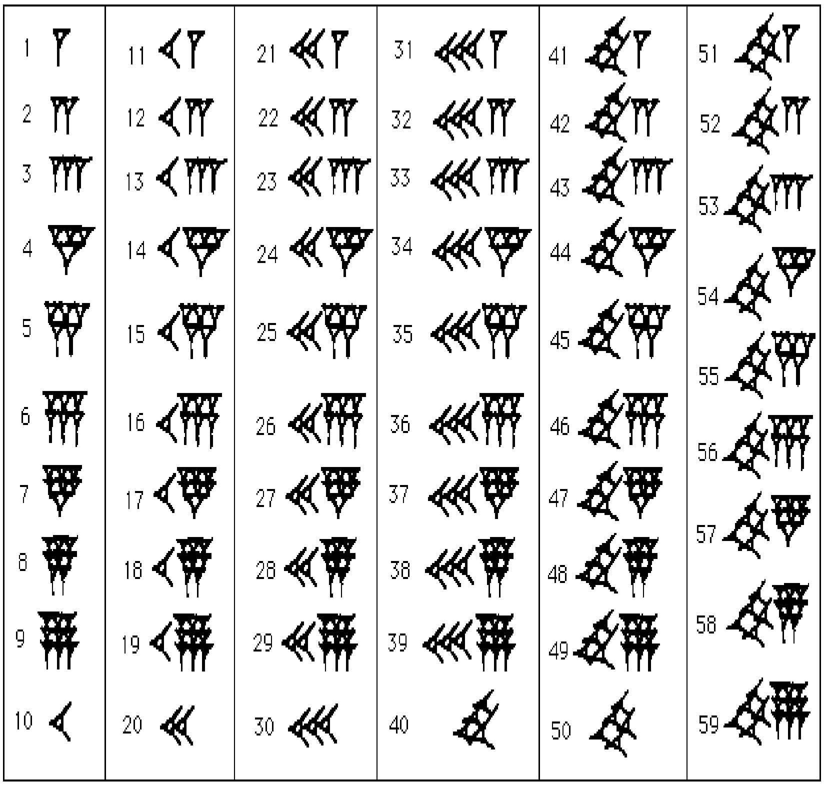
وهي القيمة التي يستخدمها الطلاب في المدارس و تفي بالحاجة العملية . من الألغاز المصاحبة لبناء الأهرامات نجد قسمة نصف محيط القاعدة على الارتفاع هي بالتحديد قيمة π بدرجة عالية من الدقة . حسب أبعاد هرم خوفو الأكبر فإن

$$\frac{2(755.78)}{481.2}=3.14123\approx\pi=3.1415926$$

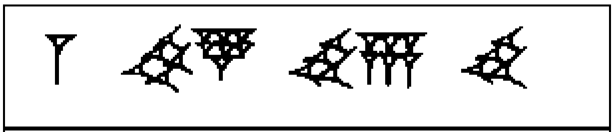
الحساب في الحضارة البابلية

الحضارة البابلية – حوالي 3500 سنة قبل الميلاد - تعتبر واحدة من أهم الحضارات القديمة التي كان لها تأثير واضح في تطور الرياضيات . البابليون هم سكان ما بين النهرين – دجلة و الفرات - , العراق حالياً . الحساب البابلي كان يستخدم النظام الستيني كما هو معروف في الساعات و الدقائق و الثواني , مثلاً :

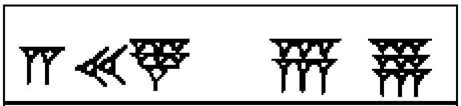
$$3;45,30 = 3 + \frac{45}{60} + \frac{30}{60 \times 60} = 3\frac{91}{120}$$



http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals.html



1,57,46,40 = 424000



2,27 squared is 6,0,9

<u>المسمارية</u> هي اللغة التي كان يكتبها البابليون باستخدام مسمار أو وتد ينقش الكلمات و الأرقام على ألواح من الطين ثم تجفف هذه الألواح . يوجد الآن 400,000 لوح موزعة في العديد من المتاحف و الجامعات العالمية .

أول من فك شفرة الكتابة المسمارية مدرس ألماني مغمور يدعى G.F Grotefend(1775-1853) . للأسف لم يُكترث لهذا الإنجاز لعدة عقود . البريطاني (H.C Rawlinson(1810-1895 استطاع فك شفرة الكتابة المسمارية المنقوشة في النصب التذكاري الذي يُخلّد إنجازات الملك داريوس (516 قبل الميلاد) النصب طوله 150 قدم و عرضه 100 قدم مقام على "جبال الرب" في منطقة Behistun و الذي يطل على طريق القوافل القديم الذي يؤدي إلى بابل . الكاتب نقش كتابته بثلاثة لغات منها الإيرانية القديمة و العيلامية و الآكادية و هي لغة البابليون و جميعها مجهولة . لقد تم أولاً فك شفرة اللغة الإيرانية القديمة و التي كانت المفتاح إلى فك شفرة اللغة الآكادية و الدخول إلى عالم الكتابة المسمارية . بعد دراسات مكثفة استغرقت النصف الآخر من القرن التاسع عشر بدا واضحاً أن الرياضيات البابلية كانت متطورة إلى مستوى لم نتخيله . لقد كان البابليون أول من استخدم تقريباً نظام الخانات العددي . هذا

النظام قائم على أن قيمة العدد تحدد من الخانة التي يحتلها . لم يكن نظام الخانات العددي عشري بل ستيني . على سبيل المثال فإن العدد 25 , 4 , 3 في النظام الستيني يناظر العدد $3,25,4 = 3\times 60^2 + 25\times 60 + 4 = 12,304$ في النظام العشري . استخدام البابليون للنظام الستيني اتضح من خلال اللوحان اللذان اكتشفهما البريطاني Loftus في إيفريست و يرجع تاريخهما إلى عهد حمورابي (عام 2000 قبل الميلاد) . في هذين اللوحان تم تسجيل مربعات كل الأعداد الصحيحة من 1 إلى 59 . لقد كان من السهل قراءة مربعات الأعداد حتى مربع السبعة $7^2 = 49$ و لكن بدلاً من أن نجد مربع الثمانية 64 , فإن الجدول يعطي 1,4 . التفسير الوحيد هو أن الواحد يقوم مقام الستون . أيضاً الجدول يعطي الرقم 1,21 بدلاً من 81 كمربع للعدد 9 في دلالة إضافية تؤكد أن الواحد يجب أن يقوم مقام الستون . و أخيراً فإن الجدول يعطي الرقم 58,1 مقابل مربع العدد 59 و هذا وفق النظام الستيني يعني

$$58,1 = 58\times 60 + 1 = 3481 = 59^2 .$$

يفتقر نظام الخانات البابلي إلى الصفر و من ثم لا يمكن التمييز بين العددين

$$2,27 = 2\times 60 + 27 = 147$$
$$2,27 = 2\times 60^2 + 0\times 60 + 27 = 3627$$

إلا من خلال السياق . لأن كلاهما يكتب كما في يسار الشكل الأخير أعلاه . فمثلاً إذا أراد شخص أن يشتري دجاجة فقد يفهم العدد 2,27 على أنه 147 في حين إذا أراد أن يشتري خروف فإن العدد 2,27 يفهم على أنه 3627 .

عملية القسمة $\frac{a}{b}$ تتحول إلى عملية ضرب $a\times\left(\frac{1}{b}\right)$, فلا عجب إذ اهتم البابليون بجداول تحتوي على مقلوب الأعداد ليستعينوا بها في عمليات القسمة , مثلاً

4	15
5	12
6	10
8	7:30
9	6:40
10	6
12	5
15	4
16	3:45
18	3:20

حيث حاصل ضرب أي زوجين هو 60 , بمعنى أن أي زوج على يسار الجدول يقابله زوجه الآخر على يمين الجدول و الذي يعبر عن المقلوب في النظام الستيني . نلاحظ أن الأرقام 7,11,13,14 تشكل فجوات في الجدول أعلاه و ذلك لأن مقلوب كلٌ منها في النظام الستيني عدد دوري غير منتهي لم يتقبله البابليون, مثلاً

$$\frac{1}{7} = 0;8,34,17,8,34,17,...$$

نجد في لوح يرجع تاريخه إلى 2500 قبل الميلاد أن السومريين استخدموا عملية التقريب , لأربعة خانات , عند القسمة على 7 , كالآتي :

$$(5,20,0,0)\times(0;8,34,17,8) = 45,42,51;22,40,$$

جبريا , علاقة محيط المستطيل بمساحته و المعطى على النحو الآتي : إذا كانت مساحة المستطيل $xy = b$ حيث $x + y = a$. توصل البابليون إلى حلها بفرض

$$x = \frac{a}{2} + z$$
$$y = \frac{a}{2} - z$$
$$\therefore x + y = a$$

بتعويض تلك القيم في $xy = b$

$$\because xy = \left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)$$
$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = b$$
$$\therefore z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$
$$\therefore z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

مثال 5

إذا كانت $x+y=\frac{13}{2}$ و $xy=\frac{15}{2}$, فإن

$$\because xy = \left(\frac{13}{4}+z\right)\left(\frac{13}{4}-z\right) = \frac{15}{2}$$
$$\therefore \frac{169}{16} - z^2 = b$$
$$\therefore z^2 = \frac{169}{16} - \frac{15}{2} = \frac{49}{16}$$
$$\therefore z = \frac{7}{4}$$

و من ثم نحصل على

$$x = \frac{a}{2}+z = \frac{13}{4}+\frac{7}{4} = 5$$
$$y = \frac{a}{2}-z = \frac{13}{4}-\frac{7}{4} = \frac{3}{2}$$

و هذا يدلل بأن البابليين كانوا هم الأسبق إلى حل معادلة الدرجة الثانية على نحوٍ ما . أخيراً نشير إلى أن البابليين تركوا رصيد من الألواح التي تذخر بمربعات و مكعبات و مقلوب الأعداد إضافةً إلى الجذور التربيعية و التكعيبية . [3]22

π عند البابليين :

قدر البابليون قيمة محيط الدائرة بثلاثة أضعاف قطرها لتصبح قيمة π ثلاثة . يبدوا أن البابليين استعاروا هذا التقدير من العبريين . معلوم أن البابليين هدموا هيكل سليمان و سبوا اليهود فيما يعرف بالسبي الأول . ورد في العهد القديم في سفر الملوك واصفاً المسار في هيكل سليمان (I kings 7:23) (أيضاً عمل صهارة مذابة من عشرة Cubits - وحدة قياس قديمة تساوي 56 / 45 سم - من الحافة إلي الحافة – يعني القطر – وارتفاعها خمسة Cubits ومحيطها ثلاثون Cubits)

أي أن $$3=\frac{30}{10}=\pi$$

لاحظ : أشعار النص المقدس كتبت في عام 650 قبل الميلاد و التي ربما أُخذت من نقوش الهيكل و التي تعود إلى العام 900 قبل الميلاد .

اكتشف عالم آثار فرنسي لوح مسماري في منطقة Susa استخدموا القيمة $\pi = 3;7,30 = 3\frac{1}{8}$ و هو تقدير مقارب لما توصل إليه المصريون .

<u>الحساب في الحضارة الإغريقية</u>

في حوالي القرن الخامس قبل الميلاد استخدم الإغريق منظومة أرقام مرتبطة بالحروف الأبجدية إضافة إلى ثلاثة رموز تشير إلى الأرقام 6 و 90 و 900 . الجدول الآتي يوضح الأرقام و الحروف : [3]23

$$\alpha \equiv 1,....., \iota \equiv 10,..., \rho \equiv 100$$
$$\beta \equiv 2,..., \kappa \equiv 20,..., \sigma \equiv 200$$
$$\gamma \equiv 3,...., \lambda \equiv 30,..., \tau \equiv 300$$
$$\delta \equiv 4,..., \mu \equiv 40,..., \upsilon \equiv 400$$
$$\varepsilon \equiv 5,...., \nu \equiv 50,..., \phi \equiv 500$$
$$\varsigma \equiv 6,...., \xi \equiv 60,..., \chi \equiv 600$$
$$\zeta \equiv 7,..., o \equiv 70,..., \psi \equiv 700$$
$$\eta \equiv 8,..., \pi \equiv 80,..., \omega \equiv 800$$
$$\theta \equiv 9,.., \multimap \equiv 90 \qquad \lambda \equiv 900$$

ما بين 1 و999 يكتب العدد 784 مثلاً كالآتي $784 = 700+80+4 = \psi\pi\delta$.

أضاف الإغريق علامات لكتابة الأرقام الكبيرة , مثلاً :

$$,\alpha \equiv 1000$$
$$\alpha M \equiv 10000$$
$$\delta M \equiv 40000$$

إضافة الحرف M - مأخوذ من كلمة myriad تعني 10000 - إلى العدد تشير إلى أن العدد مضروب في 10000 , كما هو مبين أعلاه .

عملية الضرب , مثلاً $24\times 53 = \kappa\delta \times \nu\gamma$, تجرى كالآتي :

$$\begin{array}{l} \kappa\delta \\ \underline{\nu\gamma} \\ ,\alpha\xi \\ \underline{\sigma\iota\beta} \\ ,\alpha\sigma o\beta = 1272 \end{array}$$

<u>نظرية الأعداد عند الإغريق</u>

تعتبر نظرية الأعداد من أقدم فروع الرياضيات وفيما يبدو جلياً إن الإغريق يدينون بالفضل للبابليين وقدماء المصريين في المعرفة بخصائص الأعداد الطبيعية . إلا أن نظرية الأعداد فعلياً تعزي إلي فيثاغورث وتلامذته .

فيثاغورث , ولد عام 580 أو 575 قبل الميلاد في بلدة ساموس . فيثاغورث تعني الناطق بلسان الوحي نهج العرفانية أول حياته . فيثاغورث هو أول حكيم وصف نفسه فيلسوفاً فعندما سأله أحدهم ماذا تعني بكلمة فيلسوف أجاب : الذين نسميهم بالفلاسفة هم نفر ذم شهوات الدنيا وتلفتوا بكل قواهم العقلية لمعرفة حقيقة الطبيعة وأسرار الكون . وكان يقول " هناك أناساً وهناك آلهة كما أن هناك كائنات مثل فيثاغورث لا هم من هؤلاء ولا أولئك". فيثاغورث إضافة إلى دراسته في مصر فإنه طورها عبر رحلته إلي بابل وعند عودته أسس مدرسة في كروتون بإيطاليا حيث بدأ يحصد رحلته المعرفية . تضم المدرسة أربعة فروع للرياضيات , هي :

(1) نظرية الأعداد	arithmetic
(2) الموسيقي	harmonic (music)
(3) الهندسة	geometry
(4) التنجيم والفلك	astrology

كان فيثاغورث يقسم طلابه إلي قسمين : مستمعون تحت التجربة والفيثاغورثيون . المستمعون قد يرتقوا إلي المرحلة الثانية حيث يصبحوا مؤتمنين على اكتشافات المدرسة . الفيثاغورثيون كانوا يشكلون أخوة خاضعة لقسم بعدم إفشاء أسرارها (1) . لقد أعتقد فيثاغورث – مؤسس الرياضيات الإغريقية – بأن الأعداد تحكم الطبيعة , فقد كان يقول : (هناك توافق وانسجام في الطبيعة و وحدة في تنوعها و الأعداد لغتها) . وجد فيثاغورث علاقة أساسية بين التناغم الموسيقي و الرياضيات , فعندما يهتز وتر مشدود بكامله يعطي نغمة القرار فـي الموسيقي . و الأصوات التي تنسجم مع نغمة القرار فقط تلك التي تنتج عن تقسيم الوتر إلى عدد صحيح من الأجزاء , ما لم فسوف تكون نشازاً . كانت الموسيقى تعتبر فرعاً من الرياضيات . لقد أقام البابليون الحدائق المعلقة و بنا المصريون

الأهرامات واستخدموا المثلث القائم الزاوية من منطلق تجريبي وعملي من النسبة 5:4:3 التي تعطي مثلث قائم الزاوية . إلا أن فيثاغورث برهن لأي مثلث قائم الزاوية فإن مساحة المربع المقام علي وتر المثلث القائم الزاوية تساوي مجموع مساحتي المربعين المقامين على الضلعين المتعامدين في هذا المثلث , وبهذا رفع فيثاغورث هذه المعرفة من عالم التجربة إلي عالم البرهان . وعندما برهن فيثاغورث نظريته العظيمة قدم مئة ثور قرباناً لآلهة الفنون اليونانية تعبيراً علي شكره للإلهام الذي أوصله إلي نظريته . لقد كان الفيثاغورثيو ن مهمومين بوضع الأسس الرياضية كنظام للتفكير ووسيلة نحو الهدف , ألا وهو الفلسفة . لقد كانت الإسكندرية وليست أثينا حيث أصبحت الرياضيات هدفاً لذاتها وبدأ فيها تطور علم الأعداد انطلاقا من الفلسفة الصوفية . يعتقد الفيثاغورثيو ن أن المفتاح الذي يفسر الكون يكمن في العدد والشكل , و مقولتهم الأساسية هي (كل شيء هو عدد) . المذهب الفيثاغورثي هو عبارة عن خليط من الفلسفة الكونية و الصوفية العددية number mysticism .

<u>العدد</u> : تساءل فيثاغورث عن ماهية الوجود ؟ و يبدو أن فيثاغورث قد وجد الجواب علي ما يدور في خلده ويتفاعل في أعماقه فحدده بواسطة (العدد) . حيث نظر إلي الوجود متمثلاً بصورتين ذاتا وجهٍ واحد : فالأشياء إما أن تكون أعداداً أو إنها تحاكي العدد , و أن هذه الأعداد لا تفارق الأشياء كونها متحدة بها , لذلك فالعالم كله باعتقاده ليس سوى انسجام بين نغم وعدد و ليس هناك أي اختلاف بين المحاكاة والذات بالنسبة لفلسفة فيثاغورث . يرى فيثاغورث أن العدد مبدأ الوجود "هو الأول والآخر" و شكل هندسي منتظم و منسجم , أي أن كافة الموجودات هي ذات إشكال هندسية منتظمة و الكون مرتكز علي أسس رياضية عددية , جبرية و هندسية . من المؤكد أن فيثاغورث قد اهتم اهتماماً كبيراً بالرياضيات و كان أول من فكر بجعل علم الحساب مستقلاً بذاته . لقد ربطت

الفيثاغورثية بين الشكل والعدد : فالواحد نقطة والاثنين خط و الثلاثة مثلث والأربعة مربع وذهبوا إلى أن الواحد هو العقل بينما الأحدية هي صفة الإلوهية أما العدد (10) فقد أعطوه صفات قدسية وهو مجموع الأعداد الأولى
(1+2+3+ 4 = 10) وكانوا يقسمون بهذا العدد عشرة كونه ممثل للكون .
وتنسب إلي فيثاغورث ومدرسته عدة نظريات هندسيه ومن هذه النظريات النظرية الشهيرة بنظرية فيثاغورث : (المربع القائم علي وتر المثلث يساوي مجموع المربعين القائمين علي الضلعين المجاورين للزاوية القائمة) وأدت هذه النظرية إلي اكتشاف الأطوال التي يستحيل قياسها (أي الأعداد اللانسبية) . قدم الفيثاغورثيون ثلاثة تعاريف للعدد كالآتي : الأول أن العدد هو :(وفرة محدودة من الأشياء) و الثاني أنه (مجموعة مكونة من تكديس الوحدات) و الثالث أنه (جريان للكمية)[1](1)

و لما كانت الأعداد نماذج أصلية مقدسة موجودة في عقل الإله منذ البداية كانت دراسة علم الحساب مدخلاً إلي التعرف على الخطة المقدسة . و هكذا فإن الحقيقة ليست مكونة من أشياء , إنها ليست سوي انعكاسات باهتة للأفكار المقدسة . و في الواقع فإن الأفكار وحدها هي الحقيقية . و يقول أفلاطون بأننا نعيش في كهف حيث تظهر الأحداث الخارجية وكأنها مسرحية تمثل بإلقاء الظلال علي الجدران .لا يمكننا أن نري ماهو خارج الكهف , كما إنه ليس بمقدورنا البتة معرفة العالم الحقيقي كما يعرفه الإله , يجب أن نضم أجزاء الحقيقة بعضها إلى البعض الآخر, و ذلك بالتفكير انطلاقا من الظلال المتحركة علي جدران الكهف .

مدرسة الإسكندرية

انتقل مركز النشاط الرياضي في نهاية القرن الرابع قبل الميلاد من اليونان إلى مصر . بعد معركة Chaeronea , التي انتصر فيها فيليب المقدوني فقد الإغريق حريتهم و انطفأت روح الإبداع عندهم . الإسكندر الأعظم الذي خلف أباه فيليب و هو في العشرين من عمره قاد فتوحاته الشهيرة و من بينها فتح مصر حيث أسس مدينة الإسكندرية , التي خلدت اسمه . توفى الإسكندر في ريعان شبابه و لم يتجاوز 33 عاماً و خلفه القائد بطليموس الذي أكمل بناء الإسكندرية . ازدهرت الإسكندرية و اشتعلت بالنشاط الفكري و العلمي و أصبحت وريثة الحضارة الإغريقية لمدة ثلاثة قرون قبل بزوغ فجر الإمبراطورية الرومانية .

الهندسة الإقليدية

ولد إقليدس عام 350 قبل الميلاد في الإسكندرية , وهو مؤسس مدرسة الرياضيات وهو مؤلف كتاب الأصول elements الذي يعد أقدم بحث أو رسالة إغريقية تصل إلينا كاملة . في الوقت الذي ألف إقليدس ثلاثة كتب في نظرية الأعداد إلا إن اسمه اقترن بالهندسة حيث سطر مسلماته الخمسة في الهندسة في كتابه الأصول . كان إقليدس ينتمي إلى المدرسة الفيثاغورثية وعندما سأله احد مستمعيه عن الفائدة العملية لإحدى النظريات ، ألتفت إقليدس إلى عبده وقال باختصار(إن هذا الرجل يريد إن يربح من التعليم أعطه درهما يا غلام) انطلاقاً من شعار الفيثاغورثيين (شكل هندسي وخطوة وليس شكلاً هندسياً ودرهماً) والخطوة هنا خطوة إل الأمام في المعرفة . لقد تُرْجِم و نُسِخ كتاب إقليدس (الأصول) في مبادئ الهندسة أكثر من أي كتاب آخر ، باستثناء الكتاب المقدس . النسق أو المنظومة البديهية (الأكسيوماتيك) نظرية تعني بصفة عامة " اختيار عدد من القضايا الأولية البسيطة كنقطة ابتداء , ثم نشرع في

استنباط قضايا أخرى من تلك الأولى بمساعدة بعض التعريفات " $_1$(3) . و هكذا يبدأ إقليدس نسقه بتعريف الحدود الأساسية للهندسة , مثل تعريف النقطة : " النقطة ما ليس لها أجزاء " و تعريف الخط : " الخط طول لا عرض له " و تعريف الخطوط المتوازية "الخطوط المتوازية هي خطوط مستقيمة وممتدة في نفس الوقت في كلا الاتجاهين بحيث لا يقطع احدهما الآخر". ينتقل إقليدس بعد ذلك إلى المبادئ الأساسية للنسق أو القضايا اللامبرهنة . و هنا يميز بين نوعين من القضايا الأولية : المسلمات Postulates و البديهيات axioms . و ليس من فارق بينهما سوى في درجة التعميم . فالبديهيات تختص بالمفاهيم العامة , أي تلك التي لا تتعلق بالنسق الهندسي وحده , فالبديهيات تختص بمفهوم المقدار كأن نقول مثلاً أن علاقة المساواة متعدية (أي إذا كانت أ = ب , و ب = ج فإن أ = ج) و لا تتأثر بإضافة المتساويات (أي إذا كانت ا = ب , و ج = د فإن أ + ج = ب + د) . أما المسلمات فتختلف من نسق إلى آخر . اعتبر إقليدس الحقائق الأولية حول طبيعة الموضوع مسلمات أو بديهيات حقيقية بذاتها ولا تحتاج إلي برهان self-evident truth . والمسلمات هي عبارات أولية صيغت بشكل مجرد تقبل- بدون تمحيص وبغض النظر عن السؤال هل هي صادقة أم خاطئة كأساس سببي وتقبل كقواعد للعبة مثل قواعد لعبة الشطرنج . ثم وضع إقليدس خمس مسلمات هندسية لا يمكن إثباتها، لكن يمكن قبولها كحقائق بديهية توفر الأساس اللازم لعلم الهندسة . وهناك أيضا خمسة (شروط) شبيهة بالمسلمات يفترض بأنها واضحة بذاتها ، كما أنها قابلة لأن تبرهن لا بالمنطق وإنما بالفعل . $_2$(1) . مسلمات إقليدس الخمس , وهي فرضيات ذات طبيعة هندسية متميزة , كالآتي :

1 - يرسم الخط المستقيم من أي نقطة إلي أي نقطة أخرى .
2 - الخط المستقيم المنتهي هو جزء من خط مستقيم لانهائي .

3 - تحدد الدائرة بالمركز و نصف القطر.

4 - الزوايا القائمة يساوي كل منها الآخر .

5 - إذا قطع خط مستقيم خطين مستقيمين آخرين بحيث يجعل مجموع الزاويتين الداخليتين في نفس الجهة اقل من زاويتين قائمتين فإن الخطين المستقيمين يلتقيان علي طول امتدادهما في نفس الجهة التي مجموع زاويتاها أ قل من زاويتين قائمتين [3][12].

ثم أضاف إقليدس خمس قواعد عامة في الرياضيات :

1 - الأشياء التي تساوي نفس الشيء يساوي كل منها الآخر .

2 - إذا أضيفت الأشياء المتساوية إلي أشياء متساوية فإن الناتج الكلي يتساوى .

3 - إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية فإن الباقي يتساوى .

4 - الكل أكبر من الجزء .

5 - الأشياء التي تنطبق على بعضها كلٌ منها يساوي الآخر .

إلا أن مسلمة إقليدس الخامسة والتي تعرف بمسلمة التوازي و التي نتجت عنها المبرهنة القائلة (إن مجموع أي زاويتان في المثلث أقل من قائمتين) و من ثم باستخدام المسلمة الخامسة يمكن أن نضيف (و إذا كان مجموع زاويتا القاعدة في شكل ثلاثي الأضلاع أقل من قائمتين , فلابد و أن يكون هذا الشكل مثلثاً) وهكذا يمكن أن نبرهن على أن (مجموع زوايا المثلث مساوٍ لقائمتين). [2](3) أو أيضا بشكل مكافئ (أي خطان متوازيان لهما عمودي واحد مشترك) . و قد أثارت المسلمة الخامسة و تداعياتها جدل عنيف و تبادر السؤال : ألا يمكن أن يكون مجموع زوايا المثلث أقل أو أكثر من قائمتين ؟ . سنرى أن المسلمة الخامسة قاصرة فقط علي الفضاءات الإقليدية أي المسطحة -flat- وتفشل في غيرها من الفضاءات غير الإقليديه مثل الكروية و الزائدية كما سنرى فيما بعد.

المحتوى الرئيسي لهذا النسق مؤلف من سلسلة من (الفرضيات) وهي عبارات صحيحة تبنى بالاستنتاج بأسلوب منطقي منهجي انطلاقاً من المسلمات والشروط . لا يجري إقليدس أي محاولة لإيضاح صحة الفرضيات استناداً إلى وقائع من العالم الخارجي أو إلى أي تطبيق عملي، وطريقته في البرهان هي استنتاجية بكاملها . وهو يعتبر الهندسة نظاماً مغلقاً من الجدل المنطقي لا يتطلب إدخال أي أمر يتعلق بالتجربة الإنسانية ولا يعني إلا بالحتمية التي ترافق اكتشاف الحقيقة. لسوء الحظ فقد كانت الروح النقدية غائبة عن الهندسة طوال الفترة عقب نشر الأصول حتى عام1800م .فقد كان كتاب (الأصول) يعد عملاً كاملاً لا يرقى إلي مضمونه أي ارتياب مثلما هو الحال في الكتب السماوية وكان التعرض إلى أي شيء فيه يحتاج إلي شجاعة أدبية نادرة , كأن يقال مثلاً بأن مسلماته تعاني من بعض العيوب أو أن عشرات من افتراضاته كانت مؤسسة على ادعاءات حدسية خاصة بإقليدس لم تحلل بما فيه الكفاية .

المسلمة (أو البديهية) axiom

تعتبر المسلمة مبرهنة في حد ذاتها أو حقيقة في حد ذاتها self evident truth لا تحتاج لبرهان إلا أن مفهوم المسلمة تعدل بعض الشيء منذ عهد إقليدس حتى اليوم . وفقاً لمفهوم إقليدس فإن المسلمات حقائق لا تهتز و لا يعتريها الشك , مثل (أي نقطتين مختلفتين تشكل خط مستقيم وحيد) , اليوم لا نتحدث عن المسلمة هل هي صادقة أم كاذبة , حقيقية أم خاطئة . كما في لعبة الشطرنج , لا يحق لنا أن نسأل هل قواعد اللعبة صحيحة أم لا. لماذا يخطو الجندي خطوه في حين يأخذ الحصان شكل L في حركته . لفظ مسلمة axiom لفظ إغريقي يعني متطلب . وعليه عليك أن تتقبل المسلمات بدون تساؤل كقواعد للعبة . السؤال الوحيد المسموح به هل القضايا المستنتجة مستنبطة منطقيا من المسلمات ؟ ليسس من فرق بين المسلمة و البديهية سوى في درجة التعميم . فالبديهيات

تختص بالمفاهيم العامة , مثلاً علاقة المساواة متعدية . أما المسلمات فتختلف من نسق إلى آخر .

<u>إقليدس و نظرية الأعداد</u>

ألف إقليدس ثلاثة كتب في نظرية الأعداد (هي بالتحديد VII , VIII , IX) إلا أن اسمه اقترن بالهندسة حيث سطر مسلماته الخمسة في الهندسة في كتابه الإصول . اشتملت كتب إقليدس الثلاث في نظرية الأعداد على 102 قضية . بعض القضايا كانت معروفة سلفاً بدون برهان و يرجع الفضل في برهنتها إلى إقليدس . و من أهم مبرهناته , نورد الآتي :

1 - إذا كان $a,b>0$ عددان صحيحان , فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان q,r يحققان :

$$a=qb+r,\quad 0\le r<b$$

2 - إذا كان $a>0,b>0$ عددان صحيحان , فإنه يوجد عددان صحيحان x,y بحيث أن $\gcd(a,b)=ax+by$.

3 - إذا كان $a>0,b>0$ عددان صحيحان فإن كل واحد منهما أولي بالنسبة إلى الآخر ($\gcd(a,b)=1$) فقط و إذا كان فقط يوجد عددان صحيحان x,y بحيث أن $1=ax+by$.

<u>1 تعريف</u>

العدد الأولي هو عدد صحيح موجب أكبر من الواحد لا يقبل القسمة إلا على نفسه أو على الواحد ومتوالية الإعداد الأولية هي كالآتي :

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , ..., P ,...

<u>1 نظرية</u>   يوجد عدد لانهائي من الإعداد الأولية .

<u>البرهان</u>

نكتب الإعداد الأولية في متوالية تصاعدية 2 , 3 , 5 , 7 , ... , لأي عدد أولي P فإن $N = (2 . 3 . 5 . 7 . 11 ......P) + 1$. نستخدم النظرية الأساسية لنستنتج أن N يقبل القسمة علي عدد أولي وليكن q . لكن لا أحد من الإعداد الأولية 2 , 3 , 5 ,......,P يقسم N . فيما إذا كان q احد هذه الإعداد الأولية , الآن بجمع العلاقة q/2 .2 . 3 . 5 ....P مع $q/_N$ نحصل علي أن q / (N – 2 . 3 . 5 ....P) أو نفس النتيجة ألا وهي $q /_1$ والقاسم الوحيد للواحد هو الواحد نفسه وبما أن $q > 1$ فإن التناقض يبدو واضحاً ومن ثم يوجد عدد أولي جديد اكبر من P.

<u>النظرية الأساسية في علم الحساب</u> [3][2]

أي عدد صحيح موجب $n > 1$ إما إن يكون عدد أولي أو يمكن كتابته بشكل وحيد كحاصل ضرب أعداد أولية.

مثلاً $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5$

في عام 250 قبل الميلاد حسب أرشميدس قيمة π في الإسكندرية , لتكون :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

في حين حسبها بطليموس في الإسكندرية عام 150 م , لتكون

ديوفانطوس Diophantus

لا يُعرف الكثير عن سيرة حياة ديوفانطوس سوى أنه عاش في الإسكندرية حوالي العام 250 م . يصف ديوفانطوس مسار حياته : استمرت طفولته $\boxed{}$ حياته , نمت لحيته بعد $\frac{1}{12}$ منها , بعد $\frac{1}{7}$ منها تزوج , أنجب ابناً بعد 5 سنوات من ذلك , الابن عمَّر نصف عمر أبيه , ثم توفى الأب بعد 4 سنوات .
إذا فرضنا أن عمر ديوفينطوس x عندما توفى فإن المعادلة تصبح :

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x \Rightarrow x=84$$

الجبر هو توسيع لقواعد علم الحساب بغية اكتشاف قيم الأعداد المجهولة , و يتم هذا عن طريق الربط بين المجهول و عدد محدد . و يوجد في تاريخ علم الجبر مجموعة من الأنماط الجبرية تبتدئ بالجبر البلاغي الذي يستخدم الكلمات فقط . و هذا النمط كان معروفاً لدى قدماء المصريين . تطور الجبر ليستخدم الرموز إضافة إلى الكلمات بما يحقق ضرب من الاقتصاد اللغوي . مثلاً المسألة القائلة (قُسمت كمية من التفاح بين ستة أشخاص بحيث يكون نصيب الأول ثلث الكمية و الثاني ثمنها و الثالث ربعها و الرابع خمسها . فإذا كان نصيب الخامس عشرة تفاحات و بقيت حبة واحدة للسادس . فما هو عدد التفاح ؟ الجواب 120 تفاحة .
نستعرض أسلوب ديوفانطوس في الجبر من خلال المسألة الداعية إلى تقسيم مربع عدد إلى مربعي عددين .

<u>مثال 6</u>

ليكن العدد 16 و ليكن المربعان هما x^2 و $(16-x^2)$. الآن نختار مربع على الصيغة $(4-mx)^2$ و لتكن $m=2$. عندئذٍ نكتب

$$(4-2x)^2 = 16 - x^2$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$$
$$\therefore 5x^2 = 16x$$
$$\therefore x = \frac{16}{5}$$
$$\therefore x^2 = \frac{256}{25}$$
$$\therefore 16 - x^2 = \frac{144}{25}$$

و هناك عدد لانهائي من الحلول باختلاف قيم المعْلم $m = 2,3,4,...$. (1)[6]

<u>مثال 7</u>

أوجد عددان مجموعهما 20 و مجموع مربعيهما 208 ؟

الحل : بإتباع أسلوب ديوفانطوس و باستخدام الرموز الحديثة كالآتي :

ليكن العددان هما

$10+x$ و مربعه $x^2+20x+100$

$10-x$ و مربعه $x^2-20x+100$

بجمع هذين المربعين نحصل على

$$2x^2 + 200 = 208$$
$$\therefore 2x^2 = 8$$
$$\therefore x^2 = 4$$
$$\therefore x = 2$$

شهد القرنان ما قبل العصر المسيحي نمو الإمبراطورية الرومانية التي توسعت حتى استحوذت على مصر عام 30 قبل الميلاد . ظلت الإسكندرية تحتل ثاني أكبر مدنها أهمية بعد روما . لم يكن هناك اهتمام يذكر من قبل الرومان للعلوم عامة و للرياضيات خاصة مما أدى إلى ركودها . ظهرت المسيحية و انتشرت عبر أرجاء الإمبراطورية الرومانية و سرعان ما دب التمرد في الإسكندرية و غيرها من المدن . بعد أن اضطهد الرومان المسيحيين ردحاً من الزمن , لم تلبث الإمبراطورية الرومانية أن أصبحت حامي حمى الدين عقب اعتناق الإمبراطور قسطنطين للمسيحية عام 312 م . للأسف لم تتحلى الكنيسة بالروح العلمية و العقلانية و المنطق و لكن ساد التعصب الديني و الإيمان الأعمى . بحلول القرن الرابع الميلادي انطفأ وهج الرياضيات و حل الجدال اللاهوتي العقيم بدل النقاش العلمي المثمر و الإبداع العقلي الرياضي الخلاق . و خير مثال يضرب حول الهوس الديني المعادي للعلم و العقل ما حل بعالمة الرياضيات هيباتيا ابنة عالم الرياضيات ثيون الذي أجرى أبحاث مهمة على كتاب الأصول لإقليدس و كتاب الحساب لديوفانطس . تألقت هيباتيا في الرياضيات و الفلسفة و أصبحت أستاذة في المعهد المعروف باسم المتحف Museum حيث كان والدها يدرس و ذاع صيتها و انجذب عدد كبير من الطلاب لحضور محاضراتها . نتيجة لتحريض بطريرك القسطنطينية المتعصب و المناهض للفلسفة الإغريقية الأرسطوطالية هاجم جمهرة من الرعاع المؤيدين للبطريرك هيباتيا و اقتادوها إلى الكنيسة و جردوها من ملابسها و قتلوها ثم أحرقوا جثتها في العام 415 م الذي صادف آخر عام من عمر الإمبراطورية الرومانية و بداية ما يعرف بالقرون المظلمة . انطفأ وهج المعرفة في أوروبا , في حين اشتعلت جذوته في مكان آخر !

الباب الثاني

الرياضيات عند العرب

بعد الظلام الدامس الذي لف العالم انبلج النور من جزيرة العرب في مكة , بميلاد المصطفى صلى الله عليه و سلم . قال الشاعر أحمد شوقي :

ولد الهدى فالكائنات ضياء   و فم الزمان تبسمٌ و ثناء

من المؤكد أن الإسلام كان الباعث الحضاري للعرب و شكّل نقلة نوعية في مجال المعرفة و العلم , وكانت أول سورة نزلت في القرآن ((اقراء باسم ربك الذي خلق)) و رفع الله سبحانه مرتبة العلماء و أعلى من شأنهم في قوله ((يرفع الله الذين آمنوا منكم و الذين أوتوا العلم درجات)) و قوله ((إنما يخشى الله من عباده العلماء)) و قوله ((و كونوا ربانيون بما كنتم تعلمون الناس الحكمة و بما كنتم تدرسون)) . ويقول تعالى ((و كذلك جعلناكم أمة وسطا)) ليؤكد أن هذا الدين دين الوسطية التي هي قرين العلم في حين أن الجهل قرين التطرف . أحاديث الرسول صلى الله عليه و سلم التي تحث على العلم و التعلم كثيرة , نذكر منها :

1 - (أطلبوا العلم من المهد إلى اللحد)

2 - (أطلبوا العلم و لو في الصين)

3 - (الدنيا ملعونة ملعونٌ ما فيها إلا ذكر الله و ما والاه وعالم أو متعلم)

4 - (إنما بُعثت معلماً)

5 - (معلم الإنسانية الخير يستغفر له الحوت في البحر)

و انتشر المسلمون في شتى أصقاع الأرض يترجمون العلوم السابقة لهم – مثل الإغريقية – و يحفظونها من الضياع و يضيفون إلها الكثير. و إضافةً للمنهج الاستنباطي الذي كان يستخدمه الإغريق , أبدع المسلمون المنهج التجريبي الذي شكل قفزة علمية هائلة و منفعة عملية استفادت منها البشرية جمعاء . تلكم الإسهامات المبدعة و الخلاقة تتمثل في : (9)

1 -كتاب (القانون في الطب) لابن سينا (980 – 1036م)

2 -كتاب (المناظر) لابن الهيثم (965 – 1038 م) الذي أسس لعلم الضوء الحديث باعتبار أن الضوء ينتقل من الجسم المرئي إلى العين و ليس العكس كما ادعى أرسطو قديماً .

3 -جابر ابن حيان (ولد عام 120 هجري) في الكيمياء .

4 -محمد أبو موسى الخوارزمي في الرياضيات و الجبر .

5 -أبو بكر الرازي (ولد عام 40 هجري) في الطب .

6 -ابن النفيس (607 – 696 هجري) مكتشف الدورة الدموية الصغرى .

7 -ابن ماجد (836 – 936 هجري) في الجغرافيا و علوم البحار .

8 -الفارابي (870 – 850 م) في الفلسفة و يلقب بالمعلم الثاني .

هذه الطفرة العلمية هي نتاج روح الإبداع و التجديد و إعلاء قيمة العلم و العقل التي بثها الإسلام في قوله تعالى ((إن في ذلك لآيات لأولى النهى)) و قوله ((لقومٍ يعقلون)) . و على النقيض من ذلك فإن حالة الجهل و التخلف التي تعيشها الأمة الإسلامية ما هي إلا نتاج البعد عن تلك الروح الخلاقة و الوقوع في براثن التقليد و الجمود العقلي و تهميش العقل بل و تعطيله و وأد عقلية التجديد و الإبداع و قفل باب الاجتهاد . لقد كانت الفلسفة دائماً و عبر التاريخ هي الوسيلة و الآلية التي تعين العقل على التفكير السوي و الرأي السديد و المنطقي و العقلاني و تحصنه من الانزلاق وراء الأساطير و الخرافة . الكندي و الفارابي ثم ابن رشد – الملقب بالشارح لشرحه كتب أرسطو - كانوا من أوائل الفلاسفة الذين أخذوا على كاهلهم ترجمة الفلسفة اليونانية و تنقيحها و

شرحها , كما تأسست فلسفة إسلامية على يدي ابن سينا و أبو حامد الغزالي . بعد أن تأطرت العقلية العربية الإسلامية على هذا النهج الفلسفي و التفكير العقلاني و بعيداً عن التأويلات الغيبية انفتح العلم على مصراعيه و على مختلف تخصصاته و على رأسها الرياضيات . الدين مكوِّن أساسي للهوية العربية الإسلامية و بقدر ما كان الخطاب الديني في بداية الإسلام مبدعاً و مجدداً و ملهماً كان العقل العربي الإسلامي مبدع و مجدد و ملهَم . عندما انغلق الخطاب الديني و سيطر عليه الجمود و التقليد وشاع التعصب المذهبي و التطرف , انطفأ وهج العقل و اندثر العلم و استوطن الجهل و التخلف . في الوقت الذي ذم فيه الإسلام منهج التقليد و اعتبره ديدن الكفار و المشركين في قوله تعالى ((قالوا إنا وجدنا آباءنا على أمةٍ و إنا على آثارهم مهتدون)) و يرد الله سبحانه عليهم على لسان رسوله في قوله ((قال أو لو جئتكم بأهدى مما وجدتم عليه آباءكم)) , بل يؤسس الله سبحانه على منهج العقل و النقد و التحليل في وصفه للمؤمنين ((و الذين إذا ذكروا بآيات ربهم لم يخروا عليها صمّاً و عمياناً)) أي خروا عليها بعد تمعُّن و تدبر و فحص و تمحيص و اقتناع . رغم عداء الكنيسة لأفكار ابن رشد و مؤلفاته بل تم حرق من يتبنى تلك الأفكار و المؤلفات إلا أن أوروبا تبنت فلسفة و منطق و عقلانية ابن رشد فتحررت من عقلية الجهل و الخرافة و الشعوذة و ازدهر فيها العلم . و يا للأسف أُحرقت مؤلفات ابن رشد في الأندلس و كان مصيره المنفى . خسر المسلمون أسس الفلسفة العقلانية و التفكير المنطقي التي تشكل الأرضية الضرورية لانطلاق العلم و ازدهار المعرفة .

تاريخ الصفر

من الذي اكتشف الصفر ؟ الجواب ليس سهلا إذ يكشف السجل التاريخي مسارات مختلفة نحو مفهوم الصفر . أول ما يقال عن الصفر أن له استخدامان

لكل منه أهميته و إن كان مختلف عن الآخر . أحداهما كمؤشر للخانة الخالية في النظام العددي مثل العدد 2106 , هنا الصفر استخدم في خانة المئات , و مؤكد إن 216 تعني رقماً آخر . الاستخدام الآخر للصفر هو نفسه كما نستخدمه كرقم صفر . أياً من الاستخدامين ليس من السهل سرد مساره التاريخي , إذ أن الصفر ليس بمفهوم حسي . المسائل الرياضية بدأت أول الأمر كمشكلات حقيقية و ليس مسائل مجردة . كان التعامل مع الأعداد حسياً أكثر منها مفاهيم مجردة كما هو الحال يومنا هذا . لقد تطلب الأمر قفزات عقلية عملاقة للانتقال من خمسة عصافير إلى خمسة أشياء و من ثم إلي الفكرة المجردة خمسة . لقد كان القدماء يحلون مسائل من قبيل كم حصان تحتاج إليه المزرعة ؟ و من المؤكد أن الجواب لا يحتمل أن يكون صفراً أو 23- . قد يتبادر للذهن إن نظام الخانات العددي مجرد ظهوره يستدعي وجود الصفر كخانة خالية بالضرورة , إلا أن هذا لم يحدث للبابليين الذين استخدموا نظام الخانات العددي طيلة ألف عام . حيث كانوا يستخدمون نظام عددي للأساس 60 وليس 10 كما نستخدمه الآن و لم يوجد في نظامهم العددي ما يميز بين 2106 و 216 إلا من خلال السياق , هذا ما كان عليه الحال منذ 1700 قبل الميلاد حسب النقوش المسمارية , فقط 400 قبل الميلاد حين توصل البابليون إلي علامات توضع حيث نضع الصفر الآن لتدل علي الخانة الصحيحة لكل رقم , مثلا للتمييز بين 21'6 أو 216 . إلا أن هذه العلامات لم توضع قط في أول الرقم لتدل علي الصفر مثل "216 . إلا أن السياق كفيل بأن يدل علي المقصود , فمثلاً عند شراء بيضة فإن الثمن ثلاثة يعني ثلاثة ريال وعند شراء دجاجة فإن ثلاثة تعني 300 ريال . طيلة هذا المسار التاريخي حتى استخدام الصفر كخانة خالية لم يعني قط استخدامه كرقم في حد ذاته , بل كعلامة - كفاصلة عشرية مثلا - بحيث يحتفظ العدد بدلالته الصحيحة . هذا التطور لم ينسحب تأثيره علي الإغريق - الذين أعقبوا الحضارة

البابلية - السؤال لمَ لم يتبنى علماء الإغريق نظام الخانات العددي الذي سبقهم البابليون في استخدامه ؟ الجواب يكمن في أن الإغريق برعوا في الهندسة , و تعاملوا مع الأرقام فقط كأطوال للخطوط المستخدمة في الهندسة . رغم أن كتاب إقليدس الأصول احتوى على كتاب في الأعداد إلا أن أساسه الهندسة . الأعداد استخدامها كان قاصرا علي التجار و لذا ما كان للصفر أن يتبوأ مكانه لديهم . من العدل القول بأن النظام العددي ولد في الهند و نما و تطور إلي طور عالي من التعقيد كما هو الحال يومنا هذا . يبدو أن استخدام الصفر في الرياضيات بدا في الهند عام 650 م . استخدم الهنود نظام الخانات العددي و الصفر ليعبر عن الخانة الخالية . لقد استخدمت النقطة كرمز للصفر . ما هو مؤكد أن أول سجل للصفر وجد في لوحٍ حجري مؤرخ عام 876 في مدينة Gwaliar , تبعد 400 كلم جنوب دلهي , حيث كتبت الأرقام 270 و 50 باستخدام الصفر و هنا بدأ استخدام الصفر كرقم لأول مرة . منذ القدم كانت الأعداد عبارة عن كلمات تدل علي مجموعه من الأشياء ثم بدأت فكرة العدد تتجرد حتى وصلنا إلى الصفر والأعداد السالبة التي لم توجد كتعبير عن مجوعة من الأشياء . ثم يبدأ التساؤل كيف تتم العمليات الحسابية من جمع , طرح , ضرب و قسمة في ظل وجود الصفر و الأعداد السالبة . الرياضي الهندي براهما جوبتا Brahma Gubta في القرن السابع حاول وضع القواعد الرياضية التي تستوعب الصفر و الأعداد السالبة حيث توصل إلى أن ضرب أي عدد في صفر بصفر. إلا أنه فشل في تعريف القسمة علي الصفر . كما استخدم الرياضي الهندي براهما جوبتا رمز الكسر بدون خط يفصل بين البسط و المقام . انتقلت الرياضيات الهندية إلي العالم العربي الإسلامي عام 750 م , الذين أضافوا خط يفصل بين البسط و المقام في عملية الكسور . تداخلت الرياضية الهندية و العربية , حتى الأرقام أصبحت تعرف باسم الأرقام الهندو-عربية .

بيد أننا نجد أن الخوارزمي (680-750) استخدم الصفر قبل العام 876 م الذي سجل أول أرشيف للصفر في الهند . إذاً إلى من يُعزي ابتكار الصفر؟ نجد أن ج- برونفسكي في كتابه ارتقاء الإنسان يقول : إن الطريقة العربية في كتابة الإعداد تطلبت ابتكار الصفر , فهو يُعزو ابتكار الصفر للعرب لا إلى الهنود . (2)[2]

الخوارزمي محمد بن موسى الخوارزمي (680 - 750م)

قدمت أعمال الخوارزمي إضافات جوهرية جداً أدت إلى تطوير الرياضيات العالمية وقد تمخض عن ترجمة كتابه في الحساب إدخال الأعداد العربية إلى الغرب، وولدت عملية قادت إلى استخدام الأرقام العربية التسعة مع الصفر بأعتبار ذلك أهم أدوات رئيسية في العلوم. وكان من شأن كتابه في الجبر Algebra أن صبغ هذا الإسم هذا الفرع من الرياضيات. كان هدف الخوارزمي من كتابه هذا هو تمكين العلميين من حل مسائل عمليه معقدة مثل توزيع المواريث على مستحقيها وفقاً للشريعة الإسلامية.يبدو أن الخوارزمي أيضاً كان مهتماً بالمناحي النظرية للجبر باعتباره علم المعادلات.

حساب الخوارزمي

كانت رسالة الخوارزمي في الحساب أول كتاب في العالم يوضح عملية الأعداد العشرية.فقد الأصل العربي لهذه الرسالة وفي عام 1857 أكتشفت نسخة لاتينية من ترجمة القرن الثالث عشر في مكتبة جامعة كامبردج.تبدأ هذه الرسالة بالقول: (وهكذا قال الخوارزمي). وتشيد هذه المقدمة إلى أن الخوارزمي أعطى مدخلاً جديداً لدراسة الرياضيات كما إنها أدت إلى أستحداث كلمة جديدة الخوارزميةٍ :- algorism التي أستخدمت في البداية لذلك الفرع من المعرفة الذي يعرف الآن (بعلم الحساب)، و لكلمة الخوارزمية في الوقت الحاضر معنى أكثر تحديداً: إنها خطة محددة لحل مسألة معينة مثل خوارزميات عمليات الجمع و القسمة المطولة

و إيجاد الجذر التربيعي . جعلت الخوارزميات و الأرقام العربية الحساب بسيطاً و هذا سهل إدراك طبيعة الأعداد ككائنات مجردة .

و إذا كان إقليدس و رياضيون يونانيون أخرون قد حرروا الهندسة من قيود المسح الأرضي و مسائل البناء وخلصوا إلى الحقائق المجردة للفضاء , فإن العرب وحدهم قدموا خدمة مشابهة للعدد وعرضوه كائنات مجردة بحتة.

إن اكتشاف رمز الصفر- جاءت الكلمة اللاتينية Zero من الكلمه العربية صفر أي (خالي) نقل الحساب من الشكل الحسي إلى الشكل المجرد. هناك في قوائم الكتب في المكتبات العربية ما يشير إلى عنوان كتاب الخوارزمي في الحساب على أنه (كتاب الجمع والطرح بالطرق الهندية) أوضح فيه ماذا يعني بالطرائق الهندية للعمليات الأساسية في الحساب . وأنجز الخوارزمي عمليتي الجمع و الطرح بالاسلوب ذاته الذي نجريه اليوم أما الضرب فينجز بطريقة الشبكة و هذه تقريباً نظام نابيير مما يؤكد أن جون نابيير (1550 – 1617م) أخذ نظام الضرب عن العرب .

<u>مثال 1</u>

لإيجاد حاصل الضرب 932×567

الطريقة : أرسم أولاً شبكة من المربعات ثلاثة في ثلاثة ثم أرسم الأقطار و حددها لتحصل على الشبكة كما في الشكل أدناه :

أضرب 5 في 9 واكتب الجواب 45 في السطر الأول من الشبكة تحت العدد 5 بحيث تضع رقم العشرات فوق القطر.

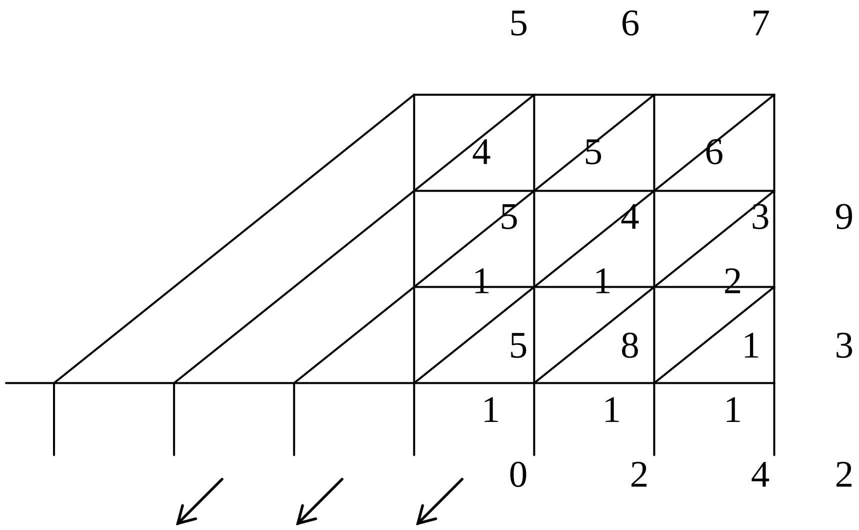
أضرب بعدئذٍ 6 في 9 واكتب الجواب بالاسلوب ذاته تحت 6 .

أفعل الأمر ذاته من أجل 7 .

أضرب بعد ذلك كلاً من 5 و6 و7 في 3 و اكتب الأجوبة في السطر الأوسط ، و توثق كل مره من فصل أرقام العشرات عن الأحاد كما فعلت في السطر الأول.

أضرب أخيراً في 2 و ضع الأجوبة في السطر الثالث .

أجمع الأرقام قطرياً ، الأحاد مع الأحاد والعشرات مع العشرات و ضع المجاميع في أسفل الأقطار . و عندما يكون مجموع أرقام قطر أكبر من 9 لابد من بعض الترحيل . و هذا موضح بالأسهم في المخطط. (1)3



4 11 17 14 4 4

1 1 1

5 2 8 4 4 4

$$\therefore 567 \times 932 = 4(11)(17)(14)44$$
$$= 5\,2\,8\,4\,4\,4$$

جبرالخوارزمي

كتاب الخوارزمي في الجبر (رسالة مختصره في طرائق الجبر و المقابلة) . تشير كلمة الجبر إلى أن توازن المعادلة يبقى قائماً عندما نحرك كميات موجبة أو سالبة من جانب إلى آخر من المعادلة و ذلك بتغيير إشاراتها فقط . أما المقابلة فتشير إلى تقسيم كل حد من حدود المعادلة التربيعية على معامل الحد التربيعي أو قد تفيد حذف الحدود المتشابهة في طرفي المعادلة . إن هاتين العمليتان الجبر والمقابلة ، هما الخطوتان الأوليان في خوارزمية الخوارزمي التي قدمها لحل المعادلات التربيعية . إلا أن استخدام الجبر عند العرب افتقر إلى استخدام الرموز الجبرية و كان يقتصر صياغة المسألة كلامياً . الخوارزمي كان يرى الأعداد التي يحتاج إليها في كتاب (حساب الجبر و المقابلة) على ثلاثة ضروب , هي جذور و أموال و عدد مفرد ليس بجذر و لا مال . الجذر يعني حل المعادلة و هو ما نرمز له في الجبر الحديث بالرمز (س) و المال هو مربع الجذر ($س^2$) و العدد المفرد هو الثابت . في بعض الأحيان استخدم العرب كلمة شيء للدلالةعلى الجذر و منها اشتق الرمز (ش) في بادىء الأمر ثم أصبح (س) لاحقاً . كما استخدم العرب تعبير جزء الشيء للدلالة على مقلوب الشيء : $\frac{1}{ش}$, و جزء المال ليدل على مقلوب المال : $\frac{1}{ش^2}$. (7)[1]

2 مثال

لنفرض أنك قطعت من سجادة طولها 10 وحدة وعرضها مجهول شريطاً مساحته 21 وحدة مربعة . فإذا كانت القطعة المتبقية من السجادة على شكل مربع فما هو عرض هذه السجادة ؟

الحل: باستخدام الرموز (وليس الكلمات) y للعرض - الجذر- و y^2 للمربع و تكتب المعادلة على النحو الآتي $y^2+21=10y$

و حلها وفق المسار الآتي

قسم عدد الجذور (10) على 2	الجواب5
أضرب 5 في نفسها	الجواب 25
أجرعملية الطرح 4 =21 - 25	الجواب 4
خذ الجذر التربيعي للناتج الأخير	الجواب 2
أطرح 2 من نصف عدد الجذور(2 - 5)	الجواب 3

3 هو أحد الجذرين المطلوبين و بشكل مشابه نجد الجذر الثاني وهو 7 .

سنرى من هذه الحالة أن الخوارزمي كان مدركاً أن للمعادلة التربيعية جذرين موجبين- في هذه الحالة $y = 7$ و $y = 3$ – و هو يعلم كذلك أن لبعض المعادلات حلول سالبة و لكنه لم يوردها مطلقاً إذ لايمكن مثلاً أن يكون عرض السجادة سالباً.

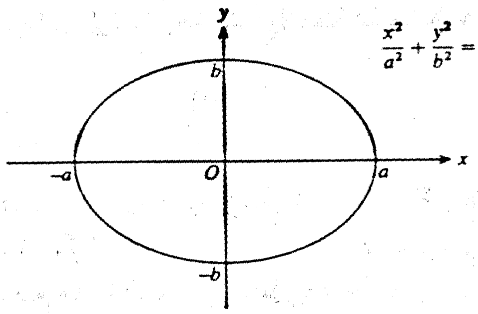
رغم أن كتاب الخوارزمي في الجبر كان قد بلغ من العمر ٤٠٠ عام عام عندما بدأ عمر عمله ، فإن الحساب والجبر لم يكونا قد تمايزا بوضوح بعدُ ، لا ، لأنهما قد صُمما معا سعيا وراء قيم الأعداد المجهولة عن طريق معرفة ارتباطها بها بأعداد معلومة . أجرى عمر التمييز الأساسي في تعريف الجبر على أنه استخدام المعادلات لإيجاد الأعداد المجهولة عن طريق كثيرات حدود كاملة (تشير كلمة كثيرة حدود إلى عبارة تشتمل على حروف هي بمثابة رموز ، ويمكن أن تشتمل على أكثر من قوة لهذه الحروف) .

وخالف اليونان في رفضهم قبول الأعداد الصماء (تلك الأعداد التي لا يمكن تمثيلها بكسور مثل الجذر التربيعي لـ ٢) . ولكن مساهمته التي انفرد بها ، مع ذلك ، كانت تعرّف ٢٥ نمطا من المعادلات مقابل الأنواع الستة للخوارزمي . وكان قد أرفق أربعة عشر نمطاً من هذه الأنماط بطرائق جديدة استخدمها لحل المعادلات التكعيبية (من الدرجة الثالثة) . وتتضمن هذه خوارزميات جديدة تطلبت استخدام القطوع المخروطية ، حيث أمكن تمثيل هذه بمعادلات تربيعية تمثل أشكالا هندسية مثل الدائرة والقطع الناقص والقطع المكافيء والقطع الزائد أو أجسام فضائية مثل المكعب أو الاثني عشري السطوح أو الرباعي السطوح .

لنفرض مثلاً أن علينا إيجاد قيم X في معادلة من الشكل :

$$X^3 + aX = b$$

قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



الشكلان البيانيان للقطع المكافئ و الدائرة فإن المعادلتين تكونان صحيحتين . و من ثم تكون النقط حلول المعدلة التكعيبية الأصلية .

سنوضح هذا بحل معادلة تكعيبية باستخدام طريقة عمر الخيام . سنحل كذلك معادلات القطوع المخروطية بإسلوب جبري . إن المعادلة التي نستخدمها لتوضيح الخوارزمية لهذا النمط الأول من المعادلات التكعيبية هي المعادلة :

$x^3 + 4x = 16$ لنبدأ بوضع هذه المعادلة بالصورة : $x^3 + 2^2x = 2^2.4$

و هذا يعطينا 2 قيمة P و 4 قيمة a و4 قيمة q . هذا يعني أن معادلة الدائرة و القطع المكافئ هما :

الدائرة : $x^2 + y^2 = 16$

القطع المكافئ : $x^2 = 2y$

يمكن حل هاتين المعادلتين إما بوسائل بيانية أو بأسلوب جبري أكثر بساطة . و نجد في الحالتين أن $x = 2$ هو حل . إذن $x = 2$ تحقق معادلتي الدائرة و القطع المكافئ. و اهتمامنا في هذا هو هل $x = 2$ يُحقق كذلك المعادلة التكعيبية . لبيان ذلك نقوم ببعض العمليات الجبرية البسيطة : إن معادلة الدائرة هي :

$$x^2 + y^2 = qx$$

و هذه يمكن أن تكتب علي النحو الآتي :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{(q - x)}$$

و معادلة القطع المكافئ هي :

$$x^2 = py$$

يعتبر عمر الخيام أول من حاول وضع نظرية عامة لحل معادلات الدرجة الثالثة و ذلك باستخدام هندسة القطوع المخروطية (الدائرة , القطع المكافئ , القطع الناقص و القطع الزائد) و من ثم توصل للنتيجة الرائعة ألا و هي إيجاد حل عام لمعادلات الدرجة الثالثة بواسطة قطعين مخروطين .

ثابت بن قرة (836 – 901 م) و الأعداد الصديقة amicable numbers

عددان مثل 220 و 284 يقال إنهما صديقان لأن كل منهما يساوى مجموع القواسم الموجبة للآخر فنجد قواسم العدد 220 مجموعها هو

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

في حين مجموع قواسم العدد 284 هي $220 = 142 + 71 + 4 + 2 + 1$

الرياضي العربي ثابت بن قرة (6)[1] اللامع كتب مؤلف (إيجاد الأعداد الصديقة) تعرّض فيه إلى 10 قضايا , إحداها إيجاد الأعداد الصديقة: إذا كان لدينا ثلاثة أعداد أولية

$n \geq 2$, $r = 9.\ 2^{2n-1} - 1$, $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.\ 2^{n-1} - 1$, فإن

$M = 2^n.p.q$ و $N = 2^n.r$ هما عددان صديقان . على سبيل المثال عندما

$$\begin{aligned}
&n = 2 \\
&\therefore q = 5, p = 11, r = 71 \\
&M = 2^n.p.q = 2^2.5.11 = 220 \\
&N = 2^n.r = 2^2.71 = 284
\end{aligned}$$

و من هذه العلاقة توصل فيرمات للزوجين 18416 و 17296 و توصل ديكارت للزوجين 9437056 و 9363584 . كما توصل صبي إيطالي عمره 16 سنة اسمه نيكولو بفانيني إلي الزوجين 1210 و 1184 و هما ثاني أصغر زوجين . و في عام 1700 حصد يُلر 64 زوج من الأصدقاء . هنالك اليوم أكثر من 50000 زوج من الأعداد الصديقة معلوم [3][4]

اشتغل ثابت ابن قرة في الحجوم المكعبة والأشكال المربعة وفقاً لأدلة أرشميدس . طريقة ثابت بن قرة في إفناء الفرق تعتبر لمحة من حساب التكامل الحديث وفي بحثه في تربيع القطع المكافئ حدد مساحة القطع المكافئ بطريقة الكميات التكاملية واستنبط القانون التالي لحساب هذا التكامل:

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{أ}} \sqrt{\quad \text{س}}\ \text{د} \quad .$$

كما طبق قسمة قطع التكامل علي أجزاء غير متساوية مكوناً بذلك متوالية عددية. (5)

<u>الكرخي (توفى عام 421هجري – 1020م)</u>

أبوبكر ابن محمد ابن الحسين و لقبه الكرخي – ضاحية بمدينة بغداد – أو الكَرَجي – مدينة في إيران – مختلفٌ عليه . من أهم الكتب التي تنسب إليه كتاب الفخري في الحساب الجبري و فيه استغنى عن التمثيل الهندسي للعمليات الجبرية الذي كان سائداً قبله , و كتاب الكافي و كتاب البديع الذي نجد فيه مفكوك $(a+b)^2$. فيما يعتبر ارهاصات لعملية الإستقراء الرياضي نجد أن الكرجي برهن العلاقة : (6)2

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$$

في فصل من كتابه الفخري يستعيد الكرجي بعض المسائل من نظرية الأعداد مثل

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$
$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i ,....n \in N$$
$$(ab)^n = a^n b^n ,....n \in N$$

السموأل (توفى عام 1175م)

السموأل بن يحي بن عباس المغربي الذي ألف كتاب الباهر في الرياضيات .

برهن السموأل متطابقة ذات الحدين التي أوردها الكرخي آنفاً . انطلاقاً من مفكوك $(a+b)^2$ الذي أورده الكرخي في كتابه البديع يبرهن السموأل المتطابقة في حالة $n=3$, كالآتي :

$$(a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = (a+b)^3$$
$$\therefore (a+b)^3 = a^2 (a+b) + 2ab (a+b) + b^2 (a+b)$$
$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + a^2 b + 2a^2 b + 2ab^2 + b^2 a + b^3$$
$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2 a + b^3$$

و بالطريقة نفسها يبرهن المتطابقة في حالة $n=4$ و يستخدم السموأل معاملات ذات الحدين المستخلصة من مؤلف الكرخي وفق القاعدة التي ابتكرها الكرخي و التي تكافئ $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

يبرهن السموأل المتطابقة

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

انطلاقاً من المقدمة

$$n^3 = n^2 + 2n\sum_{i=1}^{n-1} i$$

و التي يبرهنها أولاً كالآتي

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1) \Leftrightarrow$$
$$2n\sum_{i=1}^{n-1} i = n^2(n-1) \Leftrightarrow n^3 = n^2 + 2n\sum_{i=1}^{n-1} i$$

ثم ينطلق ليكمل البرهان كالآتي

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2 + n^2 + 2n\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= n^3 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2 \\
&= n^3 + \left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)^2 + (n-1)^2 + 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right) \\
&= n^3 + (n-1)^3 + \left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)^2 = \ldots = \\
&= n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 1^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3
\end{aligned}$$

أيضاً , برهن السموأل المتطابقة

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

في مجال التحليل العددي توصل السموأل إلى الصيغة التكرارية : (6)[3]

$$f(x) \approx f(x_k) + \frac{(x - x_k)}{2a^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} a^p}$$

$$x^{\frac{1}{n}} - 1 < a \leq x^{\frac{1}{n}}, a \leq x_{\circ}^{\frac{1}{n}}, x_{\circ}^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}}$$

مثلاً , لإيجاد $\sqrt{5}$ و بأخذ $n = 2, x_{\circ} = \frac{121}{25}, a = 2$. فإن

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_{\circ}} + \frac{(x - x_{\circ})}{2a}$$

$$\therefore \sqrt{x_1} = \sqrt{5} \approx \frac{11}{5} + \frac{1}{25}$$

$$\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} + \frac{(x - x_1)}{2a}$$

في الواقع أنه منذ القرن العاشر - بل و قبل ذلك - نصادف في مختلف الأبحاث الحسابية العربية قاعدة لتقريب الجذر الأصم المربع و المكعب , و هذه القاعدة كانت تسمى في تلك الحقبة (قاعدة الأصفار) و هي موجودة في بحث السموأل كما يلى

$$a^n = \frac{(a.10^{nk})^{\frac{1}{n}}}{10^k}; k = 1, 2, 3, ...$$

و التقريب الحاصل وفق هذه القاعدة بالضرورة يستخدم الكسور العشرية بما يؤكد أسبقية العرب في اكتشاف الكسور العشرية . (6)[4]

شرف الدين الطوسي

على خطى عمر الخيام , استخدم شرف الدين الطوسي – في رسالة كتبها عام 1170 م – معادلة القطع المكافئ و معادلة القطع الزائد لحل معادلات الدرجة الثالثة .

مثال 3

من أجل المعادلة $x^3 + c = ax^2$ و التي يمكن أن تكتب على الشكل $ax^2 - x^3 = c$, درس الطوسي الدالة $f(x) = ax^2 - x^3$ فلاحظ أن المشتقة تنعدم عندما $x = 0$ أو $x = \frac{2a}{3}$ فهناك نهاية صغرى هي $f(0) = 0$ و $f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{-4a^3}{27} = d$ و لهذه المعادلة جذر مكرر هو $x_1 = 0$ وجذر موجب هو $x_2 = a$ و من ثم يستنتج الطوسي :

- إذا كان $c < d$ فإن للمعادلة جذران موجبان x_1, x_2 يحققان

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a$$

- إذا كان $c = d$ فإن للمعادلة حل وحيد
- إذا كان $c > d$ فإن حل المعادلة مستحيل (أي أن الطوسي فقط يعتمد الجذور الموجبة) .

نلاحظ أن الطوسي توصل إلى مفهوم النهاية العظمى و التي كان يطلق عليها العدد الأعظم وصولاً إلى مفهوم المشتقة الذي سيكتمل لاحقاً مع نيوتن .

رغم هذا الإبداع الرياضي للعلماء العرب إلا أن غياب لغة الرموز الرياضية كانت عائق أمام انتشار هذا الإبداع و تطوره . نجد أن ديكارت , و ليس الطوسي , كان أول من أبدع النظام الرمزي . أيضاً نجد فيبوناتشي أول من قبل بمفهوم الأعداد السالبة مفسِّراً إياها بالخسارة المالية , أي دَيْن . بعبارة أخرى توقف العرب عن التجديد في الوقت الذي وضع الأوربيون أيديهم على مفاتيح التجديد .

الباب الثالث

الرياضيات الأوروبية في عصر النهضة

هيمنت المسيحية على الإمبراطورية الرومانية منذ القرن الرابع الميلادي . الحقبة التي سيطرت عليها الكنيسة في أوروبا منذ القرن الخامس حتى القرن الحادي عشر الميلادي تُدعى القرون المظلمة . كانت أوروبا تغط في سبات عميق و خيم التعصب الديني و ساد الإيمان الأعمى و تعطل العقل و أرخى الجهل سدوله على أرجاءها ردحاً من الزمان . كانت الكنيسة هي الوصي على مجمل الحياة الفكرية . كان النشاط التعليمي قابع في الأديرة و قاصر على الدراسات اللاهوتية و تفسير الأناجيل . استفاقت أوروبا في العصور الوسطى على ضوء الإشعاع العلمي العربي الإسلامي في الأندلس و جزيرة صقلية و غيرها من نقاط التماس مع العالم العربي حيث كانت اللغة العربية هي لغة العلم . اشتعلت عملية ترجمة العلوم من العربية إلى اللاتينية رغم مقاومة الكنيسة و حرّمت حكومة فلورنسا عام 1299 استخدام الأرقام العربية (1...9) – بدلاً عن الأرقام الرومانية التي لا تحتوي على الصفر – إضافة إلى عجز العقلية الكهنوتية السائدة من تقبل مفهوم الصفر . يرى وايت (1932-1918) في كتابه (تاريخ النزاع بين العلم و اللاهوت) أن الدين – حسب الخطاب الديني للكنيسة الكاثيلوكية – كان واحد من العوامل التي أضرت بالعلم و وقفت دون الإسراع في تطور مسيرته .

يرجع تقدم العلم في عصر النهضة إلى تقدم الرياضيات في ذلك العصر . و لما كانت أصول الرياضيات ترجع إلى أفلاطون أكثر منها إلى أرسطو فإن عصر النهضة شهد تقدماً مطرداً في العلم الرياضي و من ثم في العلوم جميعاً بفضل تأكيد رجال عصر النهضة على أهمية أفكار أفلاطون و أصالتها . كان أفلاطون بالنسبة لفلاسفة العصور الوسطى فيلسوفاً واقعياً , إذ ذهب إلى أن عالم المثل عالم حقيقي له وجود سابق منفصل عن الأشياء المادية و مستقل عنها .ففكرة القلم مثلاً

كان لها وجود مستقل عن القلم نفسه . أضاف إفلاطون أن جوهر الوجود و أصله هو العدد .

فيبوناتشي Fibonacci 1175 -1250

يعتبر Fibonacci من أعظم الرياضيين في القرون الوسطى , بل و يؤرخ عهده بداية لإرهاصات عصر النهضة (1400 م) في أوروبا في مجال الرياضيات . ولد Fibonacci في Pisa في إيطاليا و درس في شمال أفريقيا . تنقل في شبابه مع والده التاجر في دول حوض البحر الأبيض المتوسط حيث اطلع على نظام الأرقام العربي و أدرك مدى أهميته . عقب عودته إلى موطنه ألف Fibonacci (كتاب الحساب) الذي افتتحه بقوله : هؤلاء تسعة أرقام عربية 1 2 3 4 5 6 7 8 9 إضافة إلى الصفر , نستطيع انطلاقاً منها أن نكتب أي عدد نريده . بحلول العام 1228 مع نسخ الطبعة الثانية من (كتاب الحساب) أصبحت أوروبا على علم الأرقام العربية . ارتبط اسم Fibonacci بما يعرف بمتوالية Fibonacci , الآتية

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\ldots$$
$$F_1=1;F_2=1;F_n=\left(F_{n-2}+F_{n-1}\right).\forall n\geq 3,\ldots$$

في (كتاب الحساب) في قوله (رجل وضع زوجا أرانب في مكان معزول بجدار . كم زوج أرانب سيتناسل من الأبوين خلال عام كامل , إذا كانت طبيعة تلك الأرانب أن كل شهر أي زوجين ينجب زوجان قادران بدورهما على الإنجاب بعد شهر ؟) بفرض عدم موت أيٍ منها . الشيء المدهش أن أي حدين متتاليين في المتوالية أوليان نسبياً (أي أن القاسم المشترك بينهما 1) . كان فيبوناتشي أول من اعتمد الجذور السالبة – الحلول السالبة – معتبراً أياها مديونية .

الحل العام لمعادلة الدرجة الثالثة

عالم الرياضيات الإيطالي كاردان Cardan (1501- 1576) من علماء عصر النهضة . توصل كاردان إلى الحل العام لمعادلة الدرجة الثالثة عام 1545م . على النحو الآتي : لنكتب معادلة الدرجة الثالثة كالآتي

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \ldots (1)$$

ضع

$$x = y - \frac{a_2}{3} \ldots (2)$$

لنحصل على

$$y^3 + py + q = 0 \ldots (3)$$

حيث

$$p = \frac{-a_2^2}{3} + a_1 \quad , \quad q = \frac{4a_2^2}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$$

لتكن x_0 أحد جذور معادلة (3) وإذا كانت

$$f(u) = u^2 - x_0u - p/3 \ldots (4)$$

لتكن α و β جذرا معادلة (4)

$$\alpha + \beta = x_0 \ldots(5)$$
$$\alpha . \beta = {-p}\big/{3} \ldots(6)$$

عوض عن قيمة x_0 من (5) في (3)

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0$$

من (6) و بما أن $3\alpha\beta + p = 0$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q$$
$$\alpha^3 . \beta^3 = \frac{-q^3}{27}$$

لاحظ أن β^3 و α^3 هما جذرا

$$Z^2 + qz - \frac{q^3}{27} = 0$$

لتصبح

$$Z = \frac{-q}{2} \pm \sqrt[3]{q^2/4 + p^3/27}$$

$$\alpha = \left[\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$
$$\beta = \left[\frac{-q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

وعليه فإن الجذور

$$x_0 = \alpha + \beta$$

$$x_1 = \alpha w + \beta w^2$$

$$x_2 = \beta w^2 + \alpha w$$

حيث $w = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $w^2 = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما الجذران

التكعيبيان للواحد الصحيح .

<u>مثال 1</u>

أوجد جذور المعادلة

$$y^2 + 3y^2 - 3y - 14 = 0 \ \ldots(1)$$

الحل

ضع $y = x - \frac{a}{3} = x - 1$

لتصبح معادلة (1)

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$p = -6 \quad , \quad q = -9$$

$$\alpha = \sqrt[3]{9/2 + 7/2} = 2$$
$$\beta = \sqrt[3]{9/2 + 7/2} = 1$$

$$x_1 = \alpha + \beta = 1 + 2 = 3$$

$$x_2 = 1w + 2w = \left[\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2\left[\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{-3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = 1w^2 + 2w = \frac{-3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = x_1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 = x_2 - 1 = \frac{-5}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_3 = x_3 - 1 = \frac{-5}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل معادلة الدرجة الرابعة

فيراري (1565-1522) Ferrari و قد أودعه والده الكنيسة و هو صبي ليكون في خدمة الأب كاردان . تتلمذ فيراري على يد كاردان و أكمل مشوار معلمه و توصل إلى الحل العام لمعادلة الدرجة الرابعة .

سنشرح طريقة الحل من خلال المثال التالي دون أن نخل بعمومية البرهان :-

مثال 2

$$x^4 + 6x^3 + 12\,x^2 + 14\,x + 3 = 0 \qquad ...(1)$$

$$x^4 + 6x^3 = -12\,x^2 - 14\,x - 3 = 0 \qquad ...(2)$$

ندخل λ لإكمال المربع في اليسار بحيث أن

$$(x^2 + 3x + \lambda)^2 = 9\,x^2 + \lambda^2 + 2\,\lambda\,x^2 + 6\,\lambda x + (x^4 + 6x^3\,) ...(3)$$

$$(x^2 + 3x + \lambda)^2 = 9x^2 + \lambda^2 + 2\lambda x^2 + 6\lambda x$$

$$-12x^2 - 14x - 3 \ldots(4)$$

$$= x^2(2\lambda - 3) + x(6\lambda - 14) + (\lambda^2 - 3) \ldots(5)$$

يمكن كتابة يمين معادلة (5) على الصورة $(MX + N)^2$ إذا اخترنا M و N بحيث أن

$$M^2 = 2\lambda - 3,\ MN = 3\lambda - 7\ ,\ N^2 = \lambda - 3$$

$$M^2 \cdot N^2 = (MN)^2$$

λ يجب أن تحقق المعادلة

$$(2\lambda - 3)(\lambda^2 - 3) = (3\lambda - 7)^2$$

$$2\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 40 = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 20 = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad M^2 = 1 \quad , \quad MN = -1 \quad , \quad N^2 = 1$$

عوض $N = -1$ و $M=1$ في(5) يمين(5)هو $(MX + N)^2 = (x-1)^2$

$$(x^2 + 3x + 2)^2 = (x - 1)^2$$

$$x^2 + 3x + 2 = \pm (x - 1)$$

أولا $x^2 + 3x + 2 = (x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$x^2 + 3x + 2 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{3و4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

الإعداد الكاملة Perfect numbers

العدد الصحيح الموجب n يقال أنه عدد كامل إذا كان n يساوي مجموع كل قواسمه الموجبة والتي ليس من بينها n نفسه و تكتب σ (n) – n = n أو σ (n) = 2 n

مثال 3

$P_1 = \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 6 + 6 = (2) . (6)$

$P_2 = \sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 2 . (28)$

$P_3 = \sigma(496)$

$P_4 = \sigma(8128)$

$P_5 = \sigma(33,550,330)$

$P_6 = \sigma(8,589,869,056)$

نظرية إقليدس

إذا كانت $(2^k - 1)$ عدد أولي $k > 1$ فإن $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ عدد كامل .

البرهان

البرهان يعود إلى الأب (Maarin Mersenne 1588 – 1648) .

نجد أن حدود المتوالية $1 , 2 , 2^2,..., 2^{k-1}, 2^k-1 , 2(2^k - 1),...,2^{k-1} (2^k - 1)$

هي قواسم للعدد $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ وليكن $S_1 = 1 + 2 + 2^2 +...+ 2^{k-1} = 2^k - 1$

و $S_2 = (2^k - 1) + 2(2^k - 1) + 2^2(2^k - 1) +.....+ 2^{k-1}(2^k - 1)$

$S_2 = (1 + 2 + 2^2 +.....+ 2^{k-1})(2^k - 1) = S_1(2^k - 1)$

بجمع كل هذه القواسم نحصل علي $\sigma(n) = 2^k(2^k - 1)= 2.2^{k-1} (2^k - 1) = 2n$

إذاً أي عدد زوجي $n = 2^{k-1} (2^k - 1)$ كامل حيث $(2^k - 1)$ عدد أولي .

ملاحظة : لقد ساد اعتقاد خاطئ بان $2^P - 1$ هو عدد أولي لأي عدد أولي P ,
إلا أن H . Regius دحض هذا الافتراء عندما توصل إلى أن :

$$2^{11} - 1 = 2047 = (23) . (89)$$

في الوقت الذي لم يوجد فيه حتى الآن عدد فردي كامل فإنه في نفس الوقت لا نستطيع الجزم بأنه لا يوجد البتة , و تسمى قضية غير قابلة للبت undecidable كما سنتعرف عليها لاحقاً في فلسفة الرياضيات .

الباب الرابع

تاريخ حساب التفاضل و التكامل

رينيه ديكارت (1596-1650).7[3]

ديكارت وعبر مؤلفه في الهندسة التحليلية أحدث ثورة رياضية في القرن السابع عشر مهدت إلى ولادة التفاضل والتكامل من قبل نيوتن وليبنز. وتعتبر أعمال ديكارت نقطة تحول من رياضيات العصور الوسطى إلى الرياضيات الحديثة . ديكارت أسس أفكاره في إعادة تشكيل الفلسفة وتقويمها إستناداً على الرياضيات. كتب ديكارت فيما يعتبر موسوعة في الفيزياء ونظريته حول الكون (الكتلة المتدومة Vortices) لتفسير كل الظواهر الطبيعية . عشية إكماله لأطروحته (العالم) علم ديكارت بحظر الكنيسة لكتاب جاليلو. لقد كان واضحاً من الصعوبة بمكان إزالة الأرض عن موقعها كمركز للنظام الشمسي . ما قام به ديكارت في مؤلفه العالم The world يؤكد ما توصل إليه جاليليو حول خطأ فكرة مركزية الأرض مما حدا به إلى تعليق نشر مؤلفه إلى ما بعد مماته عام 1664. في عام 1637 وفي مقالة نشرها تحت عنوان (مقال في المنهج) ضمنها ملخص مؤلفه (العالم) وفيها تطرق ضمناً لأفكاره الكونية . أخيراً في 1644 نشر ديكارت (أسس الفلسفة) موضحاً فيه تشكل العالم الطبيعي بوسائل من التدرج والطبيعة بعيداً عن المادة والحركة . فلسفة ديكارت الميكانيكية الجديدة سرعان ما أصبحت موضة طاغية سادت و انتشرت عبر الأوساط الثقافية . لقد كان عماد فلسفة ديكارت في ((مقال في المنهج)) الشك المنظم systematic كوسيلة للسعي نحو اليقين ، اليقين الذي وجده في الرياضيات لتكون نموذجاً لفروع أخرى من المعرفة.

ما أثار أهتمام ديكارت كان المسببات أو أسباب الرياضيات لانتائج الرياضيات . لقد كان متلهفاً ليرى فيما إذا كان الاسلوب الرياضي قادر على إستنتاج أي شئ معلوم منطقياً . لقد كانت نقطة البداية البحث عن فكرة لا يرقى إليها الشك تشكل

المنطلق . ولفقدانة الثقة في الطرق التقليدية بدأ ديكارت بالتنصل من أي دوغما مذهبية وتوصل إلى بديهية وجوده كنتاج بما إنه يفكر والتفكير يقتضي وجود المفكر ومن ثم هو موجود: (أنا أفكر فأنا موجود) ثم إنطلق ديكارت ليبحث عن القواعد والتي هي مبرهنة بذاتها ولا يمكن رفضها . يقول ديكارت (لا ينبغي أن نسمح لأنفسنا أن نقتنع بحقيقة أي شئ عدا على الدليل السببي . ثقته المفرطة في السببية أثارت جدل واسع , في أوروبا , بين الايمان والسببية .

تعتبر الهندسة التحليلية- منهج دمج بين الجبر والهندسة- أهم أسهام وإنجاز وإضافة قام بها ديكارت ولولاها لما قدر لحساب التفاضل والتكامل أن يبزغ للوجود . في أسس الفلسفة الذي صدر في أمستردام عام 1644 رفض ديكارت فكرة الخواء في الكون وتبنى وجود مادة أوليه تملأ فضاء المنظومة الشمسية هذه المادة هبة من الله مع حركة أولية محدودة ونتيجة للتدوم تشكلت الكتلة . فسر ديكارت حركة الكواكب ميكانيكياً وأعتبر ديكارت الطبيعة كآلة ميكانيكية والإنسان هو العقل السببي القادر على فهمها وأن الفيزياء ليست سوى هندسة .عدم إتساق نظرية ديكارت (الدوامة) مع قوانين كبلر أدى إلى تقويضها مما قاد إلى رؤية ونظرية جديدة وهي الأسس الرياضية لفلسفة الطبيعة لنيوتن .

لقدكان القرن السابع عشر وبحق قرن الإبداع الأدبي والعلمي البريطاني وبلا منازع ، فهو عصر شكسبير وملتون ونيوتن وهالي . كما شهد الثورة البريطانية المتمثلة في الصراع بين البرلمان والملك شارلس الأول ، ليبدأ عهد شارلس الثاني كنمط لملكية مقيدة لأول مرة كنموذج يحتذى به تقدمه بريطانيا لأوروبا . لقد شهدت هذه الفترة إنشاء العديد من الجمعيات العلمية التي تعنى بالعلم التجريبي وتمتعت بالدعم الملكي . لقد تميزت هذه الفتره بإنتاج غزير ومبدع في الرياضيات والفيزياء الحديثة وإن لم يكن التميز قد بدا واضح بينهما للكثيرين . حساب التفاضل والتكامل الذي إبتكره نيوتن لم يعيد تشكيل وتصحيح مفهوم حركة الكواكب فحسب بل أرسى الأسس المنطقية لمجمل علم الفيزياء. في الوقت الذي

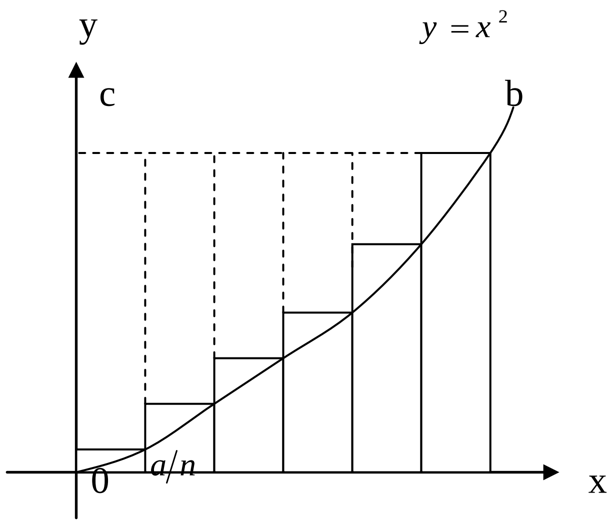
كانت فيه جامعتنا أوكسفورد وكامبردج منغمستا في الدراسات التقليدية ، أي في الطب والقانون واللاهوت ، إستفردت كلية لندن في وضع منهج علمي تجريبي قائم على الهندسة والمثلثات والفلك ومواضيع متعلقة بالمساحة وما شابه ذلك . لم تكن الرياضيات ذات أهمية في المناهج الدراسية ولا زالت تلك المراجع الإغريقية القديمة لإقليدس وبطليموس وأبولونيوس وأرسطو هي فقط المتاحة والسائدة . كل من أراد أن يتطلع إلى دراسات متقدمة ومتطورة في الرياضيات عليه أن يبذل جهد ذاتي خارج أروقة الجامعات وهذا ما قام به بالتحديد علماء عباقرة مثل والسWallis وبارو Barrow ونيوتن Newton .

جون واليس (1616-1703) [3]9

الرياضي البريطاني اللامع الذي غطى المساحة فيما بين ديكارت و نيوتن . إلتحق واليس بجامعة كامبردج كطالب لاهوت و عقب نيله درجة الماجستير عام 1640 تبوأ رتبة مقدسة Holy order وهو ما كان يتوق إليه إلا إنه سرعان ما تخلى عنها عندما قرر أن يتزوج . تحول واليس لدراسة العلوم حتى أصبح في الثانية والثلاثين من عمره أستاذاً للهندسة في جامعة أكسفورد . يعتبر واليس أول من تطرق لإيجاد المساحة تحت المنحنى بمفهوم نهاية المجموع و الذي يعني بمصطلحنا الآن التكامل . و لإيجاد المساحة تحت منحنى القطع المكافئ $y = x^2$ من $x = 0$ إلى $x = a$. حيث جزأ المساحة إلى عدد من المستطيلات n ، عرض كل منها $\frac{a}{n}$. كما إستفاد واليس من عملية الإستقراء التالية

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad , \quad \frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^3} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}, ...$$



النسبة بين مجموع هذه المستطيلات $0\,a\,b$ إلى مساحة المستطيل $0\,a\,b\,c$ هي

$$\frac{\left(\frac{0\,a}{n}\right)^2+\left(\frac{1a}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n\,a}{n}\right)^2}{a^2+a^2+\ldots+a^2}=\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots.+n^2}{n^2+n^2+\ldots+n^2}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\;\rightarrow 3\quad,\left(\equiv\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\bullet\frac{1}{n^3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}\right)$$

و هذه النتيجة وفق الصياغة الحديثة لمفهوم التكامل تكافئ

$$\int_0^a x^2\;dx\,/a^3=\frac{1}{3}$$

و بعد العديد من المحاولات توصل جون واليس إلى الصيغة

$$\int_0^a x^k\;dx=\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

لقيم k موجبة ، سالبة أوكسر .

نيوتن والبرنسيبا

الأسس الرياضية للفلسفة الطبيعية لنيوتن تعتبر قمة الرقي الذهني والفكري و الذي كان بحق علامة فارهة ميزت القرن السابع عشر, عصر العباقرة . يقول نيوتن ((لنضبط أو نقيد الظواهر الطبيعية بالقوانين الرياضية)) . كما أرست البرنسيبا أسس الميكانيك السماوي .

لنبدأ رحلتنا منذ لحظة ولادة نيوتن في نفس العام الذي توفى فيه جاليليو و في يوم عيد الميلاد عام 1642 ولد إسحاق نيوتن في قرية woolsthope قرب كامبردج بإنجلترا لأب مزارع توفى قبل بضعة شهور من ولادة نيوتن . تحملت والدته رعايته و قبل أن تستوفى فتره الحمل ولدته ناقصاً و ضعيفاً و كان الجميع يعتقد أن هذا الرضيع لن يعمر سوى أياماً معدودات . إلا أن نيوتن خيَب كل هذه التوقعات و عمّر 85 عاماً . ولد نيوتن في نفس العام الذي إندلعت فيه الحرب الأهلية الكبرى بين شارلس الأول والبرلمان و كما هو الحال في أوروبا حينها كان الملك يحكم بإسم الحق الإلهي . تولدت في بريطانيا هبة مضادة وثورة أهلية تطالب بالحكم بإسم الشعب ، فيما يعرف أيضاً بالثورة البريطانية (1642-1646) ضد الحكم الملكي الطاغوتي وتدعو- الثورة البريطانية- إلى حكم جمهوري من حكومة يرأسها كرومويل Cromwell الذي أدت وفاته عام 1658 إلى ضعف الكمنولث مما سمح لشارل الثاني بإستعادة عرش بريطانيا عام 1660 وفق نظام ملكي مقيد و حكومة دستورية و تسامح ديني و هذا ما قدمته بريطانيا- بعد مخاضٍ طويل هدأت وأستقرت بعده- لأوروبا من نموذج يحتذى به . في اليوم الذي توفى فيه كرومويل إجتاحت بريطانيا ريح عاصفة من القوة بحيث حاول نيوتن أن يقيس قوتها تارةً بالقفز في إتجاه الريح و تارةً أخرى بالقفز في الإتجاه المضاد ليقيس الفرق بينهما ، و كان نيوتن يذكرها في أواخر حياته ضاحكاً بأنها أول تجربة يجريها في حياته . بالنسبة لشخص سيصبح عبقري لم يعكس نيوتن في بدايته ذلك القدر من الموهبة الذي يبشر بمستقبل مبدع و خلاق يخلق طفرة في

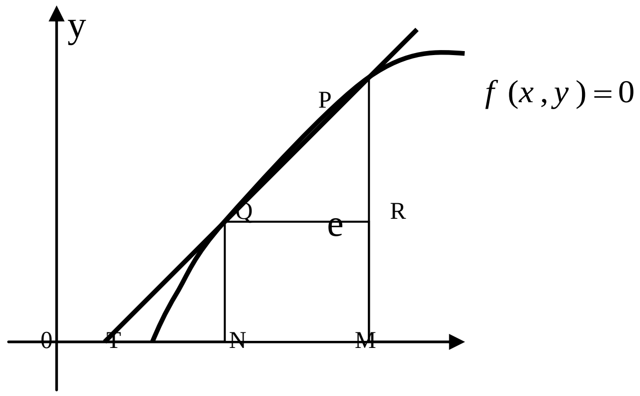
نمط التفكير العلمي . أرسل نيوتن إلى مدرسة في الجوار في الثانية عشرة من عمره حيث لم يبدى إهتمام واضح بالمنهج الدراسي و وصف في التقرير بأنه كسول و غير مهتم و غير منتبه. و عوضاً عن عزوفه عن المناهج الدراسية المقررة كان فطن جداً في خلق تجارب ميكانيكية مثل الساعة الشمسية و ساعات الحائط والتروس المائية . سرعان ما عاد نيوتن من المدرسة بعد عامين إلى المزرعة عقب وفاة زوج والدته . لم يبد نيوتن أي أهتمام بالعمل في المزرعة و لحسن الحظ لاحظ عمه ميوله العلمية فأعاده إلى المدرسة في Grantham ثم لاحقاً أدخله كلية Trinty في كامبردج عام 1661 كطالب معفى من الرسوم الدراسيه نظير أدائه خدمات وضيعة . لقد كانت كامبردج المكان الأمثل لكي يحصل المرء على درجة في القانون و يبدو أن نيوتن إندرج تحت طائل هذا المزاج . لقد كان القرن السابع عشر قريب بما فيه الكفاية ليسوده نمط تفكير العصور الوسطى و يطغى بتقليديته على مناهجه الدراسية و بالكاد تجد ما يشفي غليلك من الرياضيات و العلوم في تلك المناهج و عليك أن تنشد ضالتك منها خارج أروقة الجامعات . كان نيوتن متواضعاً جداً في الرياضيات عندما دخل كامبردج إلا أن عبقريته الرياضية توهجت فجأة . و يحكى نيوتن أن هذه الصحوة الرياضية انتابته عندما وجد صعوبة في فهم كتاب كان قد اقتناه عن الفلك وذلك لعجزه عن فهم حساب المثلثات فانكب عليها حتى إذا أجادها وجد كتاب الإصول لإقليدس من السهولة بحيث أصبح يتطلع إلى شكل متطور من الرياضيات و ذلك ما وجده في كتاب ديكارت الهندسة و كتاب واليس Arithmetica lnfinitorum الذي نشر عام 1656 . لقد تجاوز نيوتن قصوره في الرياضيات في فترة وجيزة جداً نتيجة لموهبته الفذه و في عام 1664 كان قد ألم بالمعرفة الرياضية المتوفرة حينها .

[3]10 <u>إسحاق بارو (1630 -1677)</u> lsaac Barrow

شغله لكرسي الأستاذية ألهب مشاعر نيوتن و ألهمه تطوير مقدرته الرياضية طمعاً في شغل منصب أكاديمي محترم أسوةً باسحاق بارو . أصبح إسحاق بارو عضو في الجمعية الملكية و عمره 33 سنة و كان يعتبر من ألمع الرياضيين في زمانه . تعتبر أبحاث بارو حول رسم المماس على المنحنى وتحديد المساحة المحصورة بين المنحنيات جعلته قاب قوسين أو أدنى من إكتشاف حساب التفاضل و التكامل . لقد كان بارو مزعج و كثير الأسئلة في دراسته لقد كان ثائراً منذ طفولته لدرجة أن والده عندما يصلي كان يدعو الله : إذا كان لابد وأن يأخذ أحد أبناءه فإن أفضل إختيار هو إسحاق . دخل بارو كلية Trinty- الثالوث المقدس – في كامبردج عام 1644 و نال البكالوريا عام 1648 ثم استمر فيها كزميل . لقد كان بارو ضليع في الإغريقية واللاهوت و الفيزياء و الفلك والرياضيات . رفض بارو ترشيحه لكرسي الاستاذية في اللغة الاغريقية لأن المنصب كان يشغله أحد أصدقائه و آثر ترك الجامعة في 1655 في مغامرة سياحية استغرقت أربعة سنوات في أوروبا الشرقية و استقر في القسطنطينية حيث كتب هناك عن الآباء الأوائل للكنيسة . عند عودته إلى بريطانيا في عام 1660 , التي صادفت استعادت شارلس الثاني العرش , تقلد بارو رتبة كنسية مقدسة و قبل بمنصب الأستاذية في الاغريقية التي رفضها أول الأمر و التي ما لبث أن تركها مجدداً بعد سنتين عندما عرض عليه منصب الأستاذية في الهندسة في كلية Greshman بلندن و الذي تركه أيضاً ليشغل كرسي Luccian للأستاذية حيث كان أحد طلابه هناك اسحاق نيوتن ثم أصبح مساعده لاحقاً في تحضير و طباعة محاضراته في الرياضيات وفي الضوء(1669) وفي الهندسة (1670) الذي مثل ذروة البحث الرياضي في القرن السابع عشر و الذي قاد لولادة حساب التفاضل و التكامل و الذي كان ينقصه فقط مفهوم النهايات و بهذا يعتبر بارو المبشر ونيوتن المبتكر . فكرة إسحاق بارو للمماس على المنحنى كخطوة نحو التفاضل , كالآتي :

تضمنت محاضراته الثلاثة عشر في الهندسة مجموعة من النظريات تتعلق برسم المماس على المنحنى و إيجاد أطوال المنحنيات و المساحة المحصورة بين هذه المنحنيات . طريقته لتحديد المماس عند نقطة P على المنحنى $f(x,y)=0$ شبيهة جداً بما هو متعارف عليه الآن من حساب التفاضل و التكامل .

وجد أن المماس يمكن الحصول عليه إذا علمت نقطة أخرى فيه ولتكن T



أنشأ إسحاق بارو المثلث PQR و أسماه المثلث التفاضلي و وجد انه كلما إقتربت النقطة Q من P كلما تشابه المثلثان PQR و PTM أكثر فأكثر ليتشابها تماماً في مرحلة متناهية جداً في الصغر .

وعليه فإن $\frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{M}P} = \frac{QR}{RP} = \frac{e}{a}$

و إذا كانت (x,y) إحداثيات النقطة P فإن إحداثيات النقطة Q هي $(x-e \ , \ y-a)$ و بعد تعويض هذه الإحداثيات في المعادلة $f(x,y)=0$ يمكن إيجاد النسبة $\frac{a}{e}$ و أخيراً يمكن تعيين T بإستخدام طول الوصلة TM كالآتي

$$\mathrm{OT} = \mathrm{OM} - \mathrm{TM} = \mathrm{OM} - \mathrm{MP}\left(\frac{QR}{R\mathrm{P}}\right) = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$$

و كمثال إذا أخذنا $x^3+y^3=r^3$ بأخذ Q نقطة على المنحنى فإن إحداثياتها تحقق المعادلة: $\left(x-e\right)^3+\left(y-a\right)^3=r^3$

$$x^3-3x^2e+3xe^2-e^3+y^3-3y^2a+3ya^2-a^3=r^3$$
$$-3x^2e+3xe^2-e^3-3y^2a+3ya^2-a^3=0$$

و بعد إقصاء الحدود التي تحتوي على قوى e,a نحصل على $3x^2e+3y^2a=0$

وأخيراً فإن $\frac{a}{e}=-\frac{x^2}{y^2}$.

ضرب الطاعون إنجلترا عامي 65 و1966. مات في لندن وحدها حوالي سبعون ألفاً . أغلقت الجامعات أبوابها و رجع نيوتن إلى مزرعته . لم يوقف الطاعون سوى كارثة أخرى ألا وهي الحريق الذي شب في لندن و أودى بنصفها و أحترق أكثر من ثلاثة عشرة ألف منزل و 95 كنيسة . لقد أثمرت الإقامة الجبرية في المزرعة ، فيما أسماها نيوتن السنين الذهبية ، حيث وضع الأسس لدراسة الرياضيات البحتة والضوء والفلك و هي الحقول العلمية التي أرتبطت باسمه في المستقبل . وصل نيوتن - في سنتى عزلته - إلى أهم ثلاثة إكتشافات ، كل واحد منها لوحده كفيل بأن يدخل نيوتن التاريخ من أوسع أبوابه . أولاها توصله رياضياً لطريقة حساب التفاضل و التكامل , الثانية تحليله لضوء الشمس عبر المنشور إلى ألوان الطيف السبعة و االثالثة اكتشافه لقانون الجاذبية الكوني . هذه الإكتشافات تمت خلال عامي الطاعون و لم يتجاوز عمر نيوتن 25 سنه . بعد أن إنحسر الطاعون عاد نيوتن إلى كامبردج عام 1667 و في عام 1668 أنتخب زميلاً في كلية الثالون المقدس و عندما إستدعى إسحاق بارو ليشغل منصب القسيس الخاص بالملك شارل الثاني رشح إسحاق نيوتن لتولي كرسي الإستاذيه خلفاً له و إستمر نيوتن في هذا المنصب حتى عام 1696 و لم يترق للعديد من المناصب الأرفع لأنه كان توحيدي - أي يهودي – و لم يعتنق عقيدة الثالوث المقدس . إضافة إلى تحليله ضوء الشمس عبر الإنكسار إلى ألوان قوس قزح ، توصل نيوتن وعبر

التجربة إلى أن الضوء يتكون من حبيبات مادية متناهية في الصغر corpuscles ورفض فكرة أن الضوء ينتقل عبر أمواج - غير مرئية لا وزن لها - عبر الأثير بإعتبار أن الضوء ينتقل في خطوط مستقيمة مما أدخله في نزاع حاد مع هوك . شعر نيوتن بالتعب والملل من حياة المجتمع العلمي و مكايداته الشبيهة بمكايدات البلاط الملكي فآثر أن يعتزل هذا النمط الإجتماعي ، حتى أعماله و أبحاثه آثر عدم نشرها .[3][11] رياضياً توصل نيوتن إلى المفكوك العام لذات الحدين سوء كان الأس كسر أو سالب (إضافة إلى المفكوك المعروف في حالة الأس موجب) وهو مفكوك لانهائي . مفكوك ذات الحدين لنيوتن كالآتي

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\mathrm{A}Q + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}\left(Q + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots\ldots\right.$$

حيث A و B و C و D كل منها يعبر عن الحد الذي يسبقه , مثلاً $\mathrm{A} = P^{m/n}$

أرسل نيوتن هذه النتيجة إلى الجمعية الملكية التي أعادت نشره باللاتيني مما أتاح للألماني ليبنز- الذي كان يبحث عن أبحاث نيوتن في المتسلسلات اللانهائية- الإطلاع عليها . و معروف أن ليبنز نازع نيوتن إبتكار حساب التفاضل و التكامل

توصل نيوتن و انطلاقاً من صيغة واليس للتكامل $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$ إلى المفكوك الآتي :

$$\int_0^x (1-t^2)\,dt = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^x (1-t^2)^2\,dt = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_0^x (1-t^2)^3\,dt = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$\int_0^x (1-t^2)^n\,dt = x - \binom{n}{1}\frac{1}{3}x^3 + \binom{n}{2}\frac{1}{5}x^5 - \binom{n}{3}\frac{1}{7}x^7 + \dots..$$

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{1}{8}\bullet\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{16}\frac{1}{7}x^7 + \dots\dots\dots\dots.\right.$$

وهنا حاول نيوتن إستنتاج التفاضل

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

ثم أعاد نيوتن الكرة تارةً أخرى في مفكوك $(1-x^2)^{-1}$ وتأكد من صحته عن طريق القسمة المطولة ، هذا البحث ضمَنه نيوتن في مقاله (التحليل) عام 1669 ونشرها واليس عام 1685- من خطابات نيوتن إليه - في الجمعية الملكية .

كما توصل نيوتن إلى النتيجة المهمة الآتية

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2.4.4.6.6.8\dots}{3.3.5.5.7.7\dots}$$

الجاذبية

يحكي ويليام ستلكى زميل الجمعية الملكية وصديق نيوتن قصة نيوتن والتفاحة : أخبرني نيوتن أنه كان جالساً تحت شجرة تفاح في مزرعته وخطرت له فكرة الجاذبية عندما سقطت التفاحة أمام عينيه مباشرة نحو مركز الأرض ، لماذا لم تطير التفاحة لأعلى أو تقع بشكل مائل ؟ مؤكد أن الأرض هي التي جذبتها .

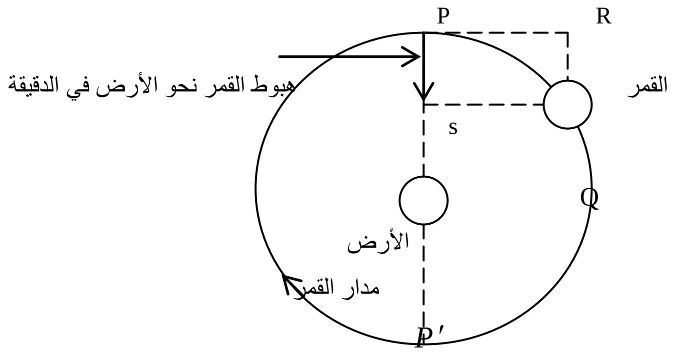
صحيح أن فكرة الجاذبية موجودة منذ جاليليو الذي وصفها بأنها:(تكسب الأجسام نفس التسارع) من خلال التجربة التي أسقط فيها ريشة و حجر في غياب مقاومة

الهواء ليرتطما بالأرض في نفس الوقت إلا أن نيوتن بدأ يتسائل هل نفس القوة - الجاذبية - التي سحبت التفاحة للاسفل نحو الأرض ياترى هل هي نفسها التي تبقي القمرفي مداره ؟ للإجابة على هذا السؤال كان نيوتن محتاج إلى معرفة النسبة التي تنخفض تبعاً لها الجاذبية كلما إبتعدنا عن الأرض لأعلى و هذا ما وجده في قانون كبلر الثالث الخاص بحركة الكواكب و القائل :(مكعب متوسط البعد لكل كوكب عن الشمس يتناسب مع مربع زمن الفترة المدارية لهذا الكوكب).

إتبع نيوتن الطريقة التالية:- لكوكب كتلته M يتحرك بسرعة V حول مدار دائري نصف قطره r فإن القوة الطاردة المركزية هي : $F = \frac{mv^2}{r}$ و إذا كان T زمن الدورة فإن $V = \frac{2\pi r}{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{\mathrm{T}^2}$

و هي القوة المطلوبة ليحتفظ الكواكب بمداره الدائري وبتطبيق قانون كبلر الثالث $\mathrm{T}^2/r^3 = C$, فإن $F = \left(\frac{4\pi^2 m}{C}\right)\frac{1}{r^2}$

فإذا كانت جاذبية الأرض هي التي تبقي القمر في مداره فإن هذه القوة يجب أن تتناسب عكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بينهما . لقد كانت الجاذبية الأرضية معلومة سلفاً بواسطة قانون المربع العكسي للجاذبية على إنها 16.60^2 قدم في الدقيقة كما حسبها جاليليو . المسافة بين القمر و الأرض هي 60r حيث r نصف قطر الأرض . فإذا كان قانون المربع العكسي للجاذبية يتحقق- في السماء - على القمر فإن تأثير جاذبية الأرض على القمر ستكون $1/60^2$ من سحب الجاذبية الأرضية لأي جسم على سطح الأرض . و عليه يجب أن ينجذب القمر 16 قدماً في الدقيقة نحو مركز الأرض .



للأسف انطلق نيوتن في حساباته من معلومة غير دقيقة و هي أن طول أي درجة في خطوط العرض على طول خط الإستواء هي 60 ميل حسب المصدر الوحيد الذي كان متوفر لديه ليحصل على سرعة القمر عند أي نقطة P :

$$\frac{60^2 \,.\, 360 \,.\, 5280}{39,343} = 173,930$$ قدم / دقيقة

أي أن القمر سيقطع القوس P Q الذي طوله 173, 930 في دقيقة .

إذا إستخدمنا PP' لتقريب SP' والقوس P Q لتقريب SQ . وبما أن المثلثين PSQ و QSP' متشابهان و $PS = RQ$ فإن $PS \,.\, SP' = (SQ)^2$

وبإستخدام التقريب آنف الذكر فإن

$$PS = \frac{(arcPQ)^2}{\mathrm{PP'}} = \frac{(173,930)^2 \,.\, \pi}{60.60.360.5280}$$ قدم $= 13.89$قدم

و هي نتيجة تختلف طبعاً عن 16 قدم و صرف نيوتن النظر عن هذه الفكرة العبقرية . في عام 1671 نشر بيكارد ما توصل إليه من طول درجة خطوط العرض وبدقة لتبلغ 69.1 ميل ويبدو أن نيوتن لم يطلع على هذه النتيجة حتى عام 1684 حيث أعاد حساباته بإستخدام هذا القياس الدقيق 69.1 بدلاً عن 60 ولم يستطع نيوتن أن يكمل العملية الحسابية وأرتجفت يداه فصاح إلى مساعده بأن يكمل العملية الحسابية لتكون النتيجة هي 16 قدم مما يؤكد فرضية نيوتن أن

الأرض تسحب القمر نحوها بجاذبية قدرها 16 قدم في الدقيقة و بعدها لم يعد هناك فرق بين طبيعة أرضية و طبيعة أخرى سماوية ، بل هناك طبيعة واحدة . عند هذه النقطة إنطلاقاً من حساباته إكتشف نيوتن إذا كان الكواكب يقع تحت تأثير قوة جذب تتغير وفق قانون نيوتن المربع العكسي فإن مداره سيكون بيضاوي حيث تكمن قوة الجاذبية - في مصدر كالشمس - في إحدى بؤرتيه . رغم أهمية هذه النتيجة إلا أن نيوتن آثر عدم نشرها حتى جاءه إدموند هالي Halley (1656-1742) في نوفمبر 1684 وسأله : ماهو شكل المدارات الذي تسلكه الكواكب حول الشمس تحت وطأة جاذبيتها بقوة تتغير عكسياً مع مربع المسافة ؟ أجاب نيوتن بثقة و بكل سهولة ويسر: بيضاوى . فاسترسل هالي مستفسراً : لماذا ؟ رد عليه نيوتن لأني حسبتها . و للأسف كان نيوتن قد أضاع الأوراق التي تتضمن تلك الحسابات ، و عكف عليها تارةً أخرى وأرسلها إلى هالي . توصل هالي إلى طبيعة مسارات المذنبات Comets و إنها تسير وفق قانون الجاذبية و عندما حسب هالي مسارمذنب عام 1682 وجده تقريباً نفس مسار المذنب الذي أثار إهتمام كبلر عام 1607 وهو نفسه الذي عبر المنظومة الشمسية عام 1531 . أستنتج هالي أن هذا هو نفس المذنب الذي ظل يتكرر على الشمس كل 75.5 سنة عبر مسار بيضاوي مسطح كبير جداً . تنبأ هالي بعودة المذنب (والذي أسماه بإسمه هالي) عام 1759 و فعلاً عاد هالي بعد وفاة هالي و كما تنبأ هالي . العمل الرائع الذي قام به هالي هو إصراره على نيوتن و إقناعه بأن ينشر كافة أعماله بل و تكفل هالي بنشرها على نفقته الخاصة و حفظ للبشرية إرث علمي و فلسفي قيم كان سيهدر سدى ويتشتت ويتبعثر هباءاً منثوراً . و تحت إصرار هالي عكف نيوتن وعلى مدار سنتين تقريباً على كتابة مؤلفه :

The Mathematical Principles of Natural Philosophy

أي : الأسس الرياضية لفلسفة الطبيعة . عام 1685 كان نيوتن قد توصل إلى مفهوم الجاذبية الكوني و كما أشار إلى ذلك في كتابه البرنسيبا : (هناك قدرة على

الجاذبية - لكل الأجسام - تتناسب مع كمية المادة المحتواة في الجسم) و (تعمل الجاذبية وفق كمية المادة في الجسم و تتناقص دائماً عكس مربع المسافة الفاصلة ، بإختصار فإن قانون الجاذبية الكوني ينص على أن كل جسمين كتلتهما M وm يجذب كلٌ منهما الأخر بقوة كالآتي

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

G ثابت الجاذبية و d المسافة بينهما .

كما ثبت نيوتن في كتابه البرنسيبا قوانين الحركة الثلاثة

1 - أي جسم يستمر على وضعه من حركة أو سكون في حركة منتظمة على خط مستقيم مالم تؤثر عليه قوة خارجية تغير وضعه .

2 - معدل التغير في الحركة يتناسب مع القوة.

3 - لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد في الإتجاه.

القانونان الأول و الثاني هما صياغة لمفهوم التجارب التي كان قد توصل إليها جاليليو في حين أن القانون الثالث هو من صميم إبتكار نيوتن . يقول نيوتن إنه تعمد أن يكتب البرنسيبا بإسلوب معقد و عويص حتى يبعد الفضوليين و المتطفلين على الرياضيات عن الخوض فيه . كان يشعر نيوتن بأن هناك نقص في نظرية الجاذبية و يتمثل في الجهل بماهية الوسط الذي يفترض أن تنتقل الجاذبية عبره بين جسمين بعيدين جداً عن بعضهما البعض . و قال نيوتن : (ليس لدى أي فرضية أقولها) . و ظل هذا الوسط لغزاً عصياً طيلة قرون حتى توصل إليه إينشتاين في نظريته النسبية العامة للجاذبية ألا و هو مجال الجاذبية , شبيه بفكرة المجال الكهرومغناطيسي .

يصف نيوتن الكون- لم يكن في عهد نيوتن يتجاوز المنظومة الشمسية - عبارة عن ماكينة ضخمة و أن الحركة تعزى إلى محرك أولى و أن الكون – أو المنظومة الشمسية في عهده – لا يمكن أن يوجد أو يخلق بمعزل عن يد الإله و أن هناك

كنترول إلهي يحكم الكون . أخيراً إستغرق نيوتن في أبحاث لاهوتيه حول سفر دانيال و سفر جون Apocalpse of Jhon نشرت عام 1733 و بعد وفاته . تعرض نيوتن , شأنه شأن كبار علماء الرياضيات والفيزياء ، مثل كانتور وغيره لأزمة عقلية و انهيار عصبي و تشكك الناس في أن مقدرته العقلية قد إنتهت و للأبد و عندما حاول برنوللي أن يختبره في مسألة عام 1697م لإيجاد منحنى تصعد فيه الأشياء من نقطة لأخرى ليست أسفلها مباشرة في أقل زمن , توصل نيوتن إلى الحل في أقل من يوم واحد . و في عام 1716 و كان عمر نيوتن 64 عام سأله ليبنز عن إيجاد مسار مقذوفات عمودية لعائلة من القطوع الزائده لها نفس الرؤوس . توصل نيوتن لحلها في بضع ساعات كما أفاد بذلك خصمه اللدود ليبنز . يقول نيوتن : (لا أدري كيف أبدو للعالم و لكن أبدو لنفسي كطفل يلعب على الشاطئ يتسلى ، يجمع الحصاة و بعض القواقع في حين تظل الحقيقة الغائبة عني هي ذلك المحيط ورائي) . توفى نيوتن في 20 مارس عام 1727 و وري جثمانه الثرى في مقبرة بجانب عظماء بريطانيا .

ليبنز Gottfried Leibniz (1646-1716)

لقد كان اكتشاف التفاضل و التكامل أهم إنجاز علمي و ذهني في القرن السابع عشر . تم التوصل إلى اكتشاف التفاضل والتكامل من قبل عالمين إسحاق نيوتن في انجلترا و ليبنز في ألمانيا كلٌ على حده و في آن واحد و ثار جدال عنيف حول أسبقية كل منهما عن هذا الإنجاز . ولد ليبنز في المدينة الجامعية في Leipzig حيث كان يعمل والده بروفيسرا في الفلسفة و الذي توفى و لم يزل ليبنز في السادسة من عمره . ترعرع الغلام بين الكتب و لم يبلغ الثامنة حتى تعلم بنفسه اللاتينية ثم عكف على الإغريقية حتى الثانية عشر من عمره . التحق بالجامعة في الخامسة عشر من عمره و كان واضحا تفوقه على أقرانه . بدأ ليبنز الدراسة التقليدية المتبعة حينها في اللاهوت و الفلسفة إضافة إلى دراسة

سطحية في علم الحساب لم تحظى باهتمام ليبنز . حاول دراسة كتاب ديكارت في الهندسة بنفسه لكنه لم يفلح إذ وجده أكثر تعقيدا فعكف على دراسة بعض المواد الرياضية في العطلة الصيفية . في عام 1666 وضع نظرية التباديل و التوافيق إلا أنها لم تكن تحتوي على إضافة جديدة معتبرة . حاول ليبنز جاهداً إبداع لغة رياضية سببية و عقلانية يمكن بواسطتها التعبير عن كل المفاهيم العلمية . عندما تقدم ليبنز للدكتوراة في القانون رفض طلبه من قبل الكلية لصغر سنه , لكن في حقيقة الأمر الرفض كان نتيجة للغيرة من مقدرته و مهاراته الفائقة . غادر ليبنز مدينته إلى جامعة Altdorf التي منحته الدكتوراة في نفس مقالته التي أعدها سابقا و رفضت في مدينته . لقد كانت رحلة ليبنز إلى فرنسا في عام 1672 و حتى 1676 مثمرة خاصة في الجانب الرياضي حيث التقى في باريس بالعالم الهولندي هايجنز . حتى وصوله إلى باريس لم يكن ليبنز قد تأهل رياضيا بقدر كافي مقارنةً – مثلاً - بإسحاق نيوتن الذي وجد أستاذ كفؤ مثل إسحاق بارو . نستطيع القول أن هايجنز تبنى ليبنز لِما لمحه فيه من نبوغ . لقد كان ليبنز يتمتع بمقدرة فائقة في إيجاد مجموع أي متسلسلة لانهائية قد تخضع لقانونٍ ما شرط أن تكون تقاربية . حاول هايجنز اختبار ليبنز فطلب منه إيجاد مجموع المتسلسلة .

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

و بحيلة بارعة كتب ليبنز الحد العام $\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ ليعيد صياغة المتسلسلة كالآتي

$$\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+..........$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+........=2$$

في حينها أيضاً طور ليبنز الآلة الحاسبة التي توصل إليها باسكال و التي كانت قاصرة علي عمليات الجمع والطرح . ليبنز طورها لتستوعب عمليتا الضرب و القسمة كتكرار لعمليتي الجمع والطرح . تحول ليبنز في باريس من رياضي مبتدئ إلي مقتدر و كأول ثمرة كانت المتسلسلة المترددة الشهيرة و التي حملت اسمه

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}...$$

ثم مضي لينز متثاقلاً في وضع أسس و قواعد لأفكاره و ترجمته لحساب التفاضل و التكامل . اكتشف عدة طرائ ق لإيجاد خطوط المماس للعديد من المنحنيات . في الوقت الذي لم يعهد فيه من قبل أن توصل أحدهم للمسألة العكسية و هي إيجاد معادلة المنحني انطلاقا من خواص المماس لهذا المنحنى , فقد صاغها ليبنز لأول مرة علي النحو الآتي : (لإيجاد المحل الهندسي للدالة محققاً أن المحل الهندسي locus الذي يحدد المماس معلوم) . و في عام 1673 أكمل ليبنز اكتشاف هذه المسألة لتصبح لاحقاً ما يعرف بالتكامل . في كفاحه لإيجاد الرموز المناسبة للتفاضل و التكامل استخدم اللفظ اللاتيني $omnia$ و التي تعني الكل كدلالة على المجموع sum واستخدم الحرف L للفرق dy بين كل قيمتين متجاورتين . مثلاً

Omn . xL = x omn . L – omn . omn . L

ثم طور الرمز إلي التكامل $\int$ و الذي يشبه الحرف S الدالة علي المجموع sum

$$\frac{\int \overline{L}^{2}}{2} = \iint \overline{L}\,\frac{L}{a} \quad and \quad \int \overline{xL} = x\int \overline{L} - \iint L\,.$$

و هي وفق الصياغة الحديثة المتداولة الآن

$$\tfrac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int \left(\int dy\right) \text{ and } \int x\,dy = xy - \int y\,dx$$

كل هذا صدر في مخطوطة (لم تنشر) بتاريخ 29 اكتوبر 1675. مضي ليبنز قُدماً , ليجاوب علي الأسئلة :

متي d(xy) تساوي dx dy و $d\,\frac{x}{y}$ تساوي $\frac{dx}{dy}$ توصل ليبنز في يوليو عام 1677 إلي قانون مشتقة حاصل الضرب حيث طرح xy من المقدار $(x+dx)(y+dy)$ و أهمل المقدار dx dy لصغره ليصل إلى الصيغة :

$d(xy) = xdy + ydx$ و لإيجاد تفاضل القسمة $Z = x/y$ وضع $x = Zy$

و استخدم قانون الضرب $dx = Zdy + ydZ$ مما قاده إلى

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{dx - \left(x/y\right)dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

و في نوفمبر عام 1676 أصبح قادراً علي إيجاد القانون $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ لأي عدد صحيح أو كسر n . طور ليبنز تدريجياً التفاضل و التكامل مستحدثاً و مطوراً رموزها دون أن يستخدم مفهوم النهايات البتة حيث كان التفاضل مبني علي مفهوم الفرق في حين كان التكامل مبني علي المجموع . لقد كان دالمبيرت

Jean d`Alembert (1717-1783) أول من قال بأهمية النهايات في التفاضل و التكامل و توصل إلي الصيغة الآتية : $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

لقد أنجز ليبنز مشروعه في التفاضل و التكامل بحلول العام 1676 . ارتاب ليبنز , إلا أنه لم يتأكد بعد بأن نيوتن توصل إلى مقاربة مكافئة للتفاضل و التكامل . لقد تركز عمل نيوتن – وهو في العشرينات من عمره – في بحث لا يتجاوز 30 صفحة تطرق فيه للمماس و الالتواء و المساحة و مركز الجاذبية في (التحليل) (De Analysis) و بدون برهان صاغ نيوتن المساحة تحت المنحنى $y = ax^{m/n}$:

إذا كانت $y = ax^{m/n}$ فإن المساحة $\frac{nax^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$. توصل نيوتن بصحة إلى التكامل $\int_0^x at^{\frac{m}{n}}\,dt$. في عام 1671 نما مشروع نيوتن في التفاضل و التكامل في طرق المتسلسلات والتغير في الحركة

(on methods of series and Fluxions)

إلا أن نيوتن فشل في طباعته و لم ينشر إلا بعد 65 عاماً في 1736 . نشر ليبنز أبحاثه في التفاضل و التكامل عام 1684 في مسودة بحثه بعنوان The Acta Eruditorum في مجلة des Savants و لأنه مكتوب باللاتينية فقد اكتسب شهرة عالمية . لقد كانت الرموز التي استخدمها ليبنز أسهل و أكثر قبولاً من تلك التي استخدمها نيوتن مما سمح لها بالانتشار.[19][3]

الباب الخامس

تاريخ و فلسفة الاحتمالات

نظرية الاحتمالات هي لا شئ سوى صياغة للحس المشترك common sense في لغة رياضية .

أصل نظرية الاحتمالات

يعتبر ميلاد نظرية الاحتمالات مدين لعمليات المراهنة و لعب الميسر . لقد عرفت البشرية لعب الميسر منذ أقدم عصورها و في مختلف المناطق . كانت الكهانة تمارس ضرباً من الرهان في الطقوس الدينية القديمة . مثلاً إجراء القرعة لاختيار الشخص – تعيس الحظ – الذي سيقدم قرباناً للآلهة الوثنية . الكاهن الوسيط بين الآلهة و البشر - و الذي يعبر عن رغبات الآلهة - يرمي بالنرد على أرضية المعبد و يتأول الناتج كجواب عن رضا الآلهة من عدمه . لم يكن هناك ما هو عشوائي , لا يوجد حظ لأن تأثير الآلهة مطبق على كل شئ و إرادتها تحكم مجريات الأمور صغيرها و كبيرها , إنها الجبرية القاهرة و القدر المحتوم الذي لا يملك الإنسان عنه فكاكاً . حتى النتائج التي تمخضت عن رمي النرد تنسجم مع إرادة الآلهة و تخضع لها . أقدم نرد أثري أكتشف في شمال العراق و يرجع تاريخه إلى 5000 سنة قبل الميلاد . ظهر النرد بوجوهه الستة المألوف لدينا قبل ميلاد المسيح . إبان حصار طروادة (1200 قبل الميلاد) الذي استمر عشر سنوات أبدع الجنود , الذي دب في قلوبهم السأم , خلاله العديد من ألعاب الميسر . في عهد الإمبراطورية الرومانية كانت المقامرة بواسطة النرد إحدى وسائل الترفيه و التسلية . الإمبراطور الروماني Claudius (10 ق.م – 54 م) كرّس معظم وقته للمراهنة بالنرد و ألف كتاب بعنوان (كيف تفوز باستخدام النرد) . على الرغم من انتشار الميسر بين الإغريق و الرومان

و استحسانه إلا أنه كان محرم قطعياً عند اليهود و عقوبته الإعدام , و ذلك لأن المقامر يربح شئ مقابل لا شئ . يرجع أصل لعب الورق (الكوتشينة) إلى المصريين و الصينيين و الهنود و لم تعرفه أوروبا إلا في مطلع القرن الرابع عشر . في العصور الوسطى شنت الكنيسة المسيحية حملة شعواء ضد اللعب بالنرد و الورق (الكوتشينة) و ذلك لما يخالطهما من سب و شتم و شرب خمر و فسوق و مجون . حرّم لويس التاسع (1214 – 1270) ملك فرنسا اللعب بالنرد و منع صناعته في أرجاء مملكته .

الميسر , أياً كانت أدواته , بالطبع محرَّم في الإسلام بنص القرآن (يا أيها الذين آمنوا إنما الخمر و الميسر و الأنصاب و الأزلام رجسٌ من عمل الشيطان فاجتنبوه لعلكم تفلحون . إنما يريد الشيطان أن يوقع بينكم العداوة و البغضاء في الخمر و الميسر و يصدكم عن ذكر الله و عن الصلاة فهل أنتم منتهون)) المائدة الآيات 90 - 91 إلا أن مجرد اللعب بالنرد أو الورق بدون مقامرة ليس هناك ما يجزم أو يفيد بتحريمه . سبعة آلاف سنة من ممارسة الميسر و اللعب بالنرد و الورق مهدت لبعض إرهاصات نظرية الاحتمالات و ظهور المبادئ الأولية لها . لم يتبلور ارتباط واضح بين المراهنة و الرياضيات إلا في وقت متأخر . ربما لم يكن النرد المستخدم قديماً يتمتع بقدر كافي من الاتزان و الانتظام و تكافؤ للفرص يوحي أو يقود إلى بعض قوانين الحظ و الصدفة و الاحتمال , إضافة إلى غياب الرموز الرياضية الملائمة أعاق الوصول إلى تلك القوانين . أو قد يكون المبرر المعقول هو أن مفهوم العشوائية و الحظ و الصدفة دخيل على نمط التفكير السائد و المبني على الحقيقة المطلقة حسب تعاليم الكنيسة بل و حتى المعتقدات الكهنوتية العتيقة الجبرية و التي تعتقد و تسلم بإدارة الآلهة المباشر لشئون الأرض . نتيجة لكل هذا و ذاك تأخر كثيرا منهج أو مدرسة تأخذ في حسبانها الحظ و الصدفة .

الفكرة السائدة التي تفيد بأن نظرية الاحتمالات بدأت كفرع للرياضيات لأول مرة نتيجة الرسائل المتبادلة بين عالمي الرياضيات باسكال و فيرمات عام 1654 . إلا أن هذا غير صحيح على وجه الدقة ربما لسنوات عدة خلت قبل أن يفلح كل من لابلاس و فيرمات في تعريف (القيمة الصادقة للحظ) , عالج بعض الرياضيين العديد من المسائل ذات الطبيعة الاحتمالية . على الرغم من ذلك من الإنصاف الاعتراف بأن الفضل يرجع لجهود باسكال و فيرمات في أعطاء دفعة حيوية , عبر سلسلة من الأفكار , مهدت و بلورت لنظرية الاحتمالات على الوجه الذي نألفه اليوم .

كاردان عالم الرياضيات الإيطالي – الذي توصل إلى الحل العام لمعادلة الدرجة الثالثة - كتب عام 1550 , فيما يعتبر أول بحث يربط بين ألعاب الحظ و مبادئ نظرية الاحتمالات و لم ينشر إلا بعد وفاته عام 1663 وضع أول تعريف كلاسيكي للاحتمال : (احتمال حدوث ظاهرة معينة هو النسبة بين عدد الحالات الموائمة إلى مجمل الحالات الممكنة , شرط أن كل الحالات الممكنة متساوية الاحتمال) . مثلاً في عملية رمي قطعة نقود فإن مجمل الحوادث هما اثنان , ظهور الصورة أو ظهور النقش , و يصبح احتمال ظهور الصورة هو 2/1 و هو نفسه مساوٍ للاحتمال الآخر لظهور النقش , لأن ظهور كل واحدٍ منهما يتمتع بفرصة واحدة فقط . مثال آخر عند رمي النرد تتكافأ فرص ظهور أي وجه من وجوهه الستة {1, 2, 3 ,4 ,5 ,6 } في حين إن مجمل الطرق هو 6 و يصبح مثلاً احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 4 هو 6/1 و احتمال أن الوجه الذي يظهر يحمل رقم زوجي هو 6/3 لأن هناك ثلاثة أوجه تحمل رقم زوجي و هي الاثنان و الأربعة و الستة و بالتالي مجموع الطرق الممكنة 3 في حين أن مجمل كل الطرق هي 6 . يعتبر كاردان الأب الشرعي

لنظرية الاحتمالات الحديثة . بدأت الاحتمالات كعلم تجريبي ثم تطورت لاحقاً في اتجاه الرياضيات . تفرعت الاحتمالات إلى فرعين :

أولاً : كحلول للمسائل المتعلقة بالحظ في ألعاب الرهان .

ثانياً : معالجة البيانات الإحصائية الخاصة بالتأمين و جداول المواليد و الوفيات .

باسكال (Blaise Pascal 1623-1662)

يعتبر باسكال من الآباء المؤسسين لنظرية الاحتمالات . لقد كان باسكال بارع و موهوب في العديد من المجالات , فهو رياضي مبدع و فيلسوف لاهوتي و أيضاً فيزيائي تجريبي . أحرز باسكال تقدماً كبيراً فيما يتعلق بمعاملات مفكوك ذات الحدين كان من شأنه أن مهد لإرساء قواعد نظرية الاحتمالات . لقد كان العام 1654 علامة فارهة في تاريخ نظرية الاحتمالات , بل أصبح العام الذي يؤرخ فيه لميلاد النظرية . النبيل الفرنسي دي مير , الذي كان مولعاً بالمراهنات , نتيجةً لبعض المسائل المزعجة التي واجهته في عمليات الرهان أرسل بعض الأسئلة مستفسراً من باسكال , مما أثار فضول باسكال . باسكال بدوره أشرك معه الرياضي الضليع و اللامع في عصره فيرمات , و من خلال الرسائل المتبادلة بينهما أسس الرجلان القواعد التي شيُّد عليها صرح نظرية الاحتمالات . كان دي مير رجل متقد الذكاء وعلى قدر من المعرفة الرياضية , و إن لم يكن ضليعاً فيها , مكنته من إجراء بعض الحسابات الاحتمالية في عمليات الرهان . كتب دي مير إلى باسكال قائلاً : (لقد اكتشفت في الرياضيات أشياء جديدة لم تتطرق لها الرياضيات العتيقة) و يضيف دي مير موضحاً المشكلة التي واجهته : (إذا كان لدينا نرد مكتمل له ستة وجوه مرقمة من واحد إلى ستة و النرد متزن بحيث أن أي وجه من الوجوه يتمتع بنفس الحظ في الظهور , و هذا يعني

أن احتمال ظهور الوجه ستة عند رمي النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$ و هذا يكافئ أن نقول احتمال عدم ظهور الوجه ستة عند رمي النرد مرة واحدة هو $\frac{5}{6}$. إذا رمينا النرد مرتان فإن هناك 6×6 حالة ممكنة منها 5×5 حالة ممكنة من عدم ظهور الوجه ستة و يصبح احتمال عدم ظهور الوجه ستة في كلا الرميتان هو $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. و يصبح عدم ظهور الوجه ستة في عدد نون من الرميات هو $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, و عليه فإن الوضع المعاكس و هو ظهور الوجه ستة على الأقل مرة واحدة يحدث باحتمال $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$.

على سبيل المثال لو أخذت $n = 4$ فإن طرف المتراجحة الأيمن هو 1296/671 و هو فعلاً أكبر من النصف , لذا وجد دي مير من المجدي له و المربح أن يراهن على ظهور الوجه ستة مرة واحدة على الأقل خلال أربع رميات للنرد .

جيمس برنوللي James Bernoulli 1654-1705

ولد برنوللي في نفس العام الذي شهد مولد نظرية الاحتمالات نتيجة الرسائل المتبادلة بين باسكال و فيرمات . ألف جيمس كتاب بعنوان (فن التخمين The Art Of Conjecturing) . استغرق تأليف الكتاب زهاء عشرون عاماً , و لم يطبع إلا عقب وفاته بثمانية أعوام . تضمّن الكتاب أربعة أجزاء , الجزء الأول منه عبارة عن ملخص ما توصل إليه الهولندي هايجنز (1629 – 1695) من مفهوم هام في الاحتمالات و الرياضيات ألا و هو " التوقع الرياضي " و الذي أسماه حينها (قيمة الصدفة The value of the chance) . الجزء الثاني

تضمّن التباديل و التوافيق . الجزء الثالث احتوى 24 مسألة متعلقة بألعاب الحظ و الصدفة التي كانت_سائدة تلك الأيام . الجزء الأخير احتوى مسائل تطبيقية على الأخلاق و الاقتصاد و الشئون المدنية و على الرغم من أن جيمس لم يكمله إلا أنه يعتبر أهم إنجاز تطرق فيه لنقاش فلسفي مستفيض للمسائل المتعلقة بنظرية الاحتمالات و علاقة التوقع الرياضي بالأخلاق و توصل إلى أن الاحتمال ما هو إلا (مقياس لدرجة اليقين) . وضع برنوللي برهان للنظرية الشهيرة التي حملت اسمه و التي أطلق عليها بواسون اسم " قانون الأعداد الكبيرة " . أصبحت نظرية برنوللي حجر الزاوية في كثير من التطبيقات من رمي النرد و لعب الورق إلى الإحصاء الرياضي و نظرية الخطأ العشوائي و المسائل الديموغرافية . لقد توصل برنوللي و بعد مخاض عسير في التجربة متعددة الرميات – مثل تجربة رمي قطعة النقود عدد نون من المرات – و التي فيها احتمال النجاح p و احتمال الفشل $q=1-p$ و جد برنوللي أن احتمال مشاهدة عدد r نجاح في عدد n رمية هو الحد الرائي من مفكوك ذات الحدين $(p+q)^n$ و الذي هو

$$P(n,r) = C(n,r)\, p^r q^{n-r}$$

دي موافر De moiver 1667-1745

المعلم الآخر البارز في تطور نظرية الاحتمالات ما نشره دي موافر عام 1718 بعنوان (مذهب الصدفة doctrine of chance) و تضمّن حساب احتمالات الحوادث في الألعاب و التأمين مدى الحياة . مع ازدياد قيمة المضروب $n!=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$

توصل دي موافر و جيمس سترلنغ إلى الصيغة الآتية

$$n! = \sqrt{2\pi n}.\, n^n.\, e^{-n}.$$

أعمال برنوللي و دي موافر أثارت اهتمام واسع و أدت إلى تطبيقات عريضة في تقدير الخطأ و دراسة النظم السياسية و التغيرات في التجمعات السكانية و الظواهر الاجتماعية (مثل متوسط طول العمر أو الزواج).

لابلاس P.S.Laplas 1749-1827

لابلاس قاد نظرية الاحتمالات إلى أبعد من مجرد ألعاب الصدفة و الحظ , قادها إلى آفاق علمية جادة و مفيدة . تفتقت عبقرية لابلاس في الاحتمالات و في نشوء نظرية الإحصاء الرياضي. تطرّق لابلاس في أبحاثه إلى عملية تحليل الخطأ المحتمل الوارد في الملاحظات . و كان من أروع ما كتب ما يعرف بقاعدة المربعات الصغرى لتصغير عدم اليقين في عدد من الملاحظات المستقلة . نشر سلسلة من الأبحاث جمعها في مؤلفه (نظرية التحليل الاحتمالية) عام 1812 . الجزء الأول يتعلق بحساب التفاضل و التكامل و الدوال المولدة . الجزء الثاني و يتكون من نظرية الاحتمال المناسب و نظرية النهايات و نظرية الإحصاء الرياضي . تتأسس نظرية الصدفة من أن نختزل كل الحوادث من نفس النوع إلى رقم معيّن من الحالات متكافئة الفرص , ثم وضع لابلاس التعريف الكلاسيكي للاحتمال : (احتمال ظهور حادثة ما هو النسبة بين عدد حالات ظهور تلك الحادثة إلى عدد ظهور كل الحالات الممكنة) و ذلك عندما نفتقر إلى اليقين الذي يحتم ظهور حادثة ما دون غيرها من الحوادث , مع الأخذ بعين الاعتبار أن كل الحوادث متكافئة الفرص . صاغ لابلاس عملية جمع و ضرب الاحتمالات , و تعرف العناصر الثلاثة الأولى من التالي ببديهيات الاحتمال :

1 - قيمة الاحتمال دائماً لا سالبة
2 - احتمال الحادثة المطلقة (أي تلك الصائبة منطقياً) قيمته الواحد , ويتبع ذلك إن قيمة احتمال الحادثة المستحيلة (أي تلك الخاطئة منطقياً) صفراً

3 - جمع الاحتمالات :إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتان (أي لا يمكن أن يحدثا معاً في نفس الوقت , مثل حادثتا ظهور الطير أو النقش في عملية رمي قطعة النقود) فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4- ضرب الاحتمالات : إذا كانت الحادثتان A , B مستقلتان (أي ظهور الحادثة A لا يؤثر في ظهور أو عدم ظهور الحادثة الأخرى B) فإن

$$P(A.B) = P(A)P(B)$$

لابلاس و انطلاقاً من بيانات عينة إحصائية , حسب النسبة بين عدد سكان بعض المقاطعات m إلى عدد المواليد السنوي n في تلك المقاطعات . و قدر عدد سكان فرنسا من الصيغة P=N(m/n) . حيث N هو إجمالي عدد المواليد السنوي للأمة . الخطأ الذي وقع فيه لابلاس أن اليقين الذي تتمتع به العلوم الطبيعية هو نفس اليقين الذي تتمتع به العلوم الإنسانية .

<u>التوقع الرياضي</u> : هو مجموع حاصل ضرب كل حادثة في احتمالها . مثلاً التوقع الرياضي عند رمي النرد هو : $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$

يقال أن اللعبة عادلة إذا كان التوقع الرياضي لها صفر . التوقع الرياضي يعني متوسط ما يدفعه المراهن عند تكرار اللعبة عدد كثير من المرات . و بالتالي فإن مقدار $\frac{7}{2}$ الذي سيدفعه المراهن يعتبر مبلغ عادل لأنه إذا كرر الرهان لعدد كثير من المرات فإن متوسط ما سيربحه هو صفر . هناك مفارقة شهيرة في عملية التوقع الرياضي تعرف بمفارقة بطرسبيرغ St.Petersburg Paradox و كان أول ما صاغها نيكولاس بيرنوللي عام 1713 ثم أعاد صياغتها دانيال بيرنوللي عام 1738 على النحو التالي : لاعبان (أ) و (ب) اتفقا على أن يلعبا لعبة رمي قطعة نقود . تستمر اللعبة حتى تظهر أول صورة . اللاعب (ب) يعطي اللاعب (أ) قطعة نقود إذا ظهرت الصورة أولاً في أول رمية , قطعتا

نقود إذا ظهرت الصورة أولاً في ثاني رمية , أربع قطع نقود إذا ظهرت الصورة أولاً في ثالث رمية ... و هكذا . ما هو المبلغ أي (التوقع الرياضي) الذي يجب أن يدفعه (أ) إلى (ب) – كرسوم – قبل بدء اللعبة حتى تكون اللعبة عادلة ؟ . لأنه لا يوجد حد منطقي أو نهاية لعدد النقش الذي يمكن أن يظهر قبل أن تظهر أول صورة يجب على (ب) أن يدفع 2^{n-1} قطعة نقود إذا ما ظهر نقش في أول ن-1 رمية قبل أن تظهر أول صورة . احتمال أن الصورة تظهر أول مرة في الرمية ن هي $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, و يصبح التوقع الرياضي للاعب (أ) هو :

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty$$

يجب على اللاعب (أ) أن يدفع مقدماً مبلغ لا نهائي للاعب (ب) و هذا بالطبع يبدو سخيف . لكن مهما دفع اللاعب (أ) من مبلغ للاعب (ب) يظل هو الرابح في النهاية إذا تكررت اللعبة إلى عدد كبير جداً . على الرغم من (أ) سيربح آخر المطاف إلا أنه من المؤكد لن يجرؤ على دفع مبلغ خرافي مسبقاً كرسوم لدخول اللعبة . من الناحية العملية تم إجراء تجربة ($1)_3$ لرمي قطعة نقود و وجد في 2084 لعبة من رمي قطعة النقود أن 1061 أظهرت صورة من الرمية الأولى , 494 في الرمية الثانية , 232 في الرمية الثالثة , 137 في الرابعة , 56 في الخامسة , 29 في السادسة , 25 في السابعة , 8 في الثامنة و 6 في التاسعة . وفق حساب التوقع الرياضي يجب على (أ) أن يدفع للاعب (ب) ما مجموعه 10057 قطعة نقود على ال 2084 لعبة كرسوم اشتراك (أو دخول) في اللعبة بما يجعل اللعبة عادلة نهاية المطاف . يكمن التناقض في مفارقة بطرسبيرغ بين الفكر الرياضي المجرد و بين الواقع التجريبي و الحس المشترك . المفارقة

أثارت جدلاً واسعاً بين الرياضيين ردحاً من الزمان . العالم الرياضي دي لامبيرت , لكي يتجاوز المفارقة افترض إمكانيتين : إمكانية طبيعية و إمكانية فوق طبيعية – ميتافيزيقية - . مثلاً أن الصورة لا تظهر إلا بعد ألف رمية فهذه إمكانية خارقة أي فوق طبيعية و هي بالطبع مستحيلة . و من ثم لا يوجد شخص موفق مطلقاً بل بالضرورة أن يتعثر حظه عند حد معين و تصبح المسألة في جوهرها مستحيلة . و تستمر مفارقة بطرسبورغ بلا حل و للأبد ! . التوقع الرياضي يعطي نتيجة لا معنى لها عندما يطبق على هذه المسألة . إلا إذا وضعنا قيد معين مثلاً بدل من أن يدفع (ب) متوالية من $1,2,2^2,...2^{n-1},...$ يدفع في المقابل متوالية من $1,r,r^2,...r^{n-1},...;0<r<1$ و التي مجموعها $\frac{1}{2-r}$ هو التوقع الرياضي . واضح أن التوقع الرياضي هنا يصبح لانهائي عندما $r=2$.

فلسفة الاحتمالات

إن اسم حساب الإحتمالات يشكل في حد ذاته مفارقة , لأن الاحتمال يعني - في مقابل اليقين - ما لا نعلم . و كيف يتهيأ لنا حساب ما لا نعلم ؟ . هل يمكن أن يُعرَّف الاحتمال ؟ قد يقال إن احتمال حدثٍ ما , هو النسبة بين عدد الحالات المؤاتية لذلك الحدث , و العدد الكلي للحالات الممكنة . لكن مثال بسيط يوضح لنا مدى القصور في التعريف السابق : عند رمي زهرتي نرد , ما هو احتمال أن يظهر الوجه 6 في إحداهما ؟ الجواب $\frac{11}{36}$. لكن ألا يحق لي أن أقول إن النقاط التي يمكن أن يعطيها النردان تشكل $\frac{7\times6}{2}=21$ توفيقاً مختلفاً ؟ و توجد ضمن تلك التوفيقات 6 حالات مؤاتية , فيكون الاحتمال $\frac{6}{21}$. فلماذا كانت الطريقة

الأولى في احتساب الحالات الممكنة أكثر شرعية من الثانية ؟ و انطلاقاً من المبدأ المشهور الذي أطلق عليه الفيلسوف كارناب (عدم التمايز) و هو المبدأ الذي يقرر إنك إذا كنت لا تعرف أي سبب لحدوث حالة ما , أكثر من حدوث أخرى , إذن لكانت الحالات متساوية الإمكان , يصبح لزاماً علينا أن نكمل تعريف الاحتمال قائلين (... شريطة أن تكون تلك الحالات متساوية الاحتمال) و هكذا نقسر أنفسنا على تفسير المحتمل بالمحتمل . جميع العلوم تستخدم تطبيقات غير واعية لحساب الاحتمالات حتى إن إبطاله إبطال للعلم برمته . (11)
هنالك نقد عنيف موجه ضد التعريف الكلاسيكي السابق للاحتمال . إذ أن تساوي الإمكان لا يمكن فهمه إلا بمعنى تساوي الاحتمال و نكون قد دخلنا في حلقة مفرغة . فضلاً عن أن هناك حالات لا تكون فيها الحالات الممكنة متساوية الاحتمال , مثل تنبؤ شركة تأمين بالعمر التي سوف يتوفى فيه رجل يبلغ من العمر أربعين عاماً . فهو قد يتوفى في الواحد و الأربعين أو الخامسة و الأربعين أو يبلغ عمره مائة عام . هذه الإمكانات ليست متساوية الاحتمال لأن المرء كلما تقدم به العمر تزداد نسبة احتمال وفاته . مثال آخر : العنصر المشع إما أن يطلق جسيم ألفا أو لا يطلق , إذن أين الاحتمالات المتساوية هنا ؟ لا توجد . و لذا أكد كل من ميز و رايشنباخ أن ما نعنيه بالاحتمال هو ليس عدد الحالات بل هو قياس لحالة تكرارية نسبية . أما التطور الهام التالي في تاريخ نظرية الاحتمالات فقد كان نشأة المفهوم المنطقي للاحتمال على يد الاقتصادي البريطاني الشهير جون كينز عام 1920 ثم طوره رودلف كارناب في خمسينات القرن العشرين , فالاحتمال علاقة منطقية بين قضيتين . (12)[1]

يفيد قانون الأعداد الكبيرة أن الإبتعاد عن الصدفة يرتبط بازدياد تكرار التجربة . مثلاً عند رمي قطعة نقود ألف مرة فإن عدد مرات ظهور النقش تقريباً يساوي عدد مرات ظهور الطير . لكن ما الذي يجعل قطعة النقود تتصرف على هذا

النحو المنطقي بحيث تكون محصلة الألف رمية موزعة على التساوي بين الخيارين بما يتسق و المنطق ؟ . هل تمتلك قطعة النقود ذاكرة لتدرك ما هي نواتج الرميات السابقة حتى تعدل من نواتج الرميات اللاحقة حتى تكون المحصلة منطقية ؟ . مؤكد أن العملة لا تمتلك ذاكرة و أن ما تفعله خارج الضرورة المنطقية . الفيلسوف الرياضي الألماني كارل مارب عام 1916 يجيب على لغز وقوع الأحداث بشكل منسجم مع منطق الاحتمالية فيقول : قطعة النقود قد لا تمتلك ذاكرة لكن التجربة التي تشمل العملة و المراقب معاً تمثل منظومة تمتلك وعياً كاملاً بما يجري . الاحتمالية هي عملية منطقية تحدد نتائجها العملية وفقاً للارتباط الدقيق بين الذهن و الكون . لأنه لما كان الاحتمال عملية منطقية فهو لا وجود له من دون ملاحظ (الوعي) . لذلك فالقيمة الاحتمالية تتحدد وفقاً لهذا الاحتمال , أو نقول أن الوعي الكلي هو الذي يقوم بتحديد الاحتمال بانسجام مع الكل . فإذا تخيلنا إمكانية إجراء تجربة رمي العملة بمعزل عن أي مراقب و بمعزل عن أي تأثير عقلي فإن قوانين الاحتمال ستختفي لأنها لا تعمل بذاتها لكن تعمل تحت ظل الاطار المنطقي للمراقب . فقد يحدث مثلاً , عند رمية قطعة النقود ألف مرة - في غياب مراقب - أن يظهر النقش 900 مرة لأنه لا توجد ضرورة منطقية تلزم مخرجات التجربة بأن تتسق مع المنطق الذي يفترض ظهور متساوي للطير و النقش . (12)$_2$

<u>التأويل الموضوعي للاحتمال Objective</u> : يتعاطى مع الاحتمال باعتباره تكرار للحادثة أو قياس لنزعة نتائج تجربة معينة . و السؤال المهم في التأويل الموضوعي : أنى للطبيعة أن يتمتع سلوكها بالطابع الاحتمالي ؟ .

<u>التأويل الذاتي للاحتمال Subjective :</u> يتعاطى مع الاحتمال باعتباره قياس لدرجة اليقين بما يتفق مع التفكير العقلاني و المنطقي و بما يتفق مع بديهيات الاحتمال .

الباب السادس

إحياء نظرية الأعداد

فيرمات – يُلر – قاوس

بيير فيرمات (1601 – 1665 م) Fermat [3]26

لقد كان فيرمات محامي في الأصل , و لم يهتم بالرياضيات إلا في الثلاثين من عمره و لذا لُقّب (أمير الهواة) . أعاد فيرمات إحياء نظرية الأعداد على المستوى التجريدي , و ذلك عندما رفض قبول الأعداد النسبية كحلول للمعادلات الديوفانطية و اقتصر الحلول فقط على الأعداد الصحيحة . في معرض دراسته للأعداد الكاملة (التي تحقق $\sigma(n)=2n$) تصدى فيرمات للمعضلة التي كانت قائمة حينها و التي تكمن في أيٍ من الأعداد 2^p-1 أولي ؟ . في خطاب أرسله فيرمات إلى Mersenne مؤرخ يونيو 1640 توصل إلىالنتيجة الآتية : إذا كان p عدد أولي فإن p دائماً يقسم $2^{p-1}-1$. في خطاب آخر أرسله فيرمات إلى صديقه de Bessy بتاريخ 18 أكتوبر 1640 تضمّن النتيجة الآتية : إذا كان p عدد أولي و a عدد صحيح لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم $a^{p-1}-1$. مثلاً العدد الأولي 11 (لا يقبل القسمة على 3) يقسم $3^{11-1}-1$ لأن

$$3^{10}-1=59,048=11\times 5368$$

<u>نظرية فيرمات</u>

لأي عدد صحيح a و p عدد أولي فإن p تقسم a^p-a .

البرهان

عندما $p=2$ فإن $a^p-a=a^2-a=a(a-1)$ و بما أن $a,(a-1)$ عددان متتاليان فبالضرورة أن أحدهما زوجي و من ثم حاصل الضرب يقبل القسمة على 2 . الطريقة تبرهن أن a^p-a تقبل القسمة على أي عدد أولي فردي و باستخدام الإستقراء في a : إذا كانت $a=0$ أو $a=1$ فإن $a^p-a=0$ يقبل القسمة على p . لتكن $a>1$ و لنفترض صحة النتيجة عند a ثم نبرهن صحتها عند $a+1$ كالآتي :

$$(a+1)^p=a^p+\binom{p}{1}a^{p-1}+\binom{p}{2}a^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}a+1$$
$$\therefore (a+1)^p-a^p-1=\binom{p}{1}a^{p-1}+\binom{p}{2}a^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}a$$

بما أن p تقسم كافة معاملات ذات الحدين يمين المعادلة الأخيرة , أي أن p تقسم مجمل الطرف الأيمن و من ثم فهي تقسم الطرف الأيسر للمعادلة $(a+1)^p-a^p-1$ و من فرضية الإستقراء السابقة (عند a) أن p تقسم a^p-a , نستنتج أن p تقسم المجموع الآتي :

$$\left[(a+1)^p-a^p-1\right]+\left(a^p-a\right)=(a+1)^p+(a+1)$$

إذن تتحقق النتيجة عند $a+1$ و من ثم فهي صحيحة $\forall a\geq 0$. إذا كان $a<o$ عدد صحيح , ضع $a=-b$ حيث $b>0$, و عليه فإن

$$a^p-a=(-b)^p-(-b)=-\left(b^p-b\right)$$

و بما أن b موجبة فنحن نعلم أن p تقسم $\left(b^p-b\right)$.

الحيلة الأساسية التي كان يستعين بها فيرمات لبرهنة النظريات العويصة هي طريقة الإنحدار اللانهائي و التي تفيد : إذا كان $n > o$ عدد صحيح يحقق خاصية معينة P . من الممكن أن نستنتج من هذا الإفتراض أنه يوجد عدد صحيح موجب آخر $n_1 < n$ يحقق الخاصية P , و أيضاً يصح القول لعدد آخر صحيح موجب أصغر $n_2 < n_1$ يحقق الخاصية P وهلم جرّا لانهائياً . لكن هذا مستحيل لأن الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من n منتهية و من ثم لا يوجد عدد صحيح موجب إطلاقاً يحقق الخاصية P . لنوضح طريقة الإنحدار اللانهائي سنطبق التقنية لبرهنة لانسبية العدد $\sqrt{2}$. على النقيض سنفترض أن

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$o < a \in N ; 0 < b \in N$$

الآن بما أن

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2-1}}$$
$$\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{(a/b) - 1} = \frac{b}{a-b}$$
$$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} - 1 = \frac{2b-a}{a-b} = \frac{a_1}{b_1}$$

حيث

$$\because 1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 1 < a/b < 2 \Leftrightarrow b < a < 2b$$
$$\therefore 0 < 2b - a = a_1$$
$$b < a \Rightarrow 2b < 2a \Rightarrow a_1 = 2b - a < a$$

نبدأ من $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ لننتهي عند $\sqrt{2}=\frac{a_1}{b_1}, 0<a_1<a$. بتكرار العملية مرة أخرى

فإن $\sqrt{2}=\frac{a_2}{b_2}, 0<a_2<a_1$ و نستمر على نفس المنوال لنوصل أخيراً إلى

المتوالية $a_1,a_2,a_3,...$ بحيث أن $a>a_1>a_2>...>0$. و هذا مستحيل , لأن

الأعداد الصحيحة الموجبة لا يمكن أن تتناقص قيمها لانهائياً . و هذا نتيجة لأن

الفرض أن $\sqrt{2}=\frac{a}{b}; o<a\in N; 0<b\in N$ كان خاطئ .

<u>نظرية فيرمات الأخيرة</u>

المعادلة الديوفانطية $x^n+y^n=z^n; 2<n\in N$ ليس لها حل .

و التي إدعى فيرمات أنه توصل إلى برهان لها و لكن لصغر الهامش في كتابه (علم الحساب) تعذّر عليه كتابة البرهان . لعدة قرون كانت النظرية مصدر إلهام لعلماء الرياضيات . حتى العام 1993 حين توصل Wiles من جامعة Priceton إلى البرهان فيما ينيف عن 125 صفحة .

<u>ليونارد يُلر</u> Euler (1707 – 1783) [3]6

ولد لأب قسيس لوثري يعيش قرب مدينة بزل Basel في سويسرا . أرسله أبوه في عمر 13 سنة إلي جامعة بزل لدراسة اللاهوت ثم غادر إلى أكاديمية سانت بطرسبرغ و في عام 1741 قبل دعوة فردريك العظيم له بالعودة إلي ألمانيا للعمل في أكاديمية برلين حيث ذاع صيته هناك . يعتبر يُلر أول من استخدم الرمز π للتقدير الدائري , أي للنسبة بين محيط الدائرة و قطرها و e كرمز لأساس اللوغاريتم الطبيعي و كما توصل يُلر للصيغة الشهيرة

للتعبير i الرمز لاحقاً يُلر استخدم ثم $e^{\sqrt{-1}\,x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$:
عن $\sqrt{-1}$. توصل يُلر إلي الأساس الطبيعي e على النحو الآتي :

لتكن $a > 1$, ضع $a^w = 1 + kw$ حيث $w \to 0$ و k ثابت يعتمد فقط على a

$$a^x = a^{jw} = (1 + kw)^j = \left(1 + \frac{kx}{j}\right)^j$$

و باستخدام مفكوك ذات الحدين لنيوتن فإن

$$a^x = 1 + \frac{j}{1!}\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j\,(j-1)}{2!}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j\,(j-1)(j-2)}{3!}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \ldots.$$

و بما أن w صغيرة جداً فإن J كبيرة جداً و في غياب مفهوم النهاية فإن يُلر وضع

$$1 = \frac{j-1}{j} = \frac{j-2}{j} = \frac{j-3}{j} = \ldots$$

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \ldots.$$

و منها عندما $x = 1$ فإن

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \ldots.$$

و منها عندما $k = 1$ فإن

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

و قام يُلر بحساب العدد اللاقياسي e حتى ثلاثة وعشرون خانة الآتية

$$e = 2.71828182845904523536028.....$$

كما توصل يُلر للنتيجة المهمة

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \quad = 1.644936060...$$

وذلك على النحو الآتي انطلاقاً من متسلسلة جيب الزاوية لنيوتن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}...$$

بوضع $\sin x = 0$ فإن جذور الحدودية اللانهائية الدرجة على اليمين هي

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$$

$$\therefore 0 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}...$$

بالقسمة على x لحذف الجذر 0 و بوضع $y = x^2$ نحصل على

$$\therefore 0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!}...$$

و جذورها $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, ...$.

<u>لاحظ علاقة جذور الحدودية بمعاملاتها كالآتي:</u> لنفرض أن جذور كثيرة الحدود

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

هي $\alpha_1 , \alpha_2 , ..., \alpha_n$ فإن العلاقة بين الجذور والمعاملات هي

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right) = (-1)\, a_{n-1}$$
$$\left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n\right) = (-1)^2\, a_{n-2}$$
$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n\, a_0$$

الحدودية التي حدها المطلق 1 , مجموع مقلوب جذورها يساوي سالب معامل الحد الخطي x . من ثم استنتج يُلر أن

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2}, ...$$
$$or$$
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

عمل يُلر كثيراً في المتسلسلات اللانهائية فمثلاً وجد أن

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 ...$$
$$x = -1 \Rightarrow \quad \infty = 1 + 2 + 3 + 4 + ... \qquad (1)$$

و من المتسلسلة اللانهائية عن طريق القسمة

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$
$$x = 2 \Rightarrow \quad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + ... \qquad (2)$$
$$or$$
$$0 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... = \infty !$$

واندهش يُلر من النتيجة اللامعقولة عندما قارن بين (1) و (2) حين وجد أن $\infty > 1-$ و استنتج أن مالانهاية ∞ تفصل بين الأعداد الموجبة و السالبة كما يفصل الصفر تماماً بينهما .

و الغريب , لقد عالجت المتسلسلة التقاربية المشهورة الآتية

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

و عندما نعيد ترتيبها فإذا بها تتباعد إلى نهاية مختلفة

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) = \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

بما يطرح تساؤل فلسفي حول مجموع المتسلسلات اللانهائية !

برهن يُلر النظرية و التي هي عبارة عن معكوس منطوق نظرية إقليدس الآتية :

نظرية يُلر

إذا كان n عدد زوجي كامل فإن n هي علي الصورة $2^{k-1}(2^k -1)$

حيث $(2^K -1)$ أولي و $k \geq 2$.

البرهان

ضع $n=2^{k-1}.m$ حيث m عدد فردي و $k \geq 2$. قواسم $2^{k-1}m$ هي $1,2,2^2,...,2^{k-1}$ كل منها مضروب في $1,d_1,d_2,.....,m$ (قواسم m) .هذه الأعداد هي بالتحديد حدود مضروب المفكوك $\left(1+2+2^2+..+2^{k-1}\right)\left(1+d_1+d_2+....+m\right)$ و بما إنها مجموع قواسم n فإن

$$\sigma(n)=\left(1+2^2+.....+2^{k-1}\right)\left(1+d_1+d_2+....+m\right)$$
$$\sigma(n)=\left(2^k-1\right)\sigma\left(m\right)$$

n عدد كامل يقتضي أن $\sigma(n)=2n=2^k.m$

$$\therefore 2^k.m=\left(2^k-1\right)\sigma\left(m\right)$$

وهذا يعني أن (2^k-1) يقسم $2^k \bullet m$. لكن 2^k-1 و 2^k هما أوليان نسبياً. من نتيجة إقليدس 2^k-1 يجب أن تقسم m وليكن $m=\left(2^k-1\right)\mathrm{M}$ لتصبح المعادلة الأخيرة $\sigma(m)=2^k\,\mathrm{M}$ و لأن m وM هما قواسم m و $\mathrm{M}<m$ لدينا

$$2^k\,\mathrm{M}=\sigma(m)\geq m+\mathrm{M}=\left(2^k-1\right)\mathrm{M}+\mathrm{M}=2^k\,\mathrm{M}$$
$$\Rightarrow \quad \sigma\left(m\right)=m+\mathrm{M}$$

و دلالة هذه النتيجة أن m لها فقط m و M كقواسم و يجب أن يكون m أولي و القاسم الأخر ل m يجب أن يكون M = 1 بعبارة أخرى $m=\left(2^k-1\right)\mathrm{M}=2^k-1$ هو عدد أولي و من ثم فإن العدد الكامل

$n = 2^{k-1}.m = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ حيث $2^k - 1$ عدد أولي .

<u>أخيراً</u> برهن يُلر العلاقة بين عدد الرؤوس V وعدد الحواف E وعدد الوجوه F لأي شكل متعدد الأضلاع وهي صيغة يُلر : $F + V = E + 2$

<u>قاوس Gauss(1777-1855)</u>

ولد كارل فريدريك قاوس في ألمانيا في مدينة Brunswick . رغم إن أسرة قاوس كانت فقيرة إلا أن موهبتة الفذة في الرياضيات و التي تفتقت مبكراً منذ كان في الثالثة من عمره جعلته يشق طريقه في عالم الرياضيات حتى لُقّب (أمير الرياضيات) . يُحكى أن قاوس كان يصحح أخطاء والده الحسابية و هو في الثالثة من عمره . في سنته الدراسية الأولى أدهش قاوس مد رسه عندما أوجد جمع الأعداد من 1 إلى 100 على النحو التالي :

$$
\begin{aligned}
&1 + 100 = 101 \\
&2 + 99 = 101 \\
&\vdots \\
&50 + 51 = 101 \\
&\therefore (50).(101) = 5050
\end{aligned}
$$

موهبة قاوس الفذة لفتت إليه الأنظار ممّا دفع فريديناند دوق Brunswick أن يرعاه و يتكفل بنفقات دراسته حتى التحق بكلية Caroline التحضيرية و من بعدها التحق بجامعة Gottingen . توصل قاوس في الجامعة في عام 1976 م إلى إمكانية انشاء متعدد أضلاع منتظم من 17 ضلع فقط باستخدام الفرجار و المسطرة . في عام 1801 برهن قاوس إمكانية انشاء متعدد أضلاع منتظم من

p ضلع حيث p عدد أولي فردي باستخدام الفرجار و المسطرة فقط إذا كانت p على الشكل $2^{2^k}+1$. لاحظ لقيم $k=0,1,2,3,4$ فإن $2^{2^k}+1$ فردية وهي

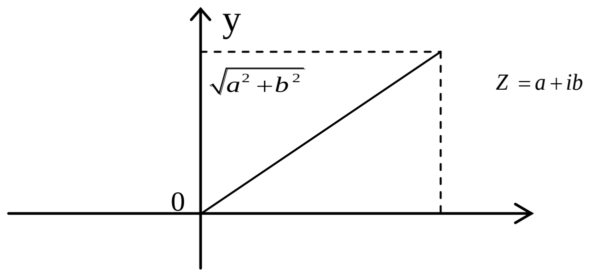
$$3,5,17,257,65,537$$

لقد برهن يُلر أن $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4,294,967,297=(461).(6,700,417)$ و هناك اعتقاد رياضي سائد أن $2^{2^k}+1;\forall k\geq 5$ ليس فردي و إن لم يكن ثمة برهان بعد .

الأعداد التخيلية

كان أول ما أشار إليها كاردان Cardan في القرن السادس عشر عندما واجه المعادله $x(10-x)=40$. و أوجد جذورها $5-\sqrt{-15}$ و $5+\sqrt{-15}$ و لم يجد لها معنى إلا أنه أعتقد أن لها معنى رمزي .و وصفها بأنها أعداد مستحيلة أو لا وجود لها و كميتها لغز مرعب . (و هذا ما توصلنا إليه كما سنرى لاحقا) . كما وصفها نابيير بأنها أشباح الأعداد الحقيقية [19][3].وصف ديكارت الأعداد التخيلية في كتابه الهندسة عام 1637 : لا الجذور الصحيحة و لا الجذور الخطأ - السالبة- دائماً حقيقية أحياناً تكون تخيلية .

يُلر كان أول من استخدم الرمز i دلالة على الجذر التخيلي $i=\sqrt{-1}$ عام 1777 . ووصفها بأنها تخيلية لأنه لا وجو د لها إلا في الخيال . إن فكرة تمثيل العدد التخيلي كنقطة في المستوى هي فكرة بسيطة إلا أنها لم تتحقق إلا بعد مضي فترة زمنية طويلة ، وعندما نضجت الفكرة تلقفتها ثلاثة عقول لا علاقة بين كل واحد منهم والآخر إطلاقاً : النرويجي كاسبار ويسل Caspar (1818 -1745) و الفرنسي روبرت آرقاند Argand (1768-1822) و الألماني قاوس Gauss (1777-1855) .



π **عدد متسامي** is Transcendental Number π

العدد اللانسبي هو العدد الذي يحتوي على خانات عشرية لانهائية غير دورية .

نعلم أن محيط الدائرة هو(π . ق) أي π مضروبة في قطر الدائرة أو قل

$$\pi = \frac{\text{محيط الدائرة}}{\text{قطر الدائرة}}$$

يُلر Euler استخدم الصيغة $\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...$

لقد تم حديثاً حساب π إلي 6,442,450,938 خانة أكثر من ستة مليارات خانة . قد لا نعلم أي فائدة من حساب π إلي هذه الدقة في الوقت الراهن سوى لقياس كفاءة الكمبيوتر من سرعة و سعة في حساب أكبر عدد من الخانات في أسرع وقت ممكن . لقد باءت محاولات رسم مربع محيطه محيط دائرة باءت بالفشل لكن لماذا ؟ يقال أن العدد متسامي إذا لم يكن حل لأي حدودية

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

حيث n عدد طبيعي و a_n عدد صحيح . في حين نسمي حلول الحدوديات أعداد جبرية, برهن كانتور بأن هناك أعداد جبرية قابله للعد لا نهائية و بالتالي فإن

الأعداد المتسامية غير قابلة للعد – الترقيم – نعم إن كل الأعداد المتسامية هي فئة جزئية من الأعداد الغير نسبية .

برهن فرديناند ليندمان F.Lindeman أنه إذا كانت $a_1,...,a_n$ إعداد جبرية مختلفة حقيقية أو تخيلية و $b_1,...,b_n$ إعداد جبرية لا صفرية فإن الصيغة $b_1\, e^{a_1} + b_2\, e^{a_2} + ... + b_n\, e^{a_n}$ دائماً لا تساوي الصفر . واستنادا علي صيغة يُلر الرائعة $0 = e^{\pi i} + 1 = e^{\pi 1} + e^0$. و بما أن i هو عدد جبري لأنه حل للمعادلة $x^2 + 1 = 0$ فإن π بالضرورة عدد متسامي . [3]5 و نكون هنا قد وصلنا إلي نهاية الحلم العتيق بإنشاء مربع ضلعه $\sqrt{\pi}$ إذ لا يمكن أن نحصل علي $\sqrt{\pi}$ لأن ليندمان برهن أن π ليست جذر لأي معادلة جبرية .
أوضح العالم الفرنسي Liouville (1809- 1882) عام (1840) أن e وe^2 أعداد متسامية , كما توصل عام 1844 إلى مجمل عائلة الأعداد المتسامية التي تنبثق عبر المتسلسلة اللانهائية الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!}$$
$$1 < a_n (\in N) < 9$$

من الصعب جداً تأكيد أن عدد ما متسامي . حديثا تم تحديد أن e^π و $2^{\sqrt{2}}$ هما عددان متساميان . لازالت الأعداد $e^e, \pi^e, 2^e, \pi^\pi, 2^\pi$ مجهولة الهوية هل هي جبرية أم متسامية . لدينا فقط حفنة من الأعداد المتسامية المعلومة مثل $\pi, e, e^2, e^\pi, 2^{\sqrt{2}}$. فعلاً إنه لشئ مخجل أن نجهل فحوى فئة لانهائية عدا حفنة فقط منها ! .

هاردي (1877 – 1947) G.H.Hardy

ولد هاردي في انجلترا و التحق بجامعة كمبريدج في عام 1896 . تركزت أبحاث هاردي حول (تحليل نظرية الأعداد) . لقد كان هاردي أول من أعطى جواباً ما على تخمين ريمان حول دالة زيتا عام 1914 . انطلق ريمان من الصيغة التي توصل إليها يُلر قبل قرن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

حيث الضرب اللانهائي مأخوذ لجميع قيم p الأولية و الجمع لجميع قيم n الصحيحة الموجبة . هذه الصيغة هي نتيجة مفكوك العامل الذي يحتوي على p كمتسلسلة هندسية

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

بضرب هذه المتسلسلة لكل p أولي نحصل على مجموع من حدود على الصورة

$$\frac{1}{\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}\right)^s}$$

حيث $p_1,p_2,...,p_r$ أعداد أولية مختلفة و $k_1,k_2,...,k_r$ أعداد صحيحة موجبة . من النظرية الأساسية للحساب فإن الضرب $p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$ يعطى الأعداد الصحيحة الموجبة بما يسمح لنا بأن نستنتج أن المجموع محل التساؤل ما هو إلا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

هذا المجموع و الذي هو دالة في متغير حقيقي s تسمى دالة (ريمان) زيتا و تكتب . Zeta function

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

و لأن المتسلسلة الأخيرة تتباعد لقيمة $\zeta(1)$ فإن صيغة يُلر تفيد بوجود عدد لانهائي من الأعداد الأولية . لأنه لو كان هناك عدد منتهي فقط من الأعداد الأولية فإن الضرب يمين الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

سيكون حاصل ضرب منتهي و له قيمة منتهية . باستخدام دالة زيتا برهن يُلر أن مجموع مقلوب الأعداد الأولية يتباعد . و معلوم أن يُلر توصل إلى أن

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

كما توصل أيضاً إلى إن $\zeta(4)=\frac{\pi^{4}}{90}$. ونتيجة فورية لهذا فإن كلتا $\zeta(2)$ و $\zeta(4)$ أعداد متسامية . حديثاً في العام 1979 تأكَّد أن $\zeta(3)$ غير نسبي لكن لم يتحدد بعد فيما إذاكان متسامي أم لا . تكمن فكرة ريمان في تمديد دالة زيتا $\zeta(s)$ بدلاً من أن تكون دالة قاصرة على أعداد حقيقية لتكون دالة في أعداد مركبة $s=a+ib$. من بين العديد من الأسئلة التي تطرح نفسها حول الدالة

المركبة $\zeta(s)$ نجد أن أهم سؤال : أين تقع أصفارها ؟ . أوضح ريمان أن الدالة تتلاشى عند $s=-2n$ الأصفار التافهة , و أن كل الأصفار الأخرى تقع على ما يسمى بالخط الحرج $0<a<1$. يمضي ريمان قُدُماً ليخمّن أن أولئك الأصفار تقع محور التماثل الرأسي , الخط الحرج $a=\frac{1}{2}$. بعبارة أخرى , فرضية ريمان تتلخص في الآتي : إذا كانت $\zeta(s)=0$ للعدد المركب $s=a+ib$ حيث $0<a<1$ فإن $s=1/2+bi$. هذه هي فرضية ريمان الشهيرة تظل مفتوحة للبرهان أو للدحض . في مؤتمر باريس عام 1900 صنفها هيلبرت المسالة الثامنة ضمن المسائل العالمية التي يستوجب حلها . أضاف هيلبرت قائلاً إذا أفقت بعد ألف عام فإن أول سؤال سوف أطرحه : هل بُرهنت فرضية ريمان ؟ . برهن هاردي عام 1914 على تموضع عدد لانهائي من أصفار دالة زيتا $\zeta(s)$ على الخط الحرج . إلا أن برهانه يظل غير كافي إذ لا يمنع وقوع عدد لانهائي من الأصفار خارج الخط الحرج . $_{24}$[3]

<u>رامانجان (1887 – 1920) Ramanujan</u>

ولد رامانجان في مدينة قرب مدراس جنوب الهند لأبٍ يعمل محاسب في متجر لبيع الأقمشة . بدأت هوايته في الرياضيات و هو في الخامسة عشر من عمره عندما استعار كتاب مختصر عن الرياضيات البحتة يحتوي على أكثر من 6000 نظرية , فقط القليل منها مبرهن . بدون أدنى مساعدة أخذ رامانجان على عاتقه برهنة كل ما تبقى منها , و أفلح في ذلك . بعد أن ذاع صيته , حصل رامانجان عام 1903 على منحة دراسية في جامعة مدراس و التي سرعان ما فقدها في عامه الأول لأنه أهمل المتطلبات الدراسية الأخرى و انشغل فقط بالرياضيات . لم تعرف جامعة مدراس كيف تتعامل بخصوصية مع هذا الموهوب بل تعاملت

معه على نحو تقليدي كغيره من بقية الطلاب و فصلته من الجامعة . تشرد رامانجام لعدة سنوات تائها في الأرياف معدم و محبط . بعد أن تزوج اضطر رامانجان عام 1912 لممارسة عمل مكتبي في ميناء مدراس , الوظيفة التي أمَّنت له وقت كافي لمواصلة هوايته في الرياضيات . على إثر نشره لثلاثة أوراق في عامي 1911 و 1912 بدأ يُنظر إليه باهتمام و حثه أصدقاءه على التواصل مع هاردي في بريطانيا الذي كان يعتبر حينها زعيم الرياضيات البحتة في بريطانيا . أرسل رامانجان إلى هاردي 120 نظرية جديدة منها ما هو مبرهن و الآخر تخمينات . بعد دراسة متأنية وجد هاردي و زميله ليتليود أنهما أمام عقلية رياضية من الطراز الأول . هاردي سرعان ما استدعى رامانجان إلى جامعة كامبريدج عام 1914 ليصقل موهبته الرياضية و يطورها . بعيداً عن الأطر التقليدية , وضع هاردي برنامجاً خاصاً لمدة ثلاثة سنوات . حتى العام 1917 نشر رامانجان 32 بحثاً 7 منها بمشاركة هاردي . أرسل هاردي رسالة إلى جامعة مدراس يقول فيها (سأعيد للهند عالم ذو مقام علمي عالي و سمعة راقية منقطعة النظير لم يبلغها هندي من قبل) . عام 1918 أصبح رامانجان زميل الجمعية العلمية الملكية و في العام التالي أُنتخب زميل في كامبريدج و أيضاً في كلية الثالوث المقدس . للأسف كلما زادت شهرة رامانجان كلما تدهورت صحته و في عام 1917 اشتد به المرض فيما كان يعتقد أنه سل إلا أن طبيعة مرضه ظلت مجهولة و ممّا زاد الطين بلةً أنه كان نباتياً الشيء الذي أعاق تغذيته على نحو يحسِّن صحته . بعد نهاية الحرب العالمية الأولى عام 1914 عاد رامانجان إلى الهند و هو يتألق شهرةً و في نفس الوقت يعتصر ألماً . استمر رامانجام في ممارسة الرياضيات و هو يحتضر في فراش الموت و ما لبث أن توفى في أبريل من العام 1920 عن عمر يناهز 32 عاماً . نظرية التجزئة Theory Of Partitions كانت ثمرة أحد أوجه التعاون بين رامانجان

و هاردي . تجزئة العدد الصحيح الموجب n هي طريقة لكتابة العدد n كمجموع أعداد صحيحة موجبة , مثلاً العدد 5 يمكن تجزئته بسبع طرق كالآتي

$$5$$
$$4+1$$
$$3+2$$
$$3+1+1$$
$$2+2+1$$
$$2+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1$$

إذا كانت $p(n)$ تعبِّر عن عدد التجزئة الكلي للعد n , فإن

$$p(1)=1$$
$$p(2)=2$$
$$p(3)=3$$
$$p(4)=5$$
$$p(5)=7$$
$$p(6)=11$$
$$p(200)=3,972,999,029,388$$

عام 1918م برهن هاردي و رامانجان لقيم n الكبيرة جداً فإن دالة التجزئة تعطى بالصيغة الآتية

$$p\left(n\right)\approx\frac{e^{c\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}};c=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

فنجد , مثلاً أن $p\left(200\right)\approx 4\left(10\right)^{12}$ و هي قريبة جداً من القيمة الآنف ذكرها .

هاردي زار رامانجان في المستشفى و هو يستقل تاكسي رقمه 1729 , فالتفت إليه رامانجان قائلاً إنه لرقم شيق فهو أصغر رقم يمكن كتابته كمجموع مكعبين بطريقتين مختلفتين . أي كالآتي

$$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$$

استعجب هاردي من سرعة بديهة رامانجان و استرسل سائلاً رامانجان عن أصغر رقم يمكن كتابته كمجموع من القوة الرابعة لعددين بطريقتين مختلفتين ؟ فكَّر رامانجان لبرهة وجيزة مستعرضاً شريط الأرقام في مخيلته ثم ما لبث أن أجاب قائلاً أن هذا الرقم كبير جداً . و فعلاً كان الرقم مهولاً , كالآتي :

$$635,318,657=59^4+158^4=133^4+134^4$$

من ابتكارات رامنجان الخلاقة و بدون برهان المتسلسلة اللانهائية

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(4n\right)!\left(1103+26,390n\right)}{396^{4n}}$$

و يستخدمها علماء الكمبيوتر لأنها تمتاز بخاصية فريدة أن أي حد في المتسلسلة يعطي ثمانية خانات من π دفعةً واحدة بما يسهل من عملية حساب π في الكومبيوتر. اكتشف رامانجان 14 متسلسلة للمقلوب $\frac{1}{\pi}$ بدون تفسير لمصدرها أو برهان لها و إنما بضربٍ من الإلهام فقط , من أبرزها المتسلسلة الآتية

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^{3}\frac{42n+3}{2^{12n+4}}$$

و التي تمتاز بأنها يمكن أن تستخدم لحساب الكتلة الثانية من الخانات (k الثنائية $binary$) في المفكوك العشري للعدد π دون الرجوع إلى الخانات الأولى k . [3]$_{25}$

بالرغم من قصر عمره إلا أن تأثير رامانجان شمل معظم فروع الرياضيات و العلوم الأخرى المرتبطة بها . لقد ترك وراءه 3 كتيبات تحتوي على 3000 نتيجة بدون برهان , انصب الجهد طيلة عقود على إثباتها و كادت أن تكتمل الآن و تأكد صحتها جميعاً , لكن لا أحد يدري كيف تمت صياغة و اشتقاق هذه النظريات . في العام 1976 تم العثور في مكتبة كمبريدج على نوتة من 100 صفحة مهملة كتبها رامانجان تحتوي على 600 صيغة رياضية يستوجب برهنتها . لقد ترك رامانجان ميراث ثري جداً يشغل علماء الرياضيات ردحاً من الزمن حتى يتحققوا من صحته . بقدر ما عانى رامانجان بقر ما أبدع . فقد بذل نفسه رخيصةً قرباناً في محراب العلم و الرياضيات و سكب روحه وهجاً يتألق في سماء الإبداع و سطّر اسمه بأحرفٍ من نور خالداً في تاريخ العلم و العلماء . فعلاً , كما قال عبد الرحمن الداخل و هو هارب من بطش العباسيين في طريقه إلى الأندلس (إن ما يغرم المرء بقدر ما يغنم) فهو يدفع الآن ثمن العز و الجاه الذي ظل يرفل فيه منذ نعومة أظافره و عكس ذلك بقدر ما يعاني المرء بقدر ما يبدع . و هذا يعيدنا إلى سورة الزخرف إلى قول الله تعالى ((أو من يُنَشَّأ في الحلية و هو في الخصام غير مبين)) أي أن الشخص الذي يولد و في فمه ملعقة من ذهب و تربى على الترف و النعومة ورغد العيش منذ نعومة أظافره , من المؤكد أنه سيكون ضعيفاً لا يقوى على القتال و لا على الفصاحة و الجدال .

على النقيض من ذلك نجد من عَرِكَ الحياة و عركته و ترعرع على شظف العيش أقوى شكيمةً و أشد بأساً و أصعب مراساً . فلا تحسبن أن سلاسة الحياة و لينها و حسن حظ المرء نعمة , أو ليس (أشد الناس بلاءً الأنبياء ثم الأمثل فالأمثل) كما قال المصطفى صلى الله و سلم . إنما ابتلى الله أنبياءه - رغم أنهم أحب الخلق إليه - حتى يهيئهم لحمل عبء الرسالة . فهاهو يوسف عليه السلام يؤخذ من بين يدي والديه ليتربى تحت نير العبودية ((و شروه بثمن بخس دراهم معدودة و كانوا فيه من الزاهدين)) ثم في قوله تعالى ((فلبث في السجن بضع سنين)) . موسى عليه السلام مجرد ولادته رمته أمه في اليم ((و أوحينا إلى أم موسى أن أرضعيه فإذا عليه فألقيه في اليم)) و قوله تعالى ((و قتلت نفساً فنجيناك من الغم و فتناك فتوناً فلبثت سنين في أهل مدين ثم جئت على قدرٍ يا موسى و اصطنعتك لنفسي)) . يُفتَن الذهب بالنار حتى ينقى من الشوائب و كذلك يفتن المؤمن فيبتلى حتى يتطهر و يتزكى و يشتد عوده , يقول الله تعالى في مطلع سورة العنكبوت ((ألم , أحسب الناس أن يتركوا أن يقولوا آمنّا و هم لا يفتنون)) . و على النقيض من ذلك , لولا مغبة أن يجتمع الناس على الكفر لوجب لزاماً على الله أن يعطي الكفار الذهب و الفضة و الدور و القصور و ذلك في سورة الزخرف في قوله تعالى ((لولا أن يكون الناس أمةً واحدة لجعلنا لمن يكفر بالرحمن لبيوتهم سقفاً من فضة و معارج عليها يظهرون . و لبيوتهم أبواباً و سرراً عليها يتكئون و زخرفاً . و إن كل ذلك لمَّا متاع الحياة الدنيا و الآخرة عند ربك للمتقين)) . خلاصة القول إن المعاناة والإبتلاء هي التي تخلق العظماء من أنبياء و علماء و أدباء .

الباب السابع

تاريخ الهندسة اللاإقليدية

أسس الهندسة اللاإقليدية

لقد كان الفيلسوف كانط (1724-1804)[13][3] يشكل عقبة أمام ولادة هندسة لاإقليدية . كانط كان يعتقد بأن وعينا الداخلي يسمح فقط بتقبل الهندسة الإقليدية و خواصها . و كان كانط فيلسوف ذائع الصيت مما حدا بقاوس Gauss أن يتقاعس عن نشر أبحاثه في الهندسة اللاإقليدية مخافة أن يصطدم بكانط و مهابة أن يناقض أفكاره . كانط أشتعل أول الأمر بالعلوم الطبيعية قبل اشتغاله بالفلسفة كما استهوته فيزياء نيوتن و تطبيقاتها الفلكية . لم يكن كانط رياضياً و لا تجريبيا، أي لم يكن علمي فعلي، إلا أنه أصاب في حدسه في فرضية السديم الذي شكل النظام الشمسي ومركزه الشمس . وأصدر كتاب تحت اسم مجهول المؤلف عام(1755م) عنوانه التاريخ الطبيعي للكون و نظرية السماوا ت . و كان هدفه إثبات وجود الإله عن طريقه توضيح أن الكون النيوتني لم يوجد صدفة أو ضربة حظ لكن نتيجة لتخطيط بحيث ينشأ و ينمو وفق أسلوب مرتب . يقول كانط في كتابه (نقد العقل المحض) __ [13][3]_ : مفهوم الهندسة الإقليديه ليس نتاج تجريبي ، لكنها ضرورة فكرية . و أن العقل يتقبل الهندسة الإقليديه لأن بنيته الفطرية مؤسسة على الهندسة الإقليدية ولا يمكن تحقق نظام هندسي آخر ، إذ سيكون مرفوض فكرياً . إن مقاومة الفكرة القائلة بأن مسلمة التوازي متأصلة في تركيب العقل كحدس مغروز فيه من السماء هو تحدي لنظرية كانط في المعرفة والتي يسميها كانط (الثورة الكوبرنيكية في الفلسفة) . في القرن التاسع عشر توصل الروسي لوتبشيفسكي والألماني جاوس- كلا على حدة - إلي ما يعرف بالهندسة اللاإقليدية وقد انطلق كل منهم من مسلمات مختلفة عن تلك التي اقترحها إقليدس مثل المسلمة اللاإقليدية القائلة بان المستقيمات المتوازية لا تتلاقى . لأن المستقيمات المتوازية لا تتلاقى قاصرة علي النظرة الإقليدية

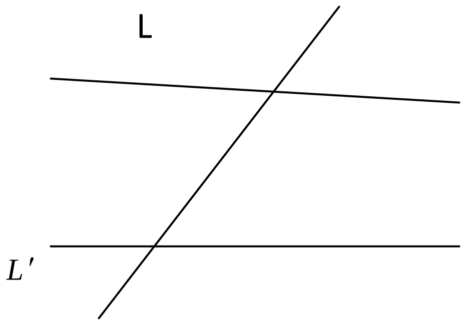
المسطحة للفراغ . في حين إن النظرة اللاإقليدية يتخذ فيها الفضاء شكلاً كروياً أو زائدياً يمكن أن تتلاقي فيه المستقيمات المتوازية .

لقد بدأ جلياً في مطلع القرن التاسع عشر أن فرضية إقليدس للتوازي لا يمكن برهنتها كاستنتاج (كتداعي) منطقي من بقية المسلمات الإقليديه و أن مسلمة التوازي لا تعتمد على بقية المسلمات الأربع . هذا يعني من الممكن استدعاء مسلمة توازي مناقضة تؤسس لنشوء و تطوير هندسة لاإقليدية . هذه الفكرة عندما تبلورت و نضجت أخيرا لم يقتطفها رياضي واحد بل استلهمها ثلاثة رياضيين دفعة واحدة في وقت متزامن تقريباً و تفصل بينهم مساحات شاسعة , قاوسGauss في ألمانيا و بوليا Bolyia في هنغاريا و لوباشفسكى في [3][14] روسيا . هذا الاكتشاف المتزامن قد تحقق سابقاً بين نيوتن في انجلترا و ليبنز في ألمانيا عندما توصل كلٌ منهم على حده إلى اكتشاف حساب التفاضل والتكامل . و من المؤكد أن مثل هذا الاكتشاف المتزامن سيحدث في المستقبل . عندما تنضج الفكرة فإن بزوغها لن يؤجل وتصبح الأذهان متهيئ لاستقبالها واستلهامها . لقد استغرق الأمر زهاء الألفي عام حتى تم أخيرا تجاوز مسلمة التوازي لإقليدس . قال والد بوليا لابنه و هو يحثه على نشر اكتشافه بأنه يعتقد أن هناك أفكار عندما يأتي أوانها تكتشف في عدة أمكنة تماماً مثلما يتفتح البنفسج في الربيع في كل الأمكنة و في كل الاتجاهات . لقد توصل كل واحد من الثلاثة إلى استبدال مسلمة إقليدس الخامسة بمسلمة ذات حدس مناقض (عبر نقطة ليست على الخط يوجد أكثر من موازٍ للخط) مع الإبقاء على بقية المسلمات الأربع كم هي . و لعمري إنه لابتكار جريء حينها إذ يتصدى للمفهوم التقليدي للمسلمة باعتبارها صادقة في ذاتها و كما قال آينشتاين مندهشاً ومتعجباً : لقد تحدوا المسلمة . . هناك ثغرة في رؤية الفرد الحدسية للفضاء (مجموع زوايا المثلث على سبيل المثال مجموعها لا يساوي زاويتان قائمتان) . نظامهم الهندسي خالٍ

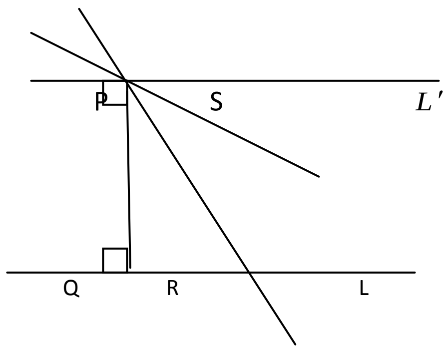
من المتناقضات داخلياً . عبر القواعد العادية للاستدلال توصل ثلاثتهم إلى متوالية من النظريات مشابهة لما توصل إليه من قبل الرياضي العربي نصر الدين الطوسي (1201-1273) $_3$(3) ثم من بعده ساكهاري Saccheri (1667- 1733) من افتراض حول الزاوية الحادة (لا يمكن رسم أكثر من موازٍ واحد لمستقيم معين من نقطة ما خارج هذا المستقيم , لأن ذلك لا يتسق و طبيعة الخط المستقيم , بل و يتناقض مع باقي مسلمات إقليدس) . و على الرغم من سلبية هذا البرهان , الذي يثبت فقط استحالة نقيض المسلمة , إلا أنه فتح الباب لنشأة هندسات لاإقليدية . مع بداية القرن التاسع عشر توقف الرياضيون عن محاولة البرهنة على صحة المسلمة الخامسة و حاولوا بدلاً من ذلك إقامة أنساق أخرى تستبدل فيها قضية أو أكثر بما يقابلها من قضايا النسق الإقليدي . الجزء الذي لا يعتمد على المسلمة الخامسة في هندسة إقليدس يسمى الهندسة المطلقة و يتضمن الثماني و العشرين مبرهنة الأولى و التي تعتمد بالضرورة على المسلمات الأربع الأولى في النسق . و بإضافة المسلمة الخامسة تمتد الهندسة المطلقة داخل نطاق الهندسة الإقليدية . أما إنكارها , و إثبات فرض الزاوية الحادة , فيؤدي إلى ما أصبح يسمى بالهندسة الزائدية . في الوقت الذي كان فيه ساكهاري تحت تأثير رهبة إقليدس و مقتنع مطلقاً بضرورة الهندسة الإقليدية فشل في إبداع هندسة لاإقليدية . من جانبهم , قاوس، بوليا و لوباشيفسكي فضّلوا منطلق ثوري لاكتشافهم . لم تبق الهندسة الإقليديه لوحدها النظام المتسق هندسياً بل قد لا تكون صحيحة لوصف العالم الطبيعي . عندما قام لوباشيفسكي بحساب مجموع زوايا المثلث الذي رؤوسه الأرض و الشمس والنجم سايرس وجدها أ قل من 180 بمقدار 4×10^{-6} بوصة . اعتقد قاوس أن مسألة الفضاء ليست قضية عقلية صرفة بل هي مسألة تجريبية خاضعة للقياس و بالفعل قام بقياس مثلث طول ضلعه يقارب 40 ميل فوجد أن مجموع زواياه أقل

ب $2''$ من 180° . إلا أن هذا الدليل العملي قابل للشك إذ يمكن أن يعزى هذا الفرق $2''$ إلى نسبة الخطأ في القياس . لقد تساءل الفيلسوف المسيحي القديس توما الأكويني قائلاً (ما هو الشيء الذي لا يستطيع أن يفعله الإله ؟ و أجاب قائلاً : لا يستطيع أن يجعل زوايا المثلث تزيد أو تقل عن 180 درجة) و سبحان الله - الذي لا يعجزه شيء في السماوات و لا في الأرض – سرعان ما جاء الرد مفحم باكتشاف الهندسة اللاأقليدية و التي تزيد فيها أو تنقص زوايا المثلث عن 180 درجة . (9)

مسلمة إقليدس الخامسة : عبر نقطة ليست على الخط لا يمكن رسم أكثر من موازٍ للخط .



مسلمة لوباشيفسكي : يوجد خطان يوازيان خط معلوم عبر نقطة معلومة ليست على الخط .



لقد كانت هندسة لوباشيفسكي أول عرض منهجي منشور لهندسة لاإقليدية . و ما يميز هذه الهندسة , مخالفتها لنسق الهندسة الإقليدية في القضايا الآتية :

1 - الفضاء سطح مقعر و الانحناء سالب , في حين الفضاء الإقليدي سطح مستوٍ و الانحناء صفر .

2 - مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين .

3 - من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم عدد لا متناه من المستقيمات الموازية له . $_4$(3)

<u>بيرنارد ريمان</u> (Bernhard Riemann (1866-1826

ولد ريمان في ألمانيا إبان بزوغ فجر الهندسة اللاإقليدية . بدأ دراسته الجامعية كطالب فلسفة و لاهوت وفقاً لرغبة والده اللوثري . حصل على الدكتوراه تحت أشراف قاوس عام1851 في أطروحته حول السطوح على نطا ق مركب أو ما يعرف بسطوح ريمان . و كان هذا العمل كاف ليذيع صيته كرياضي من الطراز الأول ووصفه قاوس بـأن له عقلية رياضية حقيقية فذة نشطة و مبدعة . توفى ريمان نتيجة لمرض السل عام 1866 في إيطاليا . في معرض اختباره كمحاضر كلفه قاوس بإلقاء محاضرة في أسس الهندسة , في الوقت الذي كان يعمل فيه ريمان كمساعد لويبر Wiber في مقرر في الفيزياء الرياضية ، وكنتيجة لكل هذه الضغوط تعرض ريمان لانهيار عصبي مؤقت . لقد كانت محاضرته (الافتراضات التي تقوم عليها أسس الهندسة) تعتبر بحق منارة في التاريخ الحديث للرياضيات . لقد ألقى محاضرة لا تحتوي على أمثله أو قوانين بل ذات طبيعة حدسية غاية في التعميم و على قدرٍ من الإيحاء . لم يستطيع أحد

فهم مقاربته الهندسية عدا قاوس المخضرم ، بل حتى قاوس كان مرتبك و في حيرة كم قال ويبرWiber . يقول ريمان : عندما نمدد الفضاء إلى مستوى كبير غير متناه ، يجب أن نميز ما بين اللامحدود و اللانهاية. الأول يتعلق بتمديد العلاقة و يتعلق الثاني بقياس العلاقة . سطح الكرة مع دوائر مهولة يفهم على أنها خطوط يؤسس فهم جيد لما يعنيه ريمان بأن الخط لا يمتد لانهائياً لأنه عقب امتداده بشكل نهائي سيرتد على نفسه إلا أنه يظل لامحدود حيث ينتقل بلا توقف حول الكرة . يتعامل ريمان مع الهندسة باعتبارها علم تجريبي و لأن المشاهدات الفيزيائية لم تؤكد وجود خطوط متوازية و من ثم فمن حق المرء أن يعتقد : *أن أي زوجان من الخطوط سيلتقيان عند نقطة ذات بعد منتهي .*

و كنتيجة للتفكير الريماني يمكن الالتفات إلى هندسة غير إقليدية و يؤسس فرضية بديلة لفرضية إقليدس للتوازي على النحو التالي :- (عبر نقطة ليست على الخط لا يمكن رسم خطوط موازية للخط) ، بعبارة أخرى *أي زوجان من الخطوط لابد و أن يلتقيان في مكان ما* . هذا المنطق الهندسي اشد تطرفاً من هندسة قاوس و بوليا و لوباشيفسكي , إذ أن مسلمة ريمان لا تتعارض مع مسلمة التوازي , أي مع الهندسة الإقليدية , فحسب بل تتجاوزها لتتعارض أيضا مع مسلمتي إقليدس الأولى و الثانية , أي مع الهندسة المطلقة , فنجد القضية الإقليديه المعروفة بنظرية الزاوية الخارجية تقتضي وجود خطوط متوازية لذا الاقتراح القائل بعدم وجود خطوط متوازية سيكون غير متسق مع مسلمات إقليدس المؤدية إلى تلك النظرية - الفئة من المسلمات يقال إنها متسقة إذا لم يطرأ أي تناقض فيما بينها أو بين ما يترتب عليها من قضايا ونظريات . الفحص الدقيق لبرهان إقليدس لنظرية الزاوية الخارجية يكتشف انه تضمن - بدون وعي - امتداد الخطوط المستقيمة لانهائياً حتى إذا كانت الخطوط منتهية الطول تبقى غير محدودة، فإن طريقته تفشل . لتحاشي التناقض الذي قد ينجم ضمن الهندسة

التي أقترحها ريمان ، من الضرورة تطوير نسق مسلمات إقليدس باستبدال مسلمة إقليدس الثاني (يمكن رسم خط مستقيم منتهى بشكل مستمر على الخط اللانهائي) بـالمسلمة البديلة لريمان : (الخط المستقيم غير محدود) . إلا أن هذه الفرضية تفرز تناقض مع مسلمة إقليدس الأولى . إذ تجوِّز تقاطع المستقيمات في أكثر من نقطة - لأن المستقيمان دائما يلتقيان - لتجاوز هذا التناقض نستبدل مسلمة إقليدس الأولى (أي نقطتان تحددان خط واحد فقط) بمسلمة بديلة وهي (أي نقطتان مختلفتان تحدد على الأقل خط واحد) . أولى الهندستا ن اللاإقليديتان لا تحتوى على أكثر من استبدال مسلمة التوازي بمسلمة اللاتوازي المناقضة في حين تستدعي الأخرى الريمانية استبدال ثلاث مسلمات إقليدية . قد يبدو لأول وهلة هذا ثمن باهظ ومكلف إلا أنه في المقابل الهندسة المنبثقة من هذه الفرضيات البديلة متسقة بقدر اتساق الهندسة الإقليدية .

هندسة ريمان تسمى الهندسة الكروية و هي تخالف الأنساق السابقة في الآتي :

1 - الفضاء سطح كروي درجة انحناءه أكبر من الصفر .

2 - الخط المستقيم لا يمكن أن يمتد إلى ما لانهاية و إنما هو منته لأنه دائري , و هذا يتعارض مع مسلمة إقليدس الثانية .

3 - لا توجد مستقيمات , فكل المستقيمات تتقاطع في نقطتين .

4 - مجموع زوايا المثلث يزيد على قائمتين .

عبر تطور مسار الهندسة اللاإقليدية يستجد السؤال حول الاتساق المنطقي للهندسة اللاإقليدية ؟. نفس السؤال القديم حول اتساق الهندسة الإقليدية . في معرض برهانه على اتساق نظامٍ ما على المرء أن يوضح عدم إمكانية حدوث أي تناقض . إن اتساق أي نظام لفئة من المسلمات ، عادةً ما يتأسس على نموذج

عناصره و علاقاته هي ترجمة وتداعي للحدود غير المعرفة لنظام المسلمات .

إذا النظام من المسلمات الذي نحن بصدده يكون متسقاً إذا تحقق أتساق المسلمات المؤسس للنموذج نفسه . هذا البرهان حقيقة الأمر يزحزح المشكلة من نظام إلى أخر ليس إلا. و نتيجة لاستحالة وجود طريقة مطلقة لإثبات صحة نظام من المسلمات على المرء أن يرضى بإثبات الاتساق النسبي . و هذا ما فعله عالم الهندسة الإيطالي بلترامي(Beltrami(1835-1900 في مقاله :(تأويل الهندسة اللاإقليدية) ، تتأسس طريقته على إيجاد نموذج ضمن إطار الهندسة الإقليدية , ذلك مع تأويل مناسب له نفس البنية الافتراضية كما للهندسة اللاإقليدية لبوليا و لوباشيفسكي . نجح بلترامي في تحقيق واقعية هندسة بوليا و لوباشيفسك ي على سطح كروي كاذب pesu sphere - على شكل بوق - موضحاً أن الهندسة اللاإقليدية متسقة منطقياً بقدر الهندسة الإقليدية ما هي متسقة منطقياً . إن اكتشاف نموذج الهندسة اللاإقليدية كشف الاستحالة المتأصلة لبرهان مسلمة التوازي على أساس مسلمات إقليدس ، لأنه إذا افترضنا العكس فبالإمكان تحويلها إلى نظرية في إطار الهندسة اللاإقليدية وهذا ما يتعارض مع مسلمة التوازي لبوليا ولوباشفسكي وتبقى فرضية التوازي مسلمة في الهندسة الإقليدية على قدم المساواة مع مسلمة التوازي في الهندسة اللاإقليدية .

الهندسة اللاقياسية

الهندسات السابقة جميعها تفترض مسبقاً وجود الفضاء , فهو إما أن يكون مسطح (إقليدي) أو محدب (ريماني) أو مقعر (لوباشيفسكي) , باعتبار الأشكال الهندسية أشكالاً متحركة في الفضاء . و هذا ضروري للحفاظ على قياس الزوايا و المسافات للحصول على التطابق بين الأشكال الهندسية الذي يقتضي وجود المساواة . إذا تخلينا عن شرط القياس و مفهوم التطابق لحصلنا على هندسة جديدة تسمى الهندسة الإسقاطية Projective Geometry التي تعتمد على

مفهوم التكافؤ و ليس التطابق . لا شك إننا في الهندسة الإسقاطية لا نتخلى تماماً عن شرط القياس حيث لا زال من الضروري إجراء القياس للتمييز بين الخط المستقيم و بين المنحنى . فإذا سقط مفهوم الخط وجدنا أنفسنا أمام التوبولوجيا و هندسة تعني بالكيف دون الكم . الدائرة و المربع متشاكلان لأن بالإمكان تشكيل أحدهما من الآخر من خلال عمليات الطي , التمدد , الالتواء و الضغط دون أن القطع أو التمزيق . نجد أيضاً أن الكرة تشاكل البيضة لأن كلاهما يشترك في سمة توبولوجية و هي أن سطح كلٌ منهما مغلق لكنه لا يشاكل سطح عجلة السيارة لأنه مفرغ من الوسط . $_5$(3)

فيليـــكس كلين Felex Klein(1849-1925)

نحن الآن بصدد عدد من الهندسات المختلفة كل منها له خواصه و مميزاته . و طالما استبعدنا فكرة واقعية الفضاء , فمن الممكن باستخدام تحويلات مناسبة للمسلمات أو البديهيات , أن نحصل على عدد لامتناهٍ من الأنساق الممكنة منطقياً . وهنا لنا أن نتساءل : أي هذه الأنساق أساسي أكثر من غيره ؟ . كلين رياضي ألماني نشر بحث حول الهندسة اللاإقليدية أشار فيها بوضوح إلى التميز بين الهندستين اللتين أفترضها ريمان في التوازي . في أولاهما خطان مستقيمان يلتقيان عند نقطة واحدة وفي الأخرى الخطان المستقيمان يتقاطعان عند نقطتين . تركز عمل كلين الأساسي في تأسيس نموذج يضم كلاً من هندسة بوليا و لوباشيفسكي وهندستي ريمان . بحيث إذا آمن أحد باتساق الهندسة الإقليدية فبالضرورة أن يؤمن باتساق هندستي ريمان . النمط الأول من هندسة ريمان في هذا النموذج عبارة عن نصف كرة حدها دائرة . الأقواس الدائرية الكبيرة على نصف الكرة هي خطوط هذه الهندسة . الكرة نفسها تحقق نموذج للنوع الهندسي الآخر . يبقى سؤال بلا إجابة : هل هندسة ريمان اللاإقليدية متسقة داخلياً ؟ و هو نفس السؤال بلا إجابة : هل هندسة إقليدس متسقة داخلياً؟

الإنجاز الأعظم أهمية لكلين استحداثه لمفهوم الزمر في تصنيف وتوحيد الهندسيات الأساسية يسمى (Erlanger program) وصف فيه الهندسة بأنها:(دراسة خواص الأشكال تلك التي تبقى بلا تغير تحت تأثير جزئي لزمرة من التحويلات) ، مما حقق ترتيب وتنظيم وتجميع القوانين لكافة الهندسا ت التي يبدو لأول وهلة إنها غير مرتبطة.ولأول مرة حتى العام 1871 أصبحت الهندسة اللاإقليدية مألوفة للرياضيين كنتيجة لجهود كلين . كان اقتراح كلين هو أن كل هندسة (س) تتميز بعائلة وحيدة من التحويلات (ت) , و تتعامل مع ما لتلك الأشكال الهندسية من خواص و علاقات لا تتغير بتلك التحويلات . و كمبدأ عام يمكن أن نصف أن الهندسة (س $_1$) بأنها أساسية أكثر من الهندسة (س $_2$) إذا كانت عائلة التحويلات (ت$_1$) هي جزء فعلي من (ت$_2$) . $_6$(3)

يمكننا الآن أن نصل إلى استنتاج عام يفيد بأن كل نسق هندسي – إقليدي أو لاإقليدي – هو في ذاته صحيح . فإذا بدأنا بتعريفات و بديهيات و مسلمات إقليدس , جاءت مبرهنات النسق من تلك المقدمات , و من ثم فهو صحيح . و إذا انطلقنا من مسلمات لوباشيفسك ي جاءت مبرهناته صحيحة . ليس بالضرورة افتراض صدق القضايا على الواقع , فالهندسة علم الخواص الهندسية الممكنة عقلاً فحسب , لا علماً بخواص الموجودات القائمة بالفعل في الواقع . و على هذا ليس من حق أي نسق أن يدعي أنه يمتلك الحقيقة المطلقة لخواص الفضاء لوحده كما كان الحال عند الرياضيين في تصورهم لهندسة إقليدس . و لنأخذ مثلاً الفرض الأساسي الذي يقوم عليه النسق الإقليدي و هو أن الفضاء مسطح . هذا الفرض خاطئ و فاسد . خاطئ لأن وقائع الفيزياء المعاصرة تكذبه , و فاسد لأن الهندسة كفرع من الرياضيات البحتة لا صلة لها بصدق أو كذب واقعي .

الباب الثامن

تاريخ نظرية الفئات

فــئات الأعداد الأساسية كالآتي

الأعداد الطبيعية و هي $N = 1 , 2 , 3 , \ldots$

الأعداد الصحيحة و هي $Z = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$

الأعداد النسبية و هي $Q = \left\{ {}^{a}\!/_{b} \big/ a, b \in Z , b \neq 0 \right\}$

الأعداد اللانسبية $\sqrt{2}$ ليس بعدد نسبي و بشكل عام فإن $\sqrt{P}$ ليس عدد نسبي

لكل P عدد أولي إذ لايوجد عددان صحيحان a و $b \neq 0$ بحيث نكتب $\sqrt{P} = {}^{a}\!/_{b}$

و عليه لدينا أعداد لا نسبية ويرمز لها بالفئة

$$Q = \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi, \sqrt{7}, \ldots$$

الأعداد الحقيقية: و هي إتحاد الأعداد النسبية والأعداد اللانسبية

$$R = Q \, U \, Q'$$

الأعداد التخيلية: وهي الأعداد التي تكتب

$$\not\subset = \left\{ a + ib / a, b \in R , i = \sqrt{-1} \right\}$$

لاحظ : $N < Z < Q < R < \not\subset$

الفــــئات Sets

عبر نشوء وتطور مسلمات أي فرع من الرياضيات على المرء أن يتعاطى مع

1 - حدود terms غير معرفة

2 - علاقات relations غير معرفة

3 - مسلمات axioms تربط الحدود مع العلاقات

و من ثم يمكن للمرء أن ينشئ نظريات استنادا على هذه المسلمات و التعاريف.

المسلمة (أو البديهية) axiom

تعتبر المسلمة مبرهنة في حد ذاتها أو حقيقة في حد ذاتها لا تحتاج لبرهان إلا أن مفهوم المسلمة تعدل بعض الشئ منذ عهد إقليدس حتى اليوم . وفقاً لمفهوم إقليدس فإن المسلمات حقائق لا تهتز و لا يعتريها الشك , مثل أي نقطتين مختلفتين تشكل خط مستقيم وحيد , اليوم لا نتحدث عن المسلمة هل هي صادقة أم كاذبة حقيقية أم خاطئة . كما في لعبة الشطرنج لا يحق لنا أن نسأل هل قواعد اللعبة صحيحة أم لا. لماذا يخطو الجندي خطوة في حين يأخذ الحصان شكل L في حركته . لفظ مسلمة axiom لفظ إغريقي يعني متطلب . و عليه عليك أن تتقبل المسلمات بدون تساؤل كقواعد للعبة . السؤال الوحيد المسموح به هل القضايا المستنتجة مستنبطة منطقيا من المسلمات ؟ .

ملاحظة

نجد في نشوء نظام مسلمات الهندسة الإقليدية :-

1 - النقاط و الخطوط هي حدود غير معرفة

2 - (نقطة على الخط) أو بشكل مكافئ (الخط يحتوي النقطة) هي علاقة غير معرفة .

3 - (أ) المسلمة : أي نقطتان مختلفتان يحددان خط واحد فقط .

(ب) المسلمة : أي خطان مختلفان لا يحتويان على أكثر من نقطة واحدة مشتركة بينهما .

ملاحظة

نجد في نشوء نظام مسلمات نظرية الفئات :

1 - العنصر و الفئة هي حدود غير معرفة

2 - (عنصر ينتمي إلى فئة) هي علاقة غير معرفة

3 - المسلمات :

(أ) مسلمة الإمتداد – axiom of extension - -: يقال أن الفئتين A و B متساويتان إذا كان كل عنصر منأحدهما ينتمي إلى الآخر.

(ب) مسلمة التعيين – axiom of specification - -: لتكن p(x) عبارة و A فئة فإنه توجد فئة .

$$B = \{a / a \varepsilon A , p(a) \text{ is true} \}$$

هذه العبارة p(x) في متغير واحد بحيث p(a) صادقة أم خاطئة.

(ج) مسلمة الإختيار axiom of choise : حاصل الضرب الكارتيزي لعائلة من الفئات غير الخالية غير خالي .[5]1

<u>كانتور George Cantor(1845-1918)</u>

رياضي ألماني ولد في St.Petersburg بدأ دراسته الجامعية في جامعة زيورخ عام 1862 ثم انتقل بعد فصلٍ واحد إلى جامعة برلين . نال الدكتوراة عام 1867 من جامعة برلين عن مقالات في نظرية الأعداد كانت أساس لأعماله في المستقبل ثم عمل في جامعة Halle . يعزى مولد نظرية الفئات إلى كانتور من خلال ورقته (خواص نظام الأعداد الجبرية الحقيقية) و التي نشرها في صحيفة crelle عام 1874. و في العام 1895 كتب (نظرية الأعداد المتسامية) . توصل كانتور إلى مفهوم العدد الكاردينالي لقياس سعة الفئات اللانهائية . لقد قام كانتور بإبداع رياضي فذ ينم عن عبقرية و يعتبر بحق قمة ما توصل إليه النشاط الذهني و العقلي البشري) كما قال هيلبرت . [3]20

في معرض بحثه عن قياس سعة الفئات اللانهائية البعض أعجب بعمل كانتور و الآخر رأى أن يوضع كانتور في مستشفى للمجانين و لا عجب أن كانتور فعلاً تعرض لانهيار عصبي إن ما قام به كانتور كان إنجاز رائع أمتد تأثيره إلى معظم حقول الرياضيات المجردة و قاد إلى علم توبولوجى الفئات . أعتقد البعض إن ما أبدعه كانتور هو من سبيل الكهنوت و ليس حقيقة . لم يتبوأ كانتور أبداً منصب مرموق بل أمضى حياته في مواقع ثانوية.

قد تكون الفئة منتهية إذا كانت فئة خالية أو كان عدد عناصرها منتهي مثل

$M=\{1,2,3,4\}$ أو $M=\{a,b,c\}$ و قد تكون الفئة لامنتهية إذا كان عدد

عناصرها غيرمنتهي مثل فئة الأعداد الطبيعية $N=\{1,2,3,...\}$ و يقال أن الفئتين

متكافئتان إذا وجدت علاقة تقابل بينهما و تكتب مثلاً $M \approx M'$.

فئة الفئات الجزئية : إذا كانت الفئة $M=\{1,2,3\}$ فإن فئة فئاتها الجزئية

$$2^M=\left[\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\varphi\right]$$

حيث φ هي الفئة الخالية .

لاحظ إذا كانت $M=\{1,2,3\}$ إن عدد عناصر الفئة M هو ثلاثة

$n(m)=3$ في حين أن عدد عناصر فئة فئاتها الجزئية هي $8=2^3=2^M$ و نعني

بسعة الفئة عدد عناصر الفئة .

لاحظ الفئة المنتهية هي تلك التي لاتكافئ أي من فئاتها الجزئية الفعلية مثلاً

$M=\{1,2,3\}$ لاتكافئ $\{1,2\}$ الفئة الجزئية الفعلية منها.

الفئات اللانهائية

كما أشرنا إلى أن الفئة اللانهائية هي الفئة التي عدد عناصرها غير منتهي و أيضاً تكون الفئة لانهائية إذا كانت تكافئ أي من فئاتها الجزئية اللانهائية . مثلاً إذاكان لدينا الفئة $N=\{1,2,3,...\}$ و فئتها الجزئية $2N=\{2,4,6,...\}$ والتي يمكن أن نعيد كتابتها $2N=\{2(1),2(2),2(3),...\}$ فنجد أن هناك علاقة تقابل بين N و $2N$ وهما متكافئتان $N \approx 2N$. فئة الأعداد الطبيعية $N=\{1,2,3,...\}$. فئة لانهائية قابلة للترقيم countable وسعتها هو العدد اللانهائي الذي نرمز إليع إصطلاحاً $N_\circ$ و كذلك جميع الفئات التي تكافئ فئة الأعداد الطبيعية لها نفس السعة أو مايعرف بالعدد الكاردينالي $N_\circ$ ، مثلاً الفئة

$$S=\{1,4,9,16,...\}$$

$= \{1, 2^2, 3^2, 4^2, ...\}$

تكافئ N أي أن $S \approx N$ و $n(S) = N_\circ$ أي أن سعة S هونفس العدد الكاردينالي $N_\circ$ الذي هو سعة الفئة N .

<u>الفئات المرقمة</u> countable sets

<u>1 تعريف</u>

يقال أن الفئة x لانهائية إذا كانت تكافئ فعلياً فئتها الجزئية .

<u>2 تعريف</u>

يقال أن الفئة x قابلة للترقيم فقط أذا كانت $x = \phi$ أويوجد تطبيق غامر $f : N \to X$ حيث $N = \{1, 2, 3, ...\}$ مالم فهي غير قابلة للعد .

<u>1 مثال</u>

$$x = \{0, 1, 2, ...\}, f : N \to x \quad , f(n) = n - 1$$
$$y = \{2, 4, 6, ...\}, f : N \to y \quad , f(n) = 2n$$
$$Z = \{1, 4, 9, ...\}, f : N \to Z \quad , f(n) = n^2$$

كلها فئات قابلة للترقيم لأنه يوجد في كل حالة دالة غامره من N إلى كل من x و y و z .

<u>2 مثال</u>

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, ...$$
$$I = 0, -1, 1, -2, 2, ...$$

أيضاً I فئة الأعداد الصحيحة قابلة للترقيم لأنه بالأمكان ترتيبها بحيث يمكن ترقيم كل عنصر من I بعنصرمن N .

<u>3مثال</u> Q^+ قابلة للترقيم

يمثل الشكل التالي نسقاً في جدولةعناصر Q^+

$$\begin{array}{llllll}
N: & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \;\; \ldots\ldots\ldots \\
N_2: & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \;\; \ldots\ldots\ldots \\
N_3: & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \;\; \ldots\ldots\ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

واضح أن كل فئة N_i في النسق قابلة للترقيم و واضح أن اتحادهم

$Q^+ = \bigcup_i N_i = N_1 U\ N_2 U\ N_3 U \ldots\ldots$ أيضاً قابل للترقيم .

3 تعريف

قد تم إصطلاحاً أعطاء كل الفئات المرقمة اللانهائية العدد الكاردينالي $N_\circ$ كسعة لها.

الفئات غير القابلة للترقيم Uncountable sets

1نظرية

$\sqrt{2}$ عدد غير نسبي(لاقياسي)

البرهان :

لنفرض العكس , أي نفرض أن P عدد نسبي في أبسط صوره $P = \frac{m}{n}$ حيث m و n عددان صحيحان غير زوجيين .

$$P = \sqrt{2}$$
$$P^2 = 2 \quad \ldots(1)$$
$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$\frac{4}{m^2} \Leftarrow \frac{2}{m} \Leftarrow$ زوجي $m \Leftarrow$ زوجي $m^2 \Leftarrow m^2 = 2n^2$

زوجي $n \Leftarrow$ زوجي $n^2 \Leftarrow \frac{2}{n^2} \Leftarrow \frac{4}{2n^2} \Leftarrow$

أي أن كلٌ من m و n زوجي مما يناقض الفرض بأن هناك عدد نسبي $P = \sqrt{2}$

$\therefore$ $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي و عموماً لكل P عدد أولي فإن $\sqrt{P}$ عددغير نسبي .

نظرية2 [4]2 الفئة $X = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ غير قابلة للترقيم .

البرهان :

سيكون البرهان باسلوب التناقض أفرض أنه توجد دالة غامرة

$$f : \mathrm{N} \xrightarrow{onto} x$$

و $f(n), \forall n \in \mathrm{N}$ هو عدد يقع بين 0 و 1 وعليه فإن له تمثيل عشري وحيد يكتب

$$0.x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3} \ldots$$

و سنوضح الدالة f كالآتي = حيث كل x_{ij} عدد صحيح بين 0 و 9 -

$$f(1) = o.x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \ldots$$
$$f(2) = o.x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \ldots$$
$$f(3) = o.x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \ldots$$

دعنا ننشئ عدداً مابين 0 و 1 على النحو الآتي : أولاً يكتب $o.y_1\, y_2\, y_3 \ldots$

حيث أن $y_1 = 7$ اذا كانت $x_{11} \neq 7$ و $y_1 = 3$ اذا كانت $x_{11} = 7$

$y_2 = 7$ إذا كانت $x_{22} \neq 7$ و $y_2 = 3$ اذا كانت $x_{22} = 7$ ...الخ .

و عليه فإن العدد $y = o.y_1\, y_2\, y_3 \ldots$ هو بحيث أن $0 < y < 1$ لايحتمل أن يكون له تمثيلين عشريين لأن $\forall n \in \mathrm{N}$ y_n ليس بصفر و لا 9 علاوة على ذلك فإن y تختلف عن $f(1)$ في الخانة العشريه الأولى و عن $f(2)$ في الخانة العشرية الثانية و عن $f(n)$ في الخانة العشريه النونية $\forall n \in \mathrm{N}$. و عليه فإن

$y \notin [f(n)/n \in N]$ أي انه يوجد $y \in X : f^{-1}(y) = \phi$ . . $\therefore$ f ليست غامرة

و x غير قابلة للترقيم .

نتيجة : و عليه بما أن $X \subset R$ غير قابلة للترقيم فإن R ليست قابلة للترقيم .

4 تعريف

تم أصطلاحاً أعطاء العدد الكاردينالي C لكل الفئات الغير قابلة للترقيم والتي تكافئ R عددياً .

و السؤال الذي طرحه كانتور و ليس له إجابة : هل يوجد عدد كاردينالي مابين $N_\circ$ و C و لكنه يخمن أنه لايوجد مثل هذا العدد و هذا ما يعرف بفرضية الإستمرارية Continioum Hypotheses . و السؤال الثاني هل توجد أعداد كاردينالية أكبر من C و الجواب نعم و على سبيل المثال العدد الكاردينالي لصف كل الفئات الجزئية من R .

3 نظرية

لأي فئة غير خالية X العدد الكاردينالي لها أقل من العدد الكاردينالي لصف جميع فئاتها الجزئية .

البرهان :

مطلوب إثبات أن

$$(i) \quad \exists\ f : x \xrightarrow[\text{تباين}]{1-1} C(X)$$

$$(ii) \quad \exists\ f : x \xrightarrow[\text{غامره}]{onto} C(X)$$

C(x) هي صنف جميع الفئات الجزئية من X لإثبات الفقره (i) يكفي أن نشير أن لكل عنصر $f : x \to \{x\}$ أي أن صورة أي عنصر هي الفئة التي تحتوي عليه وحده $\{x\}$ لأثبات $\{ii\}$ نفرض أنه توجد داله غامرة $f : X \to C(X)$.

أفرض أن A فئة جزئية من X معرفه كالآتي

$$A=\{x/x\notin f(x)\}$$

و بما أن f غامرة فإنه يوجد $\forall\ a\in X$

$f(a)=A$ والسؤال أين يوجد العنصر a ؟

فإذا كان $a\in A$ فمن تعريف A نحصل على $a\notin f(a)$ و بما أن $f(a)=A$ فإن $a\notin A$ وهذا تناقض . و لو كان $a\notin A$, فأيضاً من تعريف A فإن $a\in f(a)$ و عليه $a\in A$ (لأن $f(a)=A$) وهذا تناقض أخر وهذا وضع مستحيل وعليه فإنه لاتوجد دالة غامره $f:X\to C(X)$

ملاحظة إذا كان n هو سعة الفئة x فإن 2^n هو سعة الصف C(x)

4. نظرية [5]2 $\quad 2^{N_\circ}=C$

البرهان :

الفئتان $N=\{1,2,3,...\}$ و $I=[0,1)$ عدداهما الكاردينااليان هما $N_\circ$ و C على التوالي إذا كان $C(N)$ هو صف جميع الفئات الجزئية لـــ N وبالتالي فإن $C(N)$ لها عدد كاردينالي $2^{N_\circ}$. و البرهان يتلخص في إيجاد تكافؤ عددى بين كلاً من $C(N)$ و I . أولاً سنبدأ بإيجاد $f:C(N)\xrightarrow[\text{ن تباين}]{1-1} I$. إذا كانت A فئة جزئية من N فإن $f(A)$ هوعدد حقيقي $x\in I$ له تمثيل عشري $x=o.d_1d_2d_3...$ يعرف كالآتي

$d_n=3$ إذا كان $n\in A$ و $d_n=5$ إذا كان $n\notin A$

ثانياً سنوجد دالة تباين $g:I\xrightarrow[\text{ن تباين}]{1-1} C(N)$

إذا كان العدد الحقيقي $x\in I$ وكان $x=o.b_1b_2b_3...$ هو التمثيل الثنائي للعدد x (أي ان b_n هي 1 أو 0) فإن $g(x)$ هي الفئة الجزئية A من N معرفة كالآتي $A=\{n:b_n=1\}$ و استناداً إلى نظرية (schroeder –Bernstein)

فإن $I = [0,1)$ و $C(N)$ متكافئان عددياً لأن كلاً منهما يكافئ الفئة A الفئة الجزئية من الأخرى $2^{N_\circ} = C$.

<u>فئة كانتور</u>

نشكل فئة كانتور كالآتي أولا نسمي فترة الوحدة المغلقة $F_1=[0,1]$ ثم نحذف منها الفترة المفتوحة (1/3,2/3) لتبقى الفئة المغلقة $F_2= [0,1/3]U[2/3,1]$

و التي نحذف منها الفترات المفتوحة (1/9,2/9) و (7/9,8/9) لتبقى الفئة المغلقة

$F_3 = [0,1/9]U[2/9,1/3]U[2/3,7/9]U[8/9,1]$

ثم نستمر بنفس الطريقة بحذف الثلث الأوسط المفتوح من كل فترة جزئية مغلقة لنكوّن متتابعة من الفئات المغلقة F_n و نعرّف فئة كانتور بأنها $F = {}_{n=1}\cap F_n$

و F مغلقة لأنها تقاطع فئات مغلقة . يا ترى مهي النقاط التي تبقت أخيرا بعد حذف الفئات المفتوحة (1/9,2/9) و (7/9,8/9) . . . ؟

واضح أن F تحتوي على مجمل النقاط الحدية لكل الفترات المغلقة التي تشكل أي F_n و هي : $0,1,1/3,2/3,1/9,2/9,7/9,8/9,\ldots$

إضافة إلى ذلك فإن F تحتوي على حشد غفير من النقاط مثل 1/4 . في الوقت الذي تشكل فيه النقاط الحدية فئة مرقمة إلا إن F غير قابلة للترقيم , أي أن رقمها الكاردينالي c الرقم الكاردينالي للإستمرارية . لنبرهن أن F غير قابلة للترقيم يكفي أن نستعرض دالة تباين من ([0,1 إلى F . لتكن x نقطة من ([0,1 و ضع $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$ على هيئة المفكوك او التمثيل الثنائي كل b_n هي 0 أو 1. لتكن $t_n = 2b_n$ و $0.t_1t_2t_3\ldots$ المفكوك الثلاثي للعدد الحقيقي $f(x)$ في [0,1) واضح أن f(x) في F . بما أن t_1 هي 0 أو 2 فإن f(x) لا توجد في (1/3,2/3] و بما إن t_2 هي 0 أو 2 فإن f(x) لا توجد في (1/9,2/9]

أو (7/9,8/9] , ... كما إنه أضحى واضحا أن $f : [0,1) \rightarrow F$ هي تباين و عليه فإن F تحتوي بالتحديد على نفس الكم من النقاط مثل نقاط (0,1] .

من الشيق أن نقارن هذه النتيجة مع حقيقة أن مجموع اطوال الفترات المفتوحة المحذوفة :

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = {}_{n=1}\sum 2^{n-1} / 3^{n} = 1$$

يعرف قياس الفئة بأنه طول الفئة . و مايتبقى من طول الفترة [0,1] هو صفر وهو قياس فئة كانتور of measure zero . [11]. و فئة كانتور ذات بعد كسري و هو $\log 2 / \log 3 < 1$.

مأزق نظرية الفئات[6]

من الطبيعي أن يعتقد المرء أن الرياضيات البحتة هي نظام ساكن لا يتغير، كامل و مطلق الصحة على نحو مغاير للفيزياء المتغيرة وغير النهائية فإن الرياضيات تبدو أشياءها دائماً كما هي . على أي حال فإن الأمر في الحقيقة ليس على هذا النحو . الكثير من الناس واعون و مدركون للجدال حول النظرية الكم و هما النظريتان اللتان أحدثتا ثورة في الفيزياء في القرن المنصرم . لكن القليل فقط يدرك أن هناك ثورة عظمى مثيرة للجدل في الرياضيات البحتة و تبدأ من كانتور و هو اكتشافه لنظرية الفئات اللانهائية

$$1,2,3,\ldots,w,w+1,\ldots,2w,2w+1,\ldots,w^{2},\ldots,w^{3},\ldots,w^{w},\ldots,w^{www\ldots}$$

حيث w تعني لا نهاية $\in_{0} = w^{www\ldots\ldots}$

المفارقات في نظرية الفئات Paradoxes

صدق من قال إن العلاقة بين نظرية كانتور للفئات و الرياضيات هي كالحب الحقيقي أبداً لا يجري بنعومة وسلاسة . إذ ما فتئت أفكار كانتور في الانتشار و القبول في حوالي 1900 سرعان ما بدأت المتناقضات في الظهور. لقد هزت المتناقضات التي توصل إليها برتراند راسل (1872-1970) هزت أسس المنطق و الرياضيات هزة عنيفة.

مفارقة راسل

انطلاقا من وجهة نظر كانتور إن أي شرط يعين فئة , فإن راسل كون الفئة س فئة كل الفئات والتي ليست عنصر من نفسها كالآتي

$$X = \{A \setminus A, set; A \notin A\}$$

السؤال : هل هذه الفئة تحتوي على نفسها ؟ هنا تكمن المفارقة , هذه الفئة تحتوى نفسها فقط إذا كانت لا تحتوى نفسها !

مفارقة كانتور

نحن نعلم أن سعة الفئة O(A) هي أقل من سعة فئة كل فئاتها الجزئية O(P(A))
:أي أن O(A) ≤ O(P(A)) وتستمر العملية إلى ما لانهاية.تتضح المتناقضة عندما نتعامل مع الفئة الكلية U التي تحتوى على كل الفئات، بما إن سعتها أقل من سعة فئة فئاتها الجزئية في نفس الوقت الذي فيه فئة الفئات الجزئية P(U) تعتبر جزئية من الفئة الكلية U فإن سعة الفئة الكلية أكبر من سعة فئة فئاتها الجزئية أي أن **(O(U) ≤ O(P(U)** و في نفس الوقت **O(P(U)) ≤ O(U)** . لقد كان اعتماد كانتور في نظرية الفئات على الحدسية و ليس على فئة من البديهيا ت لكن لم يكن الحس والحدس كافي لحماية نظرية الفئات من التصدع تحت وطأة المفارقات .

زيميلو(Eruest Zermelo 1871-1953) الرياضي الألماني و الذي ابتكر و أبدع مسلمة الاختيار عمد إلى ترميم البناء الاعتباطي لنظرية الفئات الكانتورية . وضع زيميلو فئة من سبعة بديهيات كافية كأساس لبناء نظرية للفئات الضرورية لكل التطبيقات الرياضية العملية . من بديهيات زيميلو : $_7$(3)

1 - إذا تطابقت عناصر فئتان فهما متساويتان .

2 - إذا كانت A, B أي فئتين مختلفتين فإن الفئة $\{A, B\}$ هي تلك الفئة التي عناصرها هما A, B فقط .

3 - إذا كانت X فئة و n صفة (محمول محدد) فإن X_n هي فئة جزئية من X يشترك عناصرها في صفة واحدة هي n .

4 - إذا كانت X فئة فإن 2^X هي مجموعة كل الفئات الجزئية من X

لكي يتحاشى المتناقضات استبعد زيميلو الفئات الضخمة مثل فئة كل الفئات أو فئة الفئات التي لا تحوى نفسها و اكتفى بالفئات التي نحتاج إليها عملياً مثل فئة الأعداد الطبيعية و فئة الأعداد الحقيقية . لا وجود لفئة كل الفئات في نظام زيميلو و هذا من خلال مسلمة التعيين :

5 - Axiom of specification : لأي فئة A وأي خاصية محدودة P(X) هناك فئـــة تقابله عناصرها هم بالتحديد أولئك العناصر X في A و التي تتحقق عندها الخاصية P(X) .

6 - مسلمة الاختيار : حاصل الضرب الكارتيزي لعائلة غير خالية من الفئات غير الخالية غير خالي . و تكافئ مسلمة زورن Zorn .

7 - مسلمة زورن: إذا كانت X فـــــئة غير خالية و مرتبة جزئياً بحيث أن كل فـئة جزئية منها مرتبة كلياً لها عنصر حد أعلى في X فإن X يحتوي على الأقل عنصر أعظمي واحد .

أتساق نظام زيميلو- فرانكيل في نظرية الفـــــــئات

الاتساق المطلق أمراً صعب المنال . وفقاً لنظرية جوديل في عدم الاكتمال من المستحيل في بعض الأنظمة المنطقية - مثل نظرية الفئات لزيميليو و فرانكيل- التحقق من اتساق النظام داخلياً انطلاقا من الطرق المستمدة و المشكّلة ضمن النظام نفسه . برهن جوديل : إذا كانت بقية المسلمات في نظرية الفئات متسقة مع بعضها البعض فإن إضافة مسلمة الاختيار و مسلمة الاستمرارية لن يضفي أي تناقض . بعبارة أخرى فإن مسلمتا الاختيار و الاستمرارية متسقتا نسبياً .

[18][3] بول كوهين عام 1963 نجح في إثبات أن نقيض أو نفي كلاً من مسلمتي الاختيار و الاستمرارية أيضاً متسق مع بقية مسلمات زيميليو- فرانكيل بما يعني أنهما متسقتان نفسيهما . الجمع بين ما توصل إليه جوديل و كوهين يفيد أن مسلمة الاختيار مستقلة عن منظومة بديهيات نظرية الفئات : استخدامها أو تركها هي رغبة ذاتية . و لأن العديد من النظريات العويصة تم التوصل إليها باستخدام مسلمة الاختيار، و من غير وجود بديل معتبر لها، فإن معظم الرياضيون يستحسن استصحابها . إلا أن البعض الآخر الذي يرتاب في مسلمة الاختيار يرى أن وجود برهان مختلف لا يستخدم مسلمة الاختيار مطلوب . بول كوهين Paul Cohen ولد عام 1934 في نيوجرسي بالولايات المتحدة . في عام 1950 وضح من خلال تكنيك سماه(Forcing) التقوية أن كلاً من مسلمة الاختيار و فرضية الاستمرارية لا يمكن إثباتها أو نفيها ضمن مسلمات نظرية الفـئات لزيميليو- فرانكيل . استناداً على هذه المسلمة لا وجود لفئـة كل الفئـات أو ما شابهها في نظام زيميلو . فيما يختص باتساق منظومة بديهيات زيميلو – فرانكيل في نظرية الفئـات فقد تصدى لها جوديل , كما سنتطرق إليها لاحقاً .

الباب التاسع

فلسفة الرياضيات

الرياضيات : Mathematics

و هي دراسة النماذج البنيوية و التغير و الفراغ وبشكل أساسي فإن الرياضيات هي دراسة الشكل والعدد وبنظرة أساسية هي التحري من المسلمات(البديهيات) التي تعرّف التراكيب المجردة مستخدمة الرموز المنطقية . تعتبر الرياضيات امتداد لغوي مبسط للقراءة و الكتابة يستخدم نحو و مفردات بشكل مختصر و دقيق مفيد في وصف و اكتشاف الطبيعة والعلاقات بين المفاهيم المهمة في وصف الطبيعة . الجمال , يعتبر أول سجية للرياضيات . إنه جمال من نوع غريب لا يتذوقه إلا من أترع من كأس الرياضيات حتى الثمالة . الجمال المتغلغل بين ثنايا الرياضيات و حناياها و الذي نجده تارةً في التناغم و الانسجام و التماثل و تارةً أخرى في لغة الرياضيات و منطقها الذي ينساب في سلاسة أشبه ما يكون بالنثر أو الشعر الحر .

الرياضيات أداة ولغة لوصف الحوادث . فهي لغة تصف الظواهر بدقة وإيجاز و أناقة . أما لغاتنا العادية فلا تتمتع بمثل هذه الدقة بما هو كاف و لغاتنا – كلها - ليست خالية من الالتباس . وعندما ينضج فرع من فروع المعرفة نضوجا كافياً و تغدو مفاهيمه واضحة وضوحا بلوريا فعندئذ لا تغدو اللغة العادية الوسيلة المثلى للوصف الدقيق لذلك الفرع من العلم . ونتيجة لذلك يكون العلم الناضج في حاجة إلى وسيلة أكثر دقة وصقلا لغرض التعبير عن مفاهيمه . فإذن تبرز الرياضيات – تلك اللغة الدقيقة التي لا لبس فيها ولا غموض – تبرز كبديل مناسب لصياغة المفاهيم و المدركات لذلك العلم . و عليه يجد كل حقل من حقول المعرفة عند نضوجه – بسبب الضعف الصميمي في اللغة الاعتيادية – يجد نفسه في حاجة ماسة إلى الرياضيات . ليس المقصود بنضوج فرع من

فروع العلم هو حجم البحوث في ذلك العلم و ليس المقصود مقياس أهمية ذلك العلم للإنسان إنما المقصود إن مفاهيمه تتجاوز الواقع و يصبح فيها شيء من التجريد العالي . هذا يفسر إلى حدٍ ما ظاهرة غزو الرياضيات للعلم .

هناك سمة مهمة أخرى للرياضيات , فالرياضيات ليست مجرد أداة خامدة تستعمل للتعبير الدقيق عن المفاهيم العلمية فحسب إنما تشكل عاملاً فعالاً لتوجيه مجرى البحوث العلمية و بالتالي حدوث الظواهر نفسها . تحتاج هذه العبارة مزيدا من التفسير . فالمقصود أن توفر أو عدم توفر نظرية رياضية في وقت ما يحدد إلى حد كبير مدى أسلوب تطور المعرفة العملية في ذلك الوقت , فعلى سبيل المثال لو لم تكن هندسة ريمان متوفرة في بداية القرن المنصرم لما وجدت نظرية الجاذبية لأينشتين . لنحاول أن نتصور حالة العلم و العلوم الهندسية اليوم إذا لم يكتشف حساب التفاضل و التكامل و لم تكن المعادلات التفاضلية متوفرة اليوم فهل من الممكن أن تكون لدينا الفيزياء أو الكيمياء كما نعهدها اليوم ؟ و هل يستطيع المرء أن يحلم بالكهرومغناطيسية ؟ العكس أيضاً صحيح إن حالة العلم تحدد إلى حد ما اتجاه البحوث الرياضية .

التجريد ABSTRACTION من السمات الداخلية للرياضيات , التجريد هو العملية الذهنية لنزع بعض أو كل الخواص عن الأشياء أو الحوادث والمواقف . فعلى سبيل المثال هذه منضدة أمامي مصنوعة من الخشب ذات لون بني وذات سمك معين مرفوعة على أرجل أربعة وموضوعة بصورة أفقيه وموجودة في هذه القاعة. لأنزع عن هذه المنضدة لونها ولأغض النظر عن المادة المصنوعة منها و لأهمل سمكها و لأتناسى أرجلها ولأتجاهل وضعها الأفقي و وجودها في هذه القاعة , فماذا يبقى فيها ؟ هل تبقى صفة من صفاتها , يبقى أنها مستطيلة الشكل .المستطيل هو التجريد لهذه المنضدة . التجريد صفة من صفات كل العلوم و المعرفة . إلا إن الرياضيات تتسم بالتجريد العالي فتكاد أن تجرد الأشياء من

جميع صفاتها . التجريد , على عكس التصور السائد يزيد من قابلية التطبيق للرياضيات . فالمفهوم المجرد لا يكون صالحا لهذا أو لذلك الموقف فحسب بل أنما يكون صالحا لشتى المواقف , كما و أن التجريد يؤدى إلى اقتصاد فكري و لغوي .الرياضيات موضوع نام متطور و النظريات الرياضية تزداد في استمرار والمفاهيم الرياضية في نمو مستمر . كيف تتطور المفاهيم الرياضية ؟

تنمو معظم الأفكار الرياضية من خلال حاجات الإنسان المادية والفكرية . لقد كانت الحاجات المادية والفكرية هي العامل المسيطر في تطور المفاهيم الرياضية خلال الحقبة القديمة من تاريخ الإنسان. أما الآن فتلعب الحاجات الفكرية دورا اكبر في تحريك التطور الرياضي .

التجريبية الرياضية Mathematical Empiricism

تنطلق النزعة التجريبية من مبدأ أساسي يؤكد أن كل ما لدينا من معارف مكتسب و ليس فطرياً أو قبلياً , فالمعرفة تنشأ عن التجربة و تكتسب قيمتها و مضمونها بقدر اتصالها بالواقع التجريبي المحسوس فقط . التجريبية الرياضية هي حركة في فلسفة الرياضيات تنزع إلى إلغاء أو تجاوز مسألة أسس الرياضيات و تعيد توجيه الفلاسفة للنظر فقط في التطبيقات الرياضية و علاقتها بالفيزياء و العلوم الاجتماعية و التعاطي مع ما تقود إليه الرياضيات من نتائج لا من أين أتت . لقد نمت الرياضيات و الفيزياء وترعرعا معاً مما عزز انحياز الرياضيات و التصاقها بالمعرفة التجريبية والحسية. الفيلسوف (مل) في كتابه المنطق يعتقد بأن قضايا الرياضيات تعميمات من التجربة و إن علم الحساب مؤلف من تعميمات جاءتنا بها التجربة , على سبيل المثال مفهوم العدد المجرد نبع عن الخبرة القائمة على عد الأشياء المنفصلة .

الواقعية الرياضية Mathematics Realism

تقول بأن كل الكينونات الرياضية موجودة بشكل مستقل عن العقل البشري أي أن الإنسان لا يخترعها بل يكتشفها، فإذا كنا نؤمن بحقيقة الظاهرة الطبيعية التي تم وصفها علمياً فبالضرورة أن نؤمن بحقيقة الكينونات الرياضية التي عبرت عنها.

الواقعية الرياضية (الأفلاطونية)

أفلاطون في نظريته عن الأفكار يصرِّح بوجود عالم مفارق من الأفكار له طابع إلهي تقطنه تصورات و ماهيات كاملة و صادقة و ثابتة . و تتسم وقائع هذا العالم بأنها مجاوزة للإدراك و الفهم الإنساني بوسائله العادية , و أنها مستقلة بذاتها سواء اكتشفنا وجودها أم لم نكتشفه , بالإضافة إلى أن اكتشاف هذه الوقائع لا يزيدها قيمة كما لا ينقص من قدرها عدم اكتشافنا لها . هذا العالم المعقول و اللازمكاني واقعي تماماً , فليست الدائرة أو المساواة من بنات أفكارنا بل كائنات مستقلة , فحقائق الحساب تبقى ثابتة و صادقة حتى و لو لم يكن هناك شيء ليعد و حتى لو لم يكن هناك من يعرف كيف يعد . هذه المعرفة اللازمكانية لا تقبل الدحض و لا التفنيد .

جاليليو يرى أن الرياضيات هي المنطق الجديد للعلم و لغته . و هو مطمئن إلى أن الرياضيات هي مفتاح سر الطبيعة نظراً لاكتشافاته العديدة في مجال الميكانيكا حيث تسير الظواهر الطبيعية وفقاً لمبادئ الهندسة . و هذه الوفرة من الحقائق الرياضية في العلم الطبيعي توحي إلى جاليليو أن العالم الذي يقع خارج العقل مكون من خواص رياضية فقط . و أن المادة تتمثل في مقادير و قيم رياضية , و خواص المادة الكمية و القابلة للقياس , كالحدود و الشكل و الحجم و المكان و الزمان والحركة و العدد , هي وحدها التي يمكن اعتبارها جزءاً من العالم

الحقيقي لأنه لا وجود لأجسام بدون هذه الخواص في حين حتى لو تلاشى الجسد يبقى الشكل فكرة مجردة في العقل .

واقعية ديكارت الرياضية

الفيلسوف و الرياضي ديكارت جعل من الفكرة اللبنة الأولى في بناء مذهبه (أنا أفكر إذاً فأنا موجود) , فالفكرة هي كل ما يستطيع العقل إدراكه مباشرة و الأفكار الواضحة هي التي تؤلف الحقيقية . لا يعتبر ديكارت الأفكار كائنات واقعية مجردة تقطن عالم المثل الأفلاطوني , كما لا ينظر إليها كتعميمات تجريبية يمكن الحصول عليها بالخبرة , و إنما يعتقد بفطريتها أي بكونها موجودات ذهنية أودعها الله في الإنسان و من ثم هي كامنة في العقل و لدينا استعداد دائم لتوليدها , الكينونات الرياضية ليست معتمدة على العقل بل مستقلة . ويقول ديكارت :- أجد في نفسي مالا نهاية من الأفكار لأشياء لا يمكن أن تكون محض عدم، على الرغم من احتمال عدم وجودها خارج تفكيري هذه الأشياء ليست من نسج خيالي و لا وهم . بغض النظر عن مقدرتي أو عدم مقدرتي في التفكير فيها ،على النقيض ، لها حقيقتها الخاصة و طبيعتها الراسخة . على سبيل المثال عندما أتخيل مثلث حتى و لو لم يكن له وجود خارج تفكيري إلا إنني لم أخترعه و لا يعتمد على عقلي في وجوده أو في خصائصه و أن مجموع زواياه يعادل زاويتان قائمتان و أن أضلاعه ثلاثة . هذه أشياء موضوعية مستقلة عن تشييدي العقلي لها ، لم أخترعها. يقول ديكارت أن الحدس يعتبر الخطوة الأولى لأي عمل عقلي يتصف بالدقة و الوضوح و به ندرك المبادئ الأولى المجاوزة للحس و الخيال .

واقعية جوديل الرياضيةGödel's Realism

الرياضيون عادة ما ينفرون من تمحيص المفاهيم الكامنة وراء الرموز الرياضية باعتبارها غير مهمة . بعبارة أخرى هل الكينونات الرياضية وجو دها معرفي فحسب و ليس أنطولوجي ؟ وجود الكينونات الرياضية وجود متعدد المراتب يظل مثار جدل فلسفي . إذا تحدثنا عن إدراك الأشياء الرياضية فمن الصعب تخيل ما

هي الظاهرة الرياضية و تفسيرها أسوه بملاحظة الأجسام الفيزيائية بواسطة الحواس . جوديل يقارن بين سؤال الوجود الموضوعي للأشياء ذات الحدس الرياضي و السؤال حول الوجود الموضوعي للعالم الخارجي . لكن قد يجد المرء أن هذه المقارنة لا معنى لها إذ أن الرياضيات لا تفهم بالمعنى الكوني كما يُفهم العالم الفيزيائي فعلياً لأي شخص. إن الأشياء موجودة مستقلة عن تعريفنا أو تشييدنا لها. و يتركز السؤال عن الأشياء الفيزيائية حول إدراك البيانات عنها بالحواس .

و من الصعب أن نصيغ أو نركب بشكل مماثل الكينونات الرياضية . إلا أن الكينونات الرياضية يمكن التعاطي معها من خلال , الآتي

1 - الفئة هي تجمع لعناصر و المفهوم هو العلاقة بين هذه العناصر .

2 - النظريات حول نظرية الأعداد هي تعميم المشاهدات للعمليات الحسابية .

3 - الجداول و الأشكال ذات قيمة في الجبر و الهندسة والهندسة تاريخياً هي علم قياس الأشياء الفيزيائية.

يختم جوديل قوله : الكينونات الرياضية موجودة بمعزل عن خلقنا و تشييدنا لها و بمعزل عن الخبرة . يرى جوديل أن بديهيات أو مسلمات المواضيع الرياضية هي بمثابة القوانين للمواضيع الفيزيائية و أن المواضيع الرياضية حقيقية ومستقرة و تعمل جيداً على أفضل حال تماماً كما المواضيع الفيزيائية وتحكمها وتحكم سلوكها المسلمات .

<u>فلسفة الرياضيات</u>

تتعلق فلسفة الرياضيات باليقين الرياضي و ما مداه ؟ و ما مدى حدود الرياضيات ؟ وتطرح أسئلة من قبيل لماذا الرياضيات ؟ و بأي حس تشكلت الكينونات الرياضية ؟ لماذا و كيف أن المقولات الرياضية صحيحة ؟ و هل نحن نكتشف الرياضيات فحسب أم نبدعها من عقولنا لتصبح فاعلة في الكون ؟ .

الفرق بين الرياضيات وفلسفتها هو أن الرياضيات تستخدم رموزاً وعلامات، مثل الأعداد وأحرف الهجاء والعلاقات الدالة على الجمع والطرح والضرب والقسمة والتساوي وما إلى ذلك , ثم نركب من تلك الرموز والعلاقات صيغ ومعادلات دون أن نقف عند هذه الرموز والعلاقات نفسها بالتحليل . فتقول الرياضيات مثلا : أن $0+1 = 1$ لكنها تستبعد من مجالها تحليل معاني الواحد والصفر والزيادة والتساوي . فإذا ما تناول باحث هذه الرموز و جعلها موضوع بحثه كان قوله فلسفة رياضية.

يرى الفيلسوف الرياضي راسل أننا إذا حاولنا الانطلاق بالرموز الرياضية المألوفة كان أمامنا أحد اتجاهين للانطلاق إما انطلاق إلي أمام وهو بناء إلى أعلى أي أننا ننطلق من الأعداد و غيرها من العلامات نحو عمليات تركيبية من جمع و طرح و ضرب و تفاضل و تكامل و هذا ما نسميه عادة ((بالرياضيات)). أما الاتجاه الثاني فهو انطلاق إلى وراء و هو انطلاق من الأعداد وغيرها من العلامات إلى ما وراءها إذ نحللها إلى عناصر أبسط منها فنجد أنها برغم كونها نقطة ابتداء في الرياضة إلا أنها هي نفسها نتيجة لعمليات فكريه سابقة لها لنهتدي إلى أسسها الأولى و هذا هو ما نسميه بفلسفة الرياضيات (4) . فلسفة الرياضيات هي دراسة فلسفية للمفاهيم و المناهج الرياضية و تتعلق بدراسة طبيعة الأعداد و المواضيع الهندسية و المفاهيم الرياضية الأخرى كما تتعلق بأصولها المعرفية و تطبيقاتها في الواقع . الرياضيات باعتبارها مصدر للمنطق الدقيق و الحقيقة فهي مهمة جداً للفلسفة، الفيزياء و الميتافيزيقا . تحقق الميتافيزيقا في مناهج الاستدلال الرياضي و تتساءل لماذا تعمل الرياضيات ؟ و كيف ترتبط الرياضيات مع الحقيقة ؟ و ما هي علاقة الرياضيات بالواقع ؟ الفيلسوف الرياضي برتراند راسل يقول : المعرفة الرياضية تبدو دقيقة و يقينه و نقية إلى حد كبير عن الأخطاء و تكاد تكون منزهة من الأخطاء و قابلة للتطبيق على العالم الواقعي . إضافة إلى ذلك فإن الرياضيات هي إبداع فكري بحت لا

يعتمد على الخبرة أو المشاهدة وبالتالي فإن المعرفة التجريبية قاصرة عن بلوغها . و هذا الفكر الرياضي الذي هو فوق الحواس هو فكر حدسي . فإذا كان عالم الحواس لا تلائمه الرياضيات فهذا لعمري قصور في عالم الحواس .أهتم راسل بالأمور الرياضية و تحليل الأعداد و استخدام فلسفة العلم سواء كان العلم رياضيات أو غيرها . رجال العلم يستخدمون ألفاظ و رموز تشكل لغة خاصة تعرف بالغة الشيئية و هي التي تعبر عن النظرية العلمية في البحث العلمي و هناك لغة شارحة للغة الشيئية ليست جزءاً من النظرية العلمية ذاتها بل تنتمي إلى فلسفة العلم . يقدم راسل تعريفه الرياضي على أن نبدأ بقائمة من الألفاظ الأولية التي نقبلها بغير حاجة منا إلى تعريفها، و هذه المدركات الأولية غير المعرفة تنحصر في أقل عدد ممكن لتعطي أكبر عدد ممكن من النظريات من أقل عدد من الفروض.

ويقول فيمان R.feyman حائز على جائزة نوبل : تتمتع الرياضيات بقدر عالي من القوة و الضعف في آنٍ واحد . فهي قد تنشئ وتطور علاقات معقدة بين الأشياء بما يلقى بظلالها على أفكار ما وراء العلاقات الأصلية. و لسوء الحظ فإن هذه الأشياء قد لا يكون لها وجود فعلي في الواقع عدا كونها نمو معقد من التراكيب الرياضية . و من حق أي شخص أن يتساءل مشككا : صحيح أن هذا النظام من المعادلات معقول من وجهة نظر منطقيه لكن لا يعكس وجود طبيعي ؟ سيجيب عليه آينشتاين هذا صحيح , فالخبرة وحدها الحكم على الواقع و الطبيعة . نعم قد تكون الخبرة حكم على الواقع و لكن ليس على الحقيقة فالحقيقة قد تكون أفكار مجردة وحدس لا ينبثق من الخبرة . نجد أن قواعد الجبر أو الأعداد التخيلية مهمة و مفيدة جداً في العمليات الرياضية في حين لا وجود لها في الواقع . و من هنا يحق لنا القول بأن هناك نوعان من الحقيقة المنطقية : حقيقة فيزيائية و حقيقة رياضية وعند هذا التمييز قد نحل مثلاً مشكلة ازدواجية

حقيقة الفوتون كجسيم و موجة التي تبدو متناقضة لأول وهلة , كالآتي : نجد الضوء متسق رياضياً مع النظرية الجسيمية باعتباره كمَات منفصلة من الطاقة و بالتالي فإن الضوء عبارة عن جسيمات أو فوتونات هو صحيح كحقيقة رياضية . في حين أن الضوء متسق فيزيائياً مع النظرية الموجية باعتباره موجات و من ثم يصح اعتبار الضوء كحقيقة فيزيائية . و من هنا يصدق القول بأن الحقيقة الرياضية هي أيضا حقيقة فيزيائية .

أسس الرياضيات

يطلق مصطلح أ سس الرياضيات على بعض حقول الرياضيات بعينها مثل المنطق الرياضي و مسلمات نظرية الفئات ونظرية البرهان و نظرية النمذجة.
يعتبر البحث في أسس الرياضيات السؤال المركزي في فلسفة الرياضيات :
ما هي الأسس الأولية بحيث تصبح المقولات و العبارات الرياضية صحيحة ؟
أي فرع من الرياضيات هو الأصل الذي تفرعت و انبثقت عنه بقية فروع الرياضيات الأخرى ؟ سؤال يعيد اكتشاف أسس الرياضيات . مناهج
الرياضيات منطقية و استدلالية و استنتاجية و أي فرع من الرياضيات له نظرية أساسيه , مثلا

1 - النظرية الأساسية للحساب , تنص :
أي عدد يمكن تحليله إلى أرقام أوليه بصورة وحيدة .

2 - النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل , تنص:
إذا فاضلت التكامل فإنك تحصل على الدالة الأصلية .

3 - النظرية الأساسية للجبر , تنص :
أي معادلة كثيرة حدود لها على الأقل جذر واحد .

الميتا- رياضيات Meta Mathematics [6]

الميتا- رياضيات هي فرع من الرياضيات و هى الرياضيات المستخدمة في معرفة الرياضيات . تركز الميتا - رياضيات على دراسة و تحري مسألة أسس الرياضيات و تتشكل أساساً من نظرية البرهان و نظرية النمذجة . الميتا - رياضيات هي رياضيات نحو الداخل ، هي حقل رياضيات باطني يتحرى و يتحقق مما يمكن أن تنجزه الرياضيات و ما لا يمكن أن تنجزه . تعتبر الميتا - رياضيات نظرة لفحص الرياضيات من علٍ لتمحيص الفكر الرياضي و ما يمكن أن ينجزه . تكمن فكرة الميتا - رياضيات الأساسية في الآتي :

عندما تصيغ الرياضيات على شكل لغة مصطنعة فإنك تصنع نظام شكلي كامل من المسلمات و تنطلق منها لاستنباط نظريات أعلى , أي أنك تستغرق في اللعبة و قواعدها و تغفل عن المسببات الرياضية التي قادت أصلاً إلى هذه اللعبة و ما هو المعنى أو المغزى وراء قواعد اللعبة . عندما تنظر من أعلى , من خارج اللعبة , ما الذي يمكن أن تراه ؟ ما هو القصور الذي يمكن أن تكتشفه ؟ ما مدى اتساق النظام , أي هل يمكن فقط برهنة القضية أو برهنة نقيضها ؟ هل النظام الرياضي مكتمل أم توجد عبارات لا يمكن البت بصدقها أو خطئها و بالتالي النظام الرياضي غير مكتمل ؟ الميتا – رياضيات هو التعاطي مع مجمل هذه الأسئلة .

نظريات التجسد العقلي Embodied mind theories

تدعي مثالية أفلاطون أن الواقع ما هو إلا انعكاس للحقيقة في أسمى مراتبها المجردة . و تقول نظرية أفلاطون في التذكر إننا عرفنا الحقيقة الخفية قبل مولدنا و نتعرف عليها مجدداً حينما تقع أبصارنا عليها . نظرية أفلاطون حول الخطأ هي أن ميلادنا هو نوع من السقوط الإبستمولوجي- المعرفي- , سقوط من علٍ . حين نولد ننسى الجانب الأبهى من معرفتنا و الذي هو اتصال مباشر بالحقيقة .

و في نفس الاتجاه يقول ديكارت (الله لا يخدعنا أبداً) و إن الحقيقة بينة و إن الخطأ لا يفسره إلا قصورنا الشخصي لأننا حينها نكون غير محايدين . و هذا ما يعرف بالتفاؤلية الأبستمولوجية غير النقدية (3) . إلا إن نظرية التجسد العقلي تفيد بأن الرياضيات هي نتاج وسائل الإدراك البشري و من ثم يجب إن تفهم في هذا السياق ، لا مكان هنا لمثالية أفلاطون . تخلق الرياضيات و تنشأ في أدمغتنا و قد لا تكون هنالك كحقيقة موضوعيه في العالم . إن الرياضيات التي كنا نشد عليها بالنواجذ أصبحت أقل يقيناً مما كنا نتوقعه فما بالك بضروب المعرفة الأخرى! نعم لقد كنا على صلة بالحقيقة في عالم الذر (وَإِذْ أَخَذَ رَبُّكَ مِنْ بَنِي آدَمَ مِنْ ظُهُورِهِمْ ذُرِّيَّتَهُمْ وَأَشْهَدَهُمْ عَلَى أَنْفُسِهِمْ أَلَسْتُ بِرَبِّكُمْ قَالُوا بَلَى شَهِدْنَا أَنْ تَقُولُوا يَوْمَ الْقِيَامَةِ إِنَّا كُنَّا عَنْ هَذَا غَافِلِينَ) (الأعراف: 172) و عندما و لدنا في هذا الكون نسينا هذا المشهد و الله تعالى يذكرنا به ((وَلَقَدْ عَلِمْتُمُ النَّشْأَةَ الْأُولَى فَلَوْلَا تَذَكَّرُونَ)) (الواقعة:62) .

تفيد نظرية التجسد العقلي بأن التفكير الرياضي هو تطور طبيعي لوسائل الإدراك البشري و التي تجد نفسها في عالمنا الطبيعي . تفيد هذه النظريات : أن الرياضيات ليست كونية و لا توجد نتيجة لأي حس واقعي بل وجودها فقط في دماغ الإنسان . الإنسان يخترع و يشيد الرياضيات لا يكتشفها. و من هنا يمكن النظر إلى الكون الطبيعي باعتباره المبدأ الأساسي للرياضيات إذ يقود و يرشد نمو الدماغ بحيث يستطيع أن يحدد لاحقاً ما هي الأسئلة التي تستحق البحث والتحري.على أي حال العقل البشري ليس له إدعاء خاص بأن الواقعية مبنية على الرياضيات .إذا كان هناك بناء رياضي فإن صحته كخارطة للعقل البشري و الإدراك و ليست كخارطة لأي شيء تراه . إلا أن الفيلسوف كانط يؤكد أن القوانين الرياضية كما هي موجودة في بنية العقل هي أيضاً موجودة في بنية الطبيعة . و من ثم من السهولة توضيح قاعدة الرياضيات : الرياضيات تبني و

تشيد حتى تكون فاعله و مؤثره في الكون أو قل هي قوة الفكر التي تجبر الكون الطبيعي كيف يسلك أو هي الوسيلة التي يبتكرها العقل لكي يسيطر على الطبيعة و الكون أو هي بمثابة أوامر يطلقها العقل لكي يتمثلها و يعتنقها الكون لاحقاً !.

بنية الكشف الرياضي

كيف نصل إلى الكشف الرياضي ؟ و هل تلعب الخبرة أو التجربة دوراً في هذا الكشف أم أن الأمر برمته يتعلق بنشاط عقلي خالص ؟ و هل يعتمد الكشف الرياضي على الاستدلال المنطقي أم أنه معرفة عقلية مباشرة ؟ ترتبط الإجابة عن هذه التساؤلات بطبيعة الكينونات الرياضية المجردة . إذا كنا نسلم بوجود موضوعي و مستقل لتلك الكينونات فمن الطبيعي أن نستبعد إجابة النزعة التجريبية القائلة بأن القضايا الرياضية و كافة الأفكار المجردة ماهي إلا تعميمات تجريبية مصدرها الحس . من منطلق النزعة العقلانية فإن الكشف الرياضي و إن كان يخطو أولى خطواته بدهشة حسية و يستصحب نمطاً من الاستدلال العقلي و المنطقي , إلا أنه في النهاية قفزة حدسية مباشرة لا تكتسب بالتجربة أو بالجهد الواعي للعقل . عندما سئل نيوتن كيف توصل إلى استبصاراته الصائبة , أجاب (إنني لا أجعل المسألة تغيب عن عقلي أبداً) . يقول الرياضي الألماني جاوس الذي حاول لمدة عامين أن يبرهن على نظرية رياضية دون أن يوفق إلى ذلك : أخيراً نجحت منذ يومين , لم يكن ذلك بسبب جهودي المضنية التي بذلتها و لكن بفضل الله , و كومضة مفاجئة جلبت معها الحل . إن الكشف الرياضي ضرب من الإلهام . يصعب النفاذ إلى قفزة العقل الحاسمة . يتحدث عالم النفس يونج عن عالم " اللاشعور الجمعي " اللازمكاني الذي يمارس تأثيره في الحضارة من خلال تأثيره في النفس الفردية أو من خلال نفاذه فيها . و من ثم الفنان الكشفي – مثل العالم المبدع – لا يبتكر المادة المعرفية بقدر ما تسيطر هي عليه و تتغلغل فيه و تبدعه . حين تهيمن قوة الإبداع يتحكم اللاوعي في شكل رؤى كشفية يصل

بمقتضاها العالم إلى استنتاجات صحيحة و واضحة و قابلة للبرهان و قادرة على أن تصمد أمام النقد . دون أن يستطيع شرح الأسس التي تقوم عليها أو بيان مقدمتها . فليس آينشتين من أبدع النسبية بل النسبية هي من أبدع آينشتاين .
ثمة قناعة راسخة تؤكد أن الظواهر الطبيعية ما هي إلا انعكاس مادي يقوم وراءه بناء رياضي مجرد و كأن الكون المادي مصمم وفق بنية رياضية .
يتساءل الفيلسوف ديكارت : أنى للرياضيات – و التي هي وليدة التفكير العقلي البحت – أن تزودنا بمعرفة الكون الطبيعي ما لم تكن كامنة في جوهر خلق الكون . المبادئ الرياضية هي الأبجدية التي كتب بها الله تعالى هذا الكون . من الشيق جداً أن تعي أن الأفكار الرياضية التي ينتجها عقلك تتفق تماماً مع ما يجري في الطبيعة و كأنهما صنوان (العقل و الطبيعة) كما قال كانط .

<u>الرياضيات : الخلق و الإبداع</u>

الفكر الرياضي العقلاني فكر مبدع و خلاق بحيث ينشئ واقع مبتكر و ما التجربة إلا ثمرة هذا العمل و الجهد و الفكر الرياضي الخلاق المنشئ للواقع المبتكر . و من ثم فالتجربة معيار موضوعي منشأ بدوره بعملية رياضية , لأنها اختبار لواقع مبتكر و ليس واقعاً معطى كنتيجة ساذجة للحس الفطري . إذاً فالتجربة معيار موضوعي نشأت استجابة للفكر الرياضي الذي أبدعها فهي ليست مستقلة تماماً عن الفكر النظري و لا عن المشاهد بل أداة داخل التصميم الفكري العقلاني الرياضي . و هنا يتجلى صراحة التشابك بين الذاتي و الموضوعي و التفاعل بين العقل و المادة و التداخل بين الروح و الجسد .

<u>المدارس الرياضية : (المنطقية-الشكلانية-الحدسية)</u>

المتناقضات قادت إلى (أزمة في الأسس) لقد بدأ واضحاً أن التركيب الداخلي للرياضيات واهي أو على الأقل قائم على أسس ضعيفة . في مستهل القرن

العشرون إنقسم المشخصون لأمراض الرياضيات إلى عدة معسكرات متناحرة.

المدارس الأساسية الفكرية الثلاثة المتعلقة بأصل و طبيعة الرياضيات هي :

- المنطقية و من روادها برتراند راسل .
- الشكلانية و من روادها ديفيد هيلبرت .
- الحدسية و من روادها بروفر .

و اصبح لكل مذهب اتباعه و أنصاره و كأن الرياضيات أصبحت ضرب من التعصب الديني بدلاً من أن تكون علم رائع قائم على الوفاق و المودة الحب .

المدرسة المنطقية Logicism

ما يميز المدرسة المنطقية هو إلحاحها على أن المنطق و الرياضيات ملتصقان بعضيهما البعض , باعتبار أن المنطق هو المقدمة و الرياضيات هي المؤخرة لنفس الموضوع بحيث لا ينفصم عراهما . و أن الرياضيات اشتقت و استنبطت من المنطق و تفرعت عنه . تؤكد المدرسة المنطقية على أن المنطق هو الأساس الفعلي للرياضيات و أن كل المقولات أو العبارات الرياضية بالضرورة صادقة – صائبة- منطقياً مثل المقولة (إذا كان سقراط إنسان وكل إنسان فان فإن سقراط فان) هي بالضرورة صائبة منطقياً . يتقبل معظم الرياضيون و الفلاسفة المقولة: (الرياضيات لغة) إلا أنها ليست لغة بالمعنى الحرفي للغة . فالرياضيات لغة منطقية و امتداد لغوي مبسط للقراءة و الكتابة يستخدم نحو و مفردات بشكل مختصر دقيق مفيد في وصف و اكتشاف الطبيعة .

الرياضي الإيطالي بيانو (1825-1932) Peano

كانت أولى محاولات بيانو في استنتاج الحقيقة الرياضية من المنطق البحث خلال مقال من 29 صفحة عام 1889 كتب معظمه بالرموز فيما سماه بالمنطق الرياضي حيث أبتكر العديد من الرموز المنطقية مثل ($\in$ ينتمي) و(U الإتحاد) و ($\cap$التقاطع) و($\subset$ يحتوى) لقد كان هدف بيانو أن يحول الرياضيات – كما يراها- كلية إلى تصميم لغوي من العلامات و الرموز , و من ثم يجعل قواعد

المنطق و سيلة للبرهان و الإيضاح . قام بيانو و فريقه بصياغة التعاريف و النظريات و البراهين الرياضية في خمسة مجلدات حتى عام 1908 تحت مسمى formulairede mathematique . [3]15

<u>مفارقات راسل المنطقية</u>

برتراند راسل رياضي و فيلسوف بريطاني توصل إلى العديد من المتناقضات المنطقية منها على سبيل المثال فئة كل الفئات التي ليست عنصر من نفسها يحق هل هذه الفئة عنصر من نفسها أم لا ؟ الجواب : إذا كانت عنصر من نفسها فلا ينبغي لها و إذا لم تكن عنصر من نفسها فهي عنصر من نفسها , تناقض . و هذه المتناقضة شبيهة بالمتناقضة المنطقية القائلة : حلاق في مدينة صغيرة نائية يحلق لكل الرجال الذين لا يحلقون لأنفسهم , السؤال : هل يحلق هذا الحلاق لنفسه ؟ الجواب: يحلق لنفسه إذا كان لا يحلق لنفسه , تناقض . و هذه المتناقضة عرفها الإغريق قديماً باسم <u>مفارقة الكذب :</u> (هذه العبارة خاطئة) , إذا قلت إن هذه العبارة خاطئة يعني إنها ليست خطأ مما يعني إنها صائبة لكن إذا قلت صائبة فهي خاطئة , تناقض . ليس هناك حقيقة منطقية . المنطق قاد إلى متناقضات . يقول الفيلسوف الرياضي راسل بدأت دراستي – في الحادية عشر- هندسة إقليدس و أحسست بشيء من خيبة الرجاء حين وجدته يبدأ هندسته ببديهيات لابد من التسليم بها بدون برهان ، فلما تناسيت هذا الشعور وجدت في دراسته نشوة كبرى لما لمسته من قوة - في الرياضيات - في استدلال النتائج من مقدماتها والاطمئنا ن إزاء ما في الرياضيات من يقين . لكن كان أهم من ذلك كله إني آمنت بأن الطبيعة تعمل وفق قوانين الرياضيات و لازلت صبيا . ثم في الخامسة عشرة من عمري انتهيت إلى نظرية شديدة الشبه بنظرية الديكارتيين : إن حركة الأجسام الحية إنما تنظمها قوانين الديناميكا تنظيماً تاماً و إذاً فحرية إلا رادة وهم الواهمين . يضيف راسل : لم أستطع قبول رأى الفيلسوف (مل) في كتابه في المنطق بأن قضايا الرياضيات تعميمات من التجربة و إن كنت لم أعرف ماذا يمكن لقضايا

الرياضيات أن تكون إذا لم يكن مصدرها التجربة . و يقول راسل : خذ الرياضيات , فلماذا لا تكون صادقة في ذاتها صدقاً كاملاً دون أن نلجأ إلى حسبانها مجرد مرحلة فكرية تؤدي إلى ما بعدها ولا يكمل صدقها إلا بغيرها من المراحل ؟ لقد كانت تقلقني الأسس التي تقوم عليها الرياضيات و لم أجد ما يرضيني عند كانط أو عند التجريبيين فلم أطمئن لقول (كانط) عن القضية الرياضية أنها (قبلية تركيبية) و لا رضيت بما قاله التجريبيون من أن علم الحساب مؤلف من تعميمات جاءتنا بها التجربة.

المناطقة الرياضيين المحدثين يحاولون إرجاع الرياضيات إلى منطق , أي إنهم يريدون تحليل المدركات الرياضية إلى مدركات منطقية . و برأيهم أن الرياضيات استمرار للمنطق هو إمكان تحويلها إلى بناء منطقي خالص كأي جزء آخر من أجزاء المنطق الخالص وذلك عن طريق استغناءنا عن المصطلحات الرياضية وحلها إلى مدركات منطقية .

لقد أقام عالم الرياضيات كانتور برهاناً بأن الأعداد الطبيعة لا تنتهي عند عدد يكون بمثابة (العدد الأكبر) الذي ليس بعده عدد أكبر منه , فطبقت- الحديث لراسل- هذا البرهان نفسه على أي مدرك كلي فانتهيت إلى تناقض قائم في المدرك الكلي حين لا يكون هو نفسه أحد الأفراد الجزئية المنطوية تحت معناه وسرعان ما تبين لي أن هذا التناقض إن هو إلا واحد من مجموعة متناقضات ليس لها نهاية . لقد كنت أول أمري من أتباع المذهب الواقعي التي تذهب إلى أن الكلمة الكلية لها مسمى قائم بذاته إلى جانب العناصر الجزئية التي تنطوي تحت ذلك الكلي فظننت مثلاً أن الأعداد الطبيعية 1،2،3 أشياء موجودة وجوداً قائماً بذاته و الفرق بين وجودها و وجود سائر الأشياء إن وجود الأعداد غير مشروط بزمان فلا يكون لها حاضر و ماضٍ و مستقبل بل هي ثابتة الحقائق لا يتعاورها تغير الزمن ، فلما هدانا التحليل إلى رد الأعداد إلى عناصر من فئـات ، لم تعد

الأعداد كائنات موجودة وجوداً مستقلاً كما حسبتها أول الأمر بل أصبح الموجود هو فئـات من أشياء أي أن الموجود فعلاً هو المعدود لا العدد نفسه [2] (4)

ماهية العدد ؟ :

ألطريق الذي سلكه كانتور و بيانو هو محاوله تعريف العدد بالتجريد كالعدد(3) مثلاً فنتناول بالبحث ثلاثة رجال و ثلاثة طيور... ثم نجرد هذه المجموعات الثلاثية من الصفات الخاصة المميزة لكل منها صفة بعد صفة حتى لا يتبقى لديك بعد عمليات التجريد إلا صفة هي التي نسميها بالعدد (3) إذن طريقة التجريد تعرف العدد بالمفهوم . الطريق الذي سلكه راسل هو التشابه بين الفئـات المتشابهة تحدده علاقة واحد لواحد بينهم فمثلاً ثلاثة رجال و ثلاثة طيور... و تصّور أنّك قد ضممت كل الثلاثيات في حزمة , هذه الحزمة من الثلاثيات هي معنى العدد (3) . أي تعريف العدد بأنه فئـة من فئـات متشابهة. تعريف راسل للعدد على هذا النحو هو في الحقيقة بمثابة تعريف الاسم بالإشارة إلى مسماه .

العدد اللانهائي : يعد المشكلة الرئيسية في فلسفة الرياضيات . الفئـة المنتهية هي التي عدد عناصر أي فئـة جزئية منها أقل من عدد عناصرها في حين أن الفئـة اللانهائيـة يتطابق عدد عناصرها مع عدد عناصر أي مجموعة جزئية منها . أي يتطابق عدد عناصر الجزء مع الكل كما أن الأعداد اللانهائية لا تخضع ـ كما تخضع الأعداد المنتهية – لما يعرف بالاستقراء الرياضي (لكل عدد تالي يتكون بإضافة الواحد إليه في حين العدد اللانهائي لا يتغير بإضافة الواحد إليه) .

المدرسة الشكلانية Formalism [7]

من أبرز روادها ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862-1943) . اهتمام هيلبرت بأسس الرياضيات يؤرخ له في عام 1890 في محاولته لإعادة صياغة الهندسة الإقليديه وفقاً لقواعد بيانو دون الاستعانة بالرموز المنطقية لبيانو . كما تحاشى- هيلبرت - مفهوم الحدسية مما قاده إلى معالجة الهندسة الأولية بمسلمات صارمة و كان السؤال الملح لهيلبرت مسألة اتساق منظومته البديهي ة . لقد كان

يعتقد أن الوجود الرياضي لا شيء سوى الاتساق consistency . و من ثم إذا تحقق اتساق أي منظومة بديهي يصبح استخدامها شرعي و مبرر. أقترح هيلبرت برنامج جرئ يقتضي :

أولاً أن مجمل الرياضيات الموجودة بما فيها المنطق يجب أن تقوم على أساس منظومة بديهية axiomatic system .

ثانياً هذه المنظومة البديهية يبرهن اتساقها بطريقة بسيطة و محدودة .

هذه المقاربة في الأسس أصبحت تعرف باسم الشكلانية Formalism . لقد حاول الشكلانيون رد الرياضيات لا إلى المنطق أو الحدس و لكن إلى نسق المنظومة البديهية الذي يعبر عن قضايا شكلية (صورية) خالصة . هذه القضايا تستمد صحتها لا من كونها صورية كما في المنطق , و لكن من كونها فارغة تماماً من المعنى . فما نبدأ به من حدود و مسلمات أولية ما هي إلا رموز نصطنعها اصطناعاً , نهدف من ورائها إلى إنشاء كيانات رياضية لا شأن لها بما يوجد في الواقع . و على هذا فهي أسبق من قضايا المنطق الصوري التي تُرد بدورها إلى حدود و مسلمات المنظومة البديهية .

قبل هيلبرت مسألة اتساق المنظومة البديهية كانت ترحل من فرع إلى آخر في الرياضيات ليس إلا .ع لى سبيل المثال في أطروحته (أسس الهندسة) بنى هيلبرت اتساق الهندسة نسبياً على فرض اتساق علم الحساب arithmetic . لكن الشك حول اتساق علم الحساب ألقى بظلاله على مجمل مشروع هيلبرت .

النظرية الشكلانية Formal Theory [16][3]

النظرية الشكلانية هي منظومة نظرية بديهية كاملة الرموز تحتوي صراحة النظام المنطقي . تبدأ النظرية الشكلانية بذخيرة من الرموز و القواعد التي تحكمها . تتكون القواعد من فئـة من الصيغ الابتدائية لها دلالات تحدد كيفية إضافة و تركيب صيغ مؤكدة أخرى . البرهان في هذه النظرية لا يزيد عن متوالية منتهية من الصيغ أيٍ منها إما بديهية أو حصلت نتيجة للصيغ السابقة .

عبر تسلسل استخدام القواعد آخر صيغة هي ، بالتعريف ، نظرية . و بحيث لا تؤدي أي خطوة في البرهان إلى تناقض . في نظريه هيلبرت الشكلانية البراهين نفسها تشكل موضوع العلم الرياضي و تسمى نظرية البرهان (أو ميتا - رياضيات meta-mathematics) ليصبح التحري و التحقق من طبيعة البراهين الرياضية فرع من فروع الرياضيات . البديهيات , المسلمات و النظريات الممكن إثباتها التي نجمت عن اللعبة الشكلانية هي صور للأفكار التي تشكل مادة موضوع الرياضيات العادية و يقول هيلبرت : (نظريتي في البرهان هي لا شيء سوى أنها وصف للأسلوب العميق لفهمنا و بروتوكول من القواعد يعمل تفكيرنا وفقاً لها) . كان هدف هيلبرت في مدرسته الشكلانية تأسيس نظرية بديهية كنظام متسق و مكتمل من المسلمات يبرهن اتساقها المطلق انطلاقا و اعتماداً على أبسط الأنظمة مثل فئـة الأعداد الطبيعية باعتبارها تشكل نظاماً غير مثير للجدل فلسفياً , أي نظام متسق لتصبح قاعدة و أساس و منطلق لكافة الرياضيات . إلا أن هذا التوجه تعرض لخضه عنيفة بل و مميتة فانهار عندما برهن جوديل عام 1930 نظريته حول عدم الاكتمال .

تعتقد الشكلانية أن المقولات الرياضية يمكن اعتبارها مقولات ناتجة عن سلسلة من قواعد المعالجة البارعة . وفقا ًلبعض الشكلانيين فإن موضوع مادة الرياضيات حرفياً هو : (الرموز الرياضية بعينها) .و بالتالي كل الألعاب هي جيدة بالتساوي و للشخص فقط إن يلعب لا أن يبرهن الأشياء حولها . للأسف هذا الطرح لا يجيب على الأسئلة المعرفية حول ماهية الرموز؟هل توجد الرموز بشكل سرمدي في مملكة لا تتغير؟ ما هي فائدة الرياضيات؟ . بل و تجعل الشكلانية من الرياضيات نشاط مزيف و شكل أجوف . الفريق الآخر من الشكلانيين عادةً ما يعرف بالاستدلالية و فيها مثلاً أن نظرية فيثاغورث ليست صحيحة بإطلاق و لكن صحتها نسبية . و أن المقولات تحددت بالمسلمات و أن قواعد الاستدلال تحتفظ بصحتها . و عليه عليك أن تقبل بالنظرية أو أن التمثيل

الذي أعطيته لها يجب أن يكون مقولة صحيحة . نفس الشيء يقال في كافة المقولات الرياضية . العديد من الشكلانيين يقولون من الناحية العلمية , فإن منظومة المسلمات التي يجب دراستها يجب إن تقترح وفقاً لاحتياجات العلم أو فروع الرياضيات الأخرى . الشكلانيون الحداثيون (مثل رودلف كارناب) تناولوا الرياضيات كعملية تحري للنظام الشكلاني . الشكلانيون عادةً منجذبين و متسامحين نحو المقاربات الجديدة للمنطق مثل نظريات الفئات الحديثة . الانتقاد الأساسي الموجه ضد الشكلانيين أنهم أهملوا الأفكار الفعلية للرياضيات التي تستحوذ على اهتمام الرياضيين مقابل اهتمامهم بالتفاصيل الدقيقة لسلسلة براعة اللعبة و حسب . كما و أنهم التزموا الصمت حيال السؤال : أي أنظمة من المسلمات تلك التي يجب أن ندرسها ؟.

المدرسة الحدسية Intuitionism

الحدس هو تلك الرؤية الكلية المباشرة للمعاني العقلية المجردة و القدرة على إدراك الماهيات . و بهذا المعنى يمثل الحدس ضرباً من المعرفة الميتافيزيقية المجاوزة لإدراك الحواس و النشاط الواعي للعقل . يضيف عالم النفس السويسري يونج (1875-1961) : " إن الحدس كالإحساس يُدرك لاشعورياً و بطريقة غير نقدية و الحدس يدرك المواقف ككل على حساب التفصيلات " , أي أنه عملية تركيبية و ليس تحليلية . هل البني الرياضية المجردة أفكار من صنع العقل أم أنها كائنات مستقلة يكتشفها العقل فحسب ؟ يظل سؤال قائم .

[3], لقد كان الفيلسوف كانط أول المبشرين بالحدسية إضافة إلى كرونيكر و بوينكار و هم في جملتهم يعنون بالحدس لا البداهة الديكارتية , و إنما تلك التجربة الذهنية و هي التجربة التي تقابلها التجربة المعملية في العلوم الطبيعية . يضيف كانط : الرياضيات مؤسسة على الثقة و المصداقية ، تُضرب الرياضيات كمثل رائع في عدم الاعتماد على الخبرة . و أن نتقدم في المعرفة القبلية و تحتوي الرياضيات نفسها على مواضيع و معرفة فقط حدسية ، و الحدس كتفكير

هو قبلي و يصعب التمييز فيما بينه و بين المفهوم المجرد . كل القضايا الرياضية دون استثناء قضايا مركبة Synthetics . كل القضايا الرياضية هي دائماً قبلية و ليست تجريبية لأنها تحمل في طياتها الضرورة و التي لا يمكن استخلاصها من التجربة . العمليات الرياضية كالجمع 7 + 5 هي دائماً قضايا مركبة . القضية الهندسية القائلة : (الخط المستقيم أقصر مسافة بين نقطتين) هي قضية مركبة لأن مفهوم الاستقامة لا يحتوي شيء حول الكمية فقط حول الكيفية .
مفهوم القصر مفهوم إضافي و لا يمكن أن يستخلص من أي معالجة تحليلية انطلاقا من مفهوم الخط المستقيم و من ثم لا بد من استدعاء الحدس لجعل عملية التخليق و التركيب ممكنة . الكل يساوي نفسه $a = a$ و الكل أكبر من أجزاءه $a + b > a$ هذه القضايا تتحقق كمفهوم مجرد و يسمح بها رياضياً لأنه يمكن استعراضها بالبديهية . إن الرياضيات لها مادة معينة و من ثم فهي صورية بحيث تشتق من قضايا المنطق الصوري , و لكنك تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس الرياضي و هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضي و تأسيس الرياضيات كعلم أصيل مستقل عن كافة العلوم الأخرى .

المدرسة الحدسية الجديدة تشكلت حديثاً كفلسفة رياضية بواسطة مدرسة أمستردام (الهولندي براوور 1881-1966 و مواطنه هايتنج 1898-... و الألماني فايل 1885-1955) . لقد كان بروفر واعياً للخلل الذي يعتري الرياضيات التقليدية الكلاسيكية و لذا عمد بشجاعة إلى أن يضع الأمور في نصابها الصحيح . وجه بروفر عام 1907 نقد مباشر إلى كلٍ من نظرية الأعداد الانتقالية (لكانتور)و منطقية (راسل) و أيضاً لطريقة هيلبرت الشكلية في أطروحته (في أسس الرياضيات) . كتب براوور عام 1912 م مسودة بعنوان (الحدسية و الشكلانية) أختزل فيها الرياضيات مبدئياً إلى حدسية الأعداد الطبيعية . واحد من أهم ما أفرزته الحدسية تحديها لفرضية المدرسة المنطقية : (أسبقية

المنطق على الرياضيات) و (أن الرمزية المنطقية هي متطلب أساسي للرياضيات) . يحاج بروفر في أطروحته بأن الرياضيات هي تركيب ذهني و إبداع عقلي حر لا تعتمد البتة على اللغة أو المنطق . نعم تظل اللغة الرياضية عادية كانت أو رمزية لا يمكن تحاشيها كوسيلة للتخاطب والتواصل بين الرياضيين و آلية لحفظ و تدوين إسهامهم و إن كانت - اللغة - غير كافية للتعبير عن الأفكار الرياضية بكفاءة مطلقة . الرمزية المنطقية لا تمثل مستقبل جوهري للتفكير الرياضي و لن تخلق بذاتها رياضيات جديدة . اللغة الرمزية قد تعكس الحقيقة الرياضية و تعبر عنها لكن لا تحتويها . يضيف بروفر : تنشأ المتناقضات نتيجة لعجز اللغة المصاحبة للرياضيات في أن تصبح كلغة من الكلمات الرياضية و تكون قاصرة عن التعبير عن المفهوم الحدسي الرياضي بطلاقة وكفاءةً و يوبخ بروفر الشكلانيين بأنهم اختزلوا الرياضيات إلى (لعبة بين العلاقات و الصيغ) لعبة جوفاء لا معنى لها . بروفر مثل كانط يرى أن الحقيقة الرياضية هي حدسية بطبيعتها . الأعداد الطبيعية مقبولة ليس لأنها على قاعدة من النظام البديهي كمنظومة بيانو البديهية لكن الأعداد الطبيعية مقبولة لأنها نشأت وفق فطرة أولية على مر الزمن و من ثم تركبت المواضيع الرياضية اعتمادا على هذه الأعداد الطبيعية بطرق محددة و واضحة ذات طابع حدسي . يقول كرونيكر و هو أحد أعضاء المدرسة الحدسية (الله خلق الأعداد الطبيعية و ما عدا ذلك قام به الإنسان) يضيف بوينكار: (الاستقراء الرياضي هو حدس بحت من الفكر الرياضي و ليس مسلمة أو بديهية فحسب قد تكون مفيدة في بعض الأنظمة) . و هو ما وافقه عليه بروفر , إلا أنه عارض بوينكار في أن الوجود الرياضي ينطبق مع أي إثبات من عدم التناقض . يعتبر بروفر أن تطبيق المنطق الكلاسيكي على الرياضيات هي ظاهرة رافقت التطور الحضاري ليس إلا تماماً كما كان يعتقد بنسبية التقدير الدائري π . و أن المنطق التقليدي بزغ مصاحباً لرياضيات الفئات المنتهية و الفئات الجزئية منها ، و تناسى الناس ذلك الأصل

المحدود و اعتقدوا ـ هفوةً ـ أن المنطق يشكل أساس أسبق مستقل عن الرياضيات وأخيراً و بلا إنصاف ـ و بالنظر إلى طبيعته الأسبقية ـ تم تطبيقه على رياضيات الفئـات اللانهائية و لا غرابة إذ أفضى إلى متناقضات .

الوظيفة الأولى للحدسية *تفيد الفصل الكامل للرياضيات عن لغة الرياضيات و بالتالي عن ظاهرة اللغة المتمثلة في المنطق النظري ، و تؤكد بأن الحدسية الرياضية في جوهرها نشاط عقلي لا لغوي* . و عليه فإن صرح التفكير الرياضي الذي شيدته الحدسية تلعب فيه اللغة دور مقدر لكن لا يرقى إلى درجة الإتقان . و ما اللغة إلا وسيلة نتذكر بواسطتها البنى الرياضة و وسيلة للتواصل فيما بين الرياضيين , و من ثم فإن اللغة الرياضية من تلقاء نفسها عاجزة عن خلق أو إبداع أنظمة رياضية جديدة . إن القضايا الرياضية هي إما صح أو خطأ علمناها أو جهلناها ، و حتى بعد انقراض البشرية تظل الحقيقة الرياضية – كقوانين الطبيعة ـ موجودة و ستستمر. على الرغم من نشأة الرياضيات كنشاط بنيوي داخلي مستقل إلا أنها تمتلك قابلية تطبيقها على العالم الخارجي في حين لا أصلها و لا طرقها تعتمد على هذا العالم الخارجي . النشاط الرياضي يكون ممكناً عن طريق توظيف الحدسية . كما و أن الحدسية تسمح بخلق كينونات رياضية جديدة عن طريق إجراء خطوات لانهائية من الكينونات الرياضية المعلومة سلفاً .

تعتبر الرياضيات من عدة وجوه أكثر العلوم إحكاماً و دقة و أعمقها فكراً و لا تزال الرياضيات جزءاً أساسياً من التأمل النظري الإنساني إذ أنه كان سلماً للفكر العقلاني في مسيرة ارتقاء الإنسان . إن تطور الفكر الرياضي هو نتاج الأفكار الفلسفية السائدة والمسيطرة أولاً المتعلقة بأصل اليقين الرياضي و ثانياً المتعلقة بحدود موضوع العلم الرياضي . و هناك خصائص ثابتة للزمان والمكان ، خصائص لا تعتمد على الخبرة أو اللغة. معرفة هذه الخصائص تسمى رياضيات. المنطق لا يعتمد على الزمن و الرياضيات تعتمد على المنطق ثم تحولت الرياضيات تدريجاً لتصبح علم الأعداد . الخصائص المنتظمة للزمان و المكان

المألوفة بالخبرة يفترض أنها لا تتغير وسميت مسلمات وصنفت في قالب لغوي . انطلاقا من لغة هذه المسلمات شيدت أنظمة من خواص أكثر تعقيداً وفق أسباب استدل عليها بالخبرة . لكن الخطوات اللغوية سلكت قواعد المنطق التقليدي .
سنسمي وجهة النظر التي تحكم هذا النمط من التفكير و العمل: وجهة نظر قائمة على المشاهدة . و هي وجهة نظر تتبني أن المنطق مستقل و حر والرياضيات تابع له . فيما يخص المكان فإن وجهة النظر آنفة الذكر أصبحت غير منيعة و ترنحت على مدى القرن التاسع عشر و بداية القرن العشرون تحت وطأة اكتشافات لوباشفلسكي و بوليا و ريمان و كلين و هيلبرت و آينشتاين و أن وراء الفضاءات المشاهدة هناك العديد من الفضاءات و التي قد تكون أحيانا فقط ذات طابع من التخمين المنطقي . فضاءات خصائصها تختلف عن تلك الفضاءات التقليدية المشاهدة . إلا أنها لا تقل عنها جمالاً , كما و أنها وجدت واقعيتها داخل علم الحساب . علم الهندسة الإقليدي ه من ثلاثة أبعاد استمر وجوده من جهة باعتباره علم الأعداد و من جهة أخرى كعلم لوصف الطبيعة . هذه العملية من تمديد أفق الهندسة أهم جزء فيها لعبه منهج المنطق اللغوي و الذي يوظف مفردات للتعبير عن قواعد المنطق و أحياناً بدون مرشد أو هادٍ من الخبرة أو من مسلمات تأطرت مستقلة عن الخبرة . أنصار هذه المدرسة الشكلية القديمة رفضوا كل العناصر الدخيلة على اللغة و بذا أفرغوا الرياضيات والمنطق من أي فروق بينهما سواء من حيث المميزات أو الاستقلالية . لقد كانت هذه المدرسة تتوق إلى الوصول إلى رياضيات تؤسس على هذه الرؤية و تسعى لأن يتوج جهدها ببرهان من عدم التناقض وهذا ما لم يتحقق بل على النقيض من ذلك تم التخلي عن هذا الأمل عندما توصل جوديل إلى نظرية عدم الاكتمال في الرياضيات .
مدرسة ما قبل الحدسية و من أبرز روادها و بوريل و ليبيج . هؤلاء المفكرون يبدو إنهم يدعمون وجهة النظر المشاهدة كمدخل للأعداد الطبيعية و قواعد الاستقراء الكامل و الكينونات الرياضية المتفرعة منهما دون تدخل بديهيات

الوجود بل و حتى بالنسبة للنظريات المستنتجة بدلالة المنطق الكلاسيكي ، فقد صاغوا الوجود existence و الإتقان exactness بلا اعتماد على المنطق أو اللغة و اعتقدوا بلا تناقض يقيني حتى من دون برهان منطقي [8] . في كل الأحوال وعلى طول مسار تطور الرياضيات استمروا في استخدام المنطق الكلاسيكي بدون ذخيرة أو احتياطي و بلا اعتماد على الخبرة . و هذا تم بلا اعتبار لحقيقة أن عدم تناقض الأنظمة التي شيدوها أصبح مشكوك فيه بعد اكتشاف ما هو متفق عليه من لا زمنية المنطق - الرياضيات . خلاصة القول إن مدرسة ما قبل الحدسية استندت على إحدى راحتيها على الفرق الجوهري المميز بين المنطق والرياضيات و على الراحة الأخرى على استقلالية و حرية المنطق و جزء من الرياضيات و ما تبقى من الرياضيات يعتمد على هاتين الاثنتين . في غضون ذلك و تحت وطأة النقد الموجه ضد المدرسة الشكلية القديمة ، أسس هيلبرت المدرسة الشكلانية الجديدة و التي صاغت الوجود و الإتقان مستقلين عن اللغة . لا للرياضيات الفعلية بل للميتا - رياضيات ، و هي دراسة علميه للرموز التي نشأت في لغة الرياضيات و القواعد المنظمة لهذه الرموز. و وفق هذه القاعدة فإن الشكلانية الجديدة ، المناهضة للشكلانية القديمة ، اعترفت باستخدام و تطبيق عملي لمفهوم حدسية الأعداد الطبيعة والاستقراء الكامل . الشكلانية الجديدة لم تمتنع إجرائيا عن الاعتراض بأنه ليس هناك ارتباط واضح يمكن أن يرى بين اكتمال لغة الرياضيات و اكتمال الرياضيات نفسها . و يمكن تلخيص الوضع الذي خلفته الشكلانية و ما قبل الحدسية كالآتي : فيما يخص نظرية الأعداد الطبيعية ، قاعدة الاستقراء الكامل و قدر معتبر من علم الحساب والجبر و الواقعية المطلقة و عدم التناقض هي معرفة كونية لا تعتمد على اللغة و لا على البرهان .

فلسفة كيرت جوديل Gödel

يقول جوديل : النقطة الحاسمة في تطور الرياضيات التطور الذي طرأ بحيث أصبح من المستحيل إنقاذ ذلك الوجه اليميني اليقيني للرياضيات و أن التطور نفسه في الرياضيات يعزى إلى النزعة اليسارية في الفلسفة و أن كل ما أثمرته المادية مبني على الإفراط في الاتجاه المعاكس للاتجاه الفلسفي - الخاطئ - نحو اليمين . لقد كان هناك اعتقاد بوجود خصائص للمكان و الزمان لا تتغير، خواص مستقلة عن الخبرة و اللغة . الحصول على مثل هذه المعرفة بالتحديد من هذه الخصائص هو ما نسميه رياضيات . التطور الحديث للأسس الرياضية على ضوء الفلسفة [6]

برأي جوديل كالآتي : سأحاول و من منطلق فلسفي أن أصب التطور في أبحاث أسس الرياضيات في نسق عام و لمعرفة هذا النسق سأصنف الرؤى الكونية الممكنة وفقاً لبعدها عن الميتافيزيقا (أوالدين) و من هذا المنطلق يتم التصنيف إلى فئتين :

1- الشك و المادية والوضعية جهة اليسار .

2- الروحانية و المثالية و الكهنوتية جهة اليمين و نرى أن الشك يبتعد عن الدين أكثر مما تبتعد عنه المادية ، في حين أن المثالية ، في أحد أشكالها كوحدة الوجود ، هي شكل واهي من الدين .

نجد في هذا النسق القبيلة apriorism من جهة اليمين في حين نجد أن التجريبية empiricism من جهة اليسار . التشاؤمية من جهة اليسار و التفاؤلية من جهة اليمين . اتجهت الفلسفة - حتى عصر النهضة - من اليمين نحو اليسار . في الفيزياء - بشكل خاص - بلغ التطور ذروته في التجريبية القائمة على الملاحظة و كان يعني حقيقة وأد العلم النظري . أقول إنه لمعجزة

أن هذا التطور لم ينسحب تماماً على الرياضيات . الرياضيات و بطبيعتها كعلم قبلي apriori و يقيني لها ميل نحو اليمين . حتى الرياضيات التجريبية لم تجد لها الدعم الكافي نتيجة لروح عصر النهضة التجريبي المتطرف . مؤكد أن الرياضيات نمت و تطورت إلى تجريد عالي بعيداً عن المادة و بقدر من الوضوح بعيداً عن الشك, مثلا بإيجاد أساس كامل للتفاضل و التكامل و الأعداد التخيلية. أخيراً و نتيجة للتناقض الذي ظهر مع نظرية الفئات ، التناقض الذي يدعى ظهوره في الرياضيات ، و الذي يبالغ في أهميته بالشك و التجريبية و الذي تم توظيفه كذريعة لدفع الرياضيات في اتجاه اليسار . إلا أن هذا الدفع نحو اليسار مبالغ فيه لأن هذه التناقضات لا تظهر في صميم الرياضيات بل تظهر فقط قرب تخوم الرياضيات الخارجية من جهة الفلسفة إضافة إلى أن التناقضات تبددت تماماً على نحو مُرضي(كما سنرى لاحق) . و نتيجة لتلك الحجج أضحى معظم الرياضيون يرفض اعتبار الرياضيات كنظام مطلق للحقيقة ، فقط النذر اليسير منها و ما تبقى لا يعدو نسق افتراضي . إذ تبنى النظرية على افتراضات أو مسلمات نفسها غير مبرهنة وغير مبررة لنصل منها إلى نتائج مبررة . لكن ما يهم الرياضيون - بعد حصولهم على النواتج التي استخلصوها من فرضياتهم - ما الذي يمكن حمله و الاستفادة منه . من هذا المنطلق تصبح الرياضيات علم تجريبي .

<u>عدم الاكتمال لجوديل</u> [6] Gödel's Incompleteness

في معرض حديثه عن نظام أساسي مكتمل من المسلمات بحيث تحصل على معيار رياضي كامل للحقيقة ، معيار موضوعي غير خاضع لفهم أو معنى ذاتي . أقترح هيلبرت فئـة مسلمات و لغة إنسانية ، هذا النظام الأساسي الذي يحتوى كل الفكر الرياضي الجميع يتفق حوله , و مكتمل بحيث يكون مقنع للجميع حتى يقبلوا به, بحيث يستقر الجميع حول الأسئلة الفلسفية : متى يكون البرهان صحيح ؟ ما

هي الحقيقة الرياضية ؟ . و يتفق الجميع حول ما إذا كان البرهان الرياضي صائب أم خاطئ لا ثالث لهما (قانون الثالث المرفوع Excluded Third) . في الحقيقة نحن جميعاً نتفق مع هيلبرت على هذا التفكير الموضوعي , بعبارة أخرى ما يصبو إليه هيلبرت : إذا كان البرهان الرياضي حقيقةً موضوعية ليس فيه عنصر ذاتي إما صائب أو خاطئ و من ثم نستطيع أن نشكل ونؤسس الرياضيات بحيث تكون هناك رواية واحدة للحقيقة الرياضية , لا نريد رياضيات ألمانية و أخرى فرنسية و ثالثة بريطانية . نريد فقط رياضيات كونية , نريد معيار كوني للحقيقة الرياضية . هذا ما سعى إليه هيلبرت لكن مع الأسف برهن كيرت جوديل عام 1931 - و هو في الخامسة و العشرين من عمره - في نظريته عدم الاكتمال أن هذا الهدف النبيل و الطموح لا يمكن أبداً أن يتحقق . نظرية جوديل في عدم الاكتمال – تكاد تكون شبيهة بقاعدة عدم اليقين أو اللاحتمية في نظرية ميكانيكا الكم الفيزيائية - ألحقت صدمة بأسس الرياضيات و قوضت مشروع هيلبرت الشكلاني الذي يهدف إلى إيجاد فئـة أساسيه منتهية من المسلمات المنطقية قادرة على أن تولد مجمل الرياضيات و أن اتساق الأنظمة المعقدة يمكن أن يرجع إلى ابسط الأنظمة كعلم الحساب باعتباره متسق . تفيد نظرية جوديل أن الرياضيات تحتوى على مقولات لا يمكن برهنة صحتها من خطأها , مثلاً فرضية الاستمرارية و هي المقولة القائلة بعدم وجود فئة سعتها أكبر من سعة الأعداد الطبيعية و أقل من سعة الأعداد الحقيقية .

تنص نظرية جوديل (في النظام الأساسي formal system S مثل علم الحساب الأساسي arithmetic توجد عبارة P من اللغة الأساسية التي شكلت S بحيث إذا كانت S متسقة فلا يمكن برهنة P و لا برهنة نفي P في إطار النظام) .

ما كان يلمح إليه جوديل هو أن العقل و الفكر البشري هو فوق الماكينات بحيث يستطيع أن يتعرف على صحة قضايا لا يمكن لبرنامج ما كيني أو حاسوب مؤسس على بديهيات و قواعد يمكن أن يبرهن صحتها .

لنأخذ مثلاً الهندسة المطلقة (هندسة إقليدس بدون مسلمة التوازي) حسب قول هيلبرت لا تواجه أي مشكله حتى يبدأ أحدهم في التساؤل : كم من الخطوط المتوازية يمكن رسمه من نقطة خارجية ، موازياً للخط المستقيم ؟ . النظام الهندسي نفسه لا يمتلك الإجابة وفق فئـة بديهيات الهندسة الأقليدية . أي إجابة لا تستطيع أن تثبت صوابها من خطأها. ماذا تفعل ؟ تضطر أن تضيف مرغما بديهيات جديدة و من ثم تتفرع الهندسة إلى هندسة أقليدية و هندسة لا أقليدية . و يا ليت الأمر ينتهي عند هذا الحد , كلما أضفت بديهيات أو مسلمات للإجابة على سؤال جديد واجهك سؤال جديد آخر أو قضية جديدة لا يمكن لنظامك الإجابة عليه إلا بإضافة مسلمة جديدة و هلم جراً في رحلة لانهائية لتعزيز و تحسين المنظومة.
قد تكون البداية في منتهى البساطة ثم ينتج عنها ما هو معقد و لانهائي , خذ مثلاً علم الحساب arithmetic إذ يتأسس من فئـة من عشرة مسلمات تصف الأشياء (العددان الطبيعيان 0 و1) إضافة إلى قواعد العمليات (الجمع أو قاعدة لتوليد عناصر جديدة مثل 2 و3 و4 ...) ليس هذا فحسب بل يمكن لهذا النظام البسيط أن ينمو إلى مالا نهاية و يولد قواعد جديدة و أيضاً عناصر جديدة مثل الأعداد النسبية و الحقيقة والتخيلية و أعداد انتقالية لانهائية في رحلة لا تستنفذ ذاتها و لا تنتهي . و هذا يوضح بأن برهنة اتساق و اكتمال نظام الأعداد الطبيعية مستحيل باستخدام طرق منتهية . علم الحساب نظام رياضي غير مكتمل , للأسف . بعبارة أخرى ضمن أية بنية رياضية هناك قضايا لا يمكن البرهان على صحتها أو خطئها . و إذا أضفنا هذه القضايا كمسلمات جديدة , فإن قضايا أخرى غير قابلة للبت ستستجد ضمن هذه البنية و هلم جراً . لقد برهن جوديل أن أننا في أي بنية رياضية لن ندرك أبداً كل ما يمكن إدراكه , أي أن الرياضيات معين لا ينضب و فكر متجدد لا يجمد و لا ينغلق .

<u>نظرية عدم الاكتمال الأولي لجوديل</u>

في الرياضيات أي نظام أساسي يقال إنه متسق إذا كان من غير الممكن إثبات أن نظرياته المبرهنة يمكن أيضاً عدم إثباتها في إطار النظام , أو بعبارة أخرى النظام الرياضي الأساسي يقال إنه غير مكتمل إذا كان لا يمكن إثبات صحة العبارة أو إثبات خطئها ضمن النظام .

النظرية الثانية لجوديل [6]

لا يمكن استخدام اتساق النظام لبرهنة اتساقه نفسه . بعبارة أخرى علم الحساب الأساسي (... , 2 , 1 , 0 , x , +) لا يمكن استخدامه لإثبات اتساقه نفسه . و بالتالي لا يمكن استخدامه لبرهنة اتساق الأنظمة الأكثر تعقيداً كما أدعى هيلبرت . أو بعبارة ثالثة إذا كان يمكن برهنة أن نظام المسلمات متسق بنفسه فإنه غير متسق .

جوديل والمفارقات

جوديل يعتبر المفارقات (المتناقضات Paradoxes) هي ذات طبيعة رياضية مخادعة و مضللة فهي في الوقت الذي تبدو فيه كمفارقات في الرياضيات هي في حقيقة الأمر مفارقات في المنطق و المعرفة , وأوضح جوديل إن كينونات الرياضيات الكلاسيكية من إعداد صحيحة و فئات الأعداد الصحيحة ...الخ تعمل بكفاءة و لا تتورط في أي متناقضات أو مفارقات في حين أن متناقضات Zeno زينو و كانتور Cantor و راسل Russell تحوى كينونات ليس من صميم الرياضيات الكلاسيكية . عبر تحليله لمتناقضات كانتور و راسل يرجع جوديل المتناقضات في المنطق logical paradoxes إلى التناقض الذاتي في الحدس المنطقي تتعلق بالصدق truth و المفهوم concept و الوجود being و الصف class ...الخ . و التناقض الذاتي لأن افتراضاتنا للحس المشترك في المنطق انهارت . في الوقت الذي يرى فيه جوديل ضرورة وضع قيود لتفادي المتناقضات في المنطق و في نظرية الفئات حتى يكون لها معنى و قيمة ، فإن جوديل لا يرى ضرورة لوضع قيود على الرياضيات الكلاسيكية إذ إنها منضبطة

و لها معنى و واضحة و كافية لتفي بالغرض من أجلها . و يرى جوديل أن المتناقضات في المعرفة epistemology تقود بالضرورة إلى عبارات لا يمكن البت فيها undecidable .

واقعية جوديل Gödel's Realism

الرياضيون عادة ما ينفرون من التعرض أو مواجهة المفاهيم وراء الرموز الرياضية باعتبارها غير مهمة ، أو هل الكينونات الرياضية وجودها فقط وجود معرفي و ليس وجود أنطولوجي . وجود مراتب متعددة للكينونات الرياضية هي مثار جدل فلسفي إذ ترتبط بمسألة الكونيات . إذا تحدثنا عن إدراك الأشياء الرياضية فمن الصعب تخيل ما هي الظاهرة الرياضية و تفسيرها أسوةً بملاحظة الأجسام الفيزيائية و إدراكها عبر الحواس . جوديل يقارن بين سؤال الوجود الموضوعي للأشياء ذات الحدس الرياضي و السؤال حول الوجود الموضوعي للعالم الخارجي . لكن قد يجد المرء أن هذه المقارنة لا معنى لها إذ أن الرياضيات لا تفهم بالمعنى الكوني كما يُفهم العالم الفيزيائي فعلياً لأي شخص . إن الأشياء موجودة مستقلة عن تعريفنا أو تشييدنا لها . و يتركز السؤال عن الأشياء الفيزيائية حول إدراك البيانات عنها بالحواس . و من الصعب أن نصيغ أو نركب بشكل مماثل الكينونات الرياضية . إلا أن الكينونات الرياضية يمكن التعاطي معها عبر الآتي

1 - الفئة هي تجمع لعناصر و المفهوم هو العلاقة بين هذه الأشياء.
2 - النظريات حول نظرية الأعداد هي تعميم المشاهدات للعمليات الحسابية
3 - الجداول و الأشكال ذات قيمة في الجبر و الهندسة والهندسة تاريخياً هي علم قياس الأشياء الفيزيائية.

يختم جوديل قوله : الكينونات الرياضية موجودة بمعزل عن خلقنا وتشييدنا لها و بمعزل عن الخبرة والحدس . يرى جوديل أن بديهيات أو مسلمات المواضيع الرياضية هي بمثابة القوانين للمواضيع الفيزيائية و أن المواضيع الرياضية

حقيقية و مستقره و تعمل جيداً على أفضل حال تماماً كما المواضيع الفيزيائية و تحكمها و تحكم سلوكها المسلمات الرياضية. مفهوم جوديل للوجود الرياضي رهين بالوضوح ، فالموضوع الرياضي موجود بقدر ما هو واضح و مقبول . الفيلسوف ديكارت يتفق مع جوديل بأن الكينونات الرياضية ليست معتمدة على العقل بل مستقلة و يقول: (أجد في نفسي مالا نهاية من الأفكار لأشياء لا يمكن أن تكون محض عدم ، على الرغم من احتمال عدم وجودها خارج تفكيري , هذه الأشياء ليست من نسج خيالي أو وهم . بغض النظر عن مقدرتي أو عدم مقدرتي في التفكير فيها ، على النقيض ، لها حقيقتها الخاصة وطبيعتها الراسخة . على سبيل المثال عندما أتخيل مثلث حتى و لو لم يكن هناك وجود له خارج تفكيري إلا أنني لم أخترعه و لا يعتمد على عقلي في وجوده أو في خصائصه و أن مجموع زواياه يعادل زاويتان قائمتان و أن أضلاعه ثلاثة . هذه أشياء موضوعية مستقلة عن تشييدي العقلي لها ، لم أخترعها . و هنا يختلف ديكارت عن جوديل الذي يرى أن وجود المواضيع الرياضية يحاكي وجود المواضيع الفيزيائية. و يعتقد جوديل أن وجود المواضيع الرياضية دائم لأنه وجود لا يعتمد على الخبرة . إن واقعية جوديل هي واقعية علمية . و يظل السؤال الأنطولوجي حول حقيقة وجود الأشياء أو المواضيع الرياضية يطرح نفسه !

<u>لاحظ</u> نظريتا جوديل هما في المنطق ذو الرتبة الأولى first order logic و هو منطق رمزي يستخدم عبارات مثل (على الأقل x بحيث أن)أو (for any x)و لا تستخدم عبارات منطقيه ذات رتبة أعلى مثل (For every) أو (there exists) . تطبق نظريتا جوديل على أنظمة بديهية هي قوية بما فيه الكفاية و هذا يعني أن النظام يحتوى على عمليات حسابية كافية لما يحتاجه برهان نظرية عدم الاكتمال , فقد توجد أنظمة بديهية ضعيفة تكون مكتملة و متسقة مثل علم حساب المتعلق بعبارات من الرتبة الأولى و الذي يتضمن فقط عملية الجمع . جوديل يعتقد أن العقل البشري يمتلك مقدرة حدسية تمكنه من الوصول للحقيقة و إلى

النتائج النهائية تظل العمليات الحسابية و الخطوات الميكانيكية قاصرة عن بلوغها. و أن الذكاء البشري ليس ميكانيكي في الطبيعة كما يقول J.R Lucas في كتابه : (Minds,Machines and Gödel) . ما أكتشفه جوديل هو: إذا أردت أن تتعامل مع الحساب الأولي : عمليتي الجمع و الطرب و مع الأرقام + x , ...,3 , 2 , 1 , فإذا أخذت مثلاً فئـة مسلمات - مسلمات بيانو للحساب - ستكون غير مكتملة أو غير متسقة . إذا افترضنا أن المسلمات لا تسمح ببرهنة خطأ النظرية فإن النظام غير مكتمل أو حتى لا يمكن برهنة صحة النظرية انطلاقا من هذه المسلمات , و إذا كان النظام يحتوى الحقيقة فليس كل الحقيقة . برهان عدم الاكتمال لجوديل من الذكاء بحيث يبدو جنوني ، أنطلق جوديل من مفارقة الكذب(أنا خطأ) وهي لا خطأ و لا صواب . صاغ جوديل المقولة : إذا كوّنت المقولة(هذه العبارة غير قابلة للبرهان) في نظرية الأعداد الأولية في الحساب , فإذا كانت قابلة للبرهان فهذا خطأ و إذا قلت إنها غير قابلة للبرهان فهذا صواب ومن ثم فإن الرياضيات غير مكتملة !. واضح أن عدم الاكتمال في الرياضيات نتيجة محبطة و مدمرة . صحيح إن الحياة ليست قاصرة فقط على الرياضيات لكن إذا كانت الرؤية التقليدية للرياضيات غير صحيحة فلعمري ما الذي يبقى صحيح !.

<u>لاحظ</u> لا تعني نظرية عدم الاكتمال أن النظام الذي يحتوى على نظام غير مكتمل هو أيضاً غير مكتمل إذ , نجد أن الأعداد المركبة و الأعداد الحقيقة رغم احتواء كل منها على نظام الأعداد الطبيعية غير المكتمل فهي أنظمة رياضية مكتملة . أيضاً فئـة مسلمات نظام الأعداد الطبيعية غير المكتمل يصبح مكتمل داخل نظام فئــة بديهيات نظرية الفـــئات . *النظام غير المكتمل يعني إنك لم تكتشف كل المسلمات الضرورية. الأمثلة الآتية توضح مفهوم عدم الاكتمال :*

1) في الهندسة الأقليدية نجد مثلا أن الفرضية الخامسة فرضية التوازي هي مسلمة لا يمكن استنباطها كما لا يمكن نفيها أو إثباتها ضمن نظام الهندسة

الأقليدية إلا أن نظام الهندسة الأقليدية أقرب إلى الاكتمال إذا استبعدناها (أي , الهندسة المطلقة) . الهندسة الأقليدية متسقة نسبياً استناداً إلى اتساق الهندسة اللاإقليدية .

2) فرضية (مسلمة) الاستمرارية التي وضعها كانتور و القائلة :لا توجد فـئة سعتها أكبر من سعة الأعداد الصحيحة و أصغر من سعة الأعداد الحقيقية هي مقولة غير قابلة للبت . فهي عبارة لا يمكن برهنتها كما لا يمكن نفيها في إطار منظومة مسلمات نظرية الأعداد .

3) ديفيد هيلبرت - 1862-1943 - رياضي ألماني ولد في بروسيا و له إسهام كبير في التحليل الرياضي .أقترح هيلبرت أن اتساق الأنظمة الرياضية الأكثر تعقيداً مثل التحليل الحقيقي يمكن إثباته بدلالة الأنظمة البسيطة و بالتالي فإن اتساق كل الرياضيات رهين باتساق الحساب الأساسي لنظام الأعداد الطبيعية و الجمع و الضرب ....,0,1,2,x,+ . و هذا مانسفه جوديل في نظريته عدم الاكتمال .

4) ماكينة تيرننغ [6] Turning machine :

Alan Turning رياضي بريطاني (1912-1945) , قبل اكتشاف الكمبيوتر توصل تيرننغ إلى برنامج لغوي قادر على التعاطي مع أي عمليه حسابية يكونها الإنسان . و طرح تيرننغ السؤال الآتي : ما هي العملية المستحيلة بالنسبة لهذه الماكينة ؟ ما هي العملية الحسابية التي لن تحلها و بالتالي لن تتوقف ؟ لقد أوضح تيرننغ : لا توجد طريقة لكي تقرر في النهاية أن البرنامج أخيراً سيتوقف أم لا ! . ليس هناك أي نظام مسلمات أساسي يستطيع أن يقرر فيما إذا كان البرنامج - ماكينة تيرننغ - ستتوقف أم لا ! . بل سيقودك إلى مفارق مشابهة للجملة (هذه العبارة خاطئة) أي أن البرنامج سيتوقف فقط إذا كان لا يتوقف ! . إذن مسألة التوقف Halting problem هي مسألة قرار يصاغ بشكل أساسي كالآتي : (معطى وصف لخوارزمية مع مدخلاتها الأولية حدد ما إذا كانت الخوارزمية

تدور و تستمر للأبد بلا توقف ؟) . و قد برهن تيرننغ عام 1936 إستحاله وجود خوارزمية عامة لحل مسألة التوقف لكل المدخلات الممكنة . أي قرار أن الخوارزمية ستتوقف أم لا مسألة غير قابلة للبت undecidable . واضح أن تيرننغ أقتفى آثار جوديل و إن كان جوديل قام بالمهمة الأصعب و هو تصديه لمقولة هيلبرت بأن الأنظمة الرياضية المعقدة ترد إلى تلك الأبسط مثل نظام الأعداد الطبيعية لبرهنة اكتمالها و برهن جوديل أن نظام الأعداد الطبيعي غير مكتمل .

الباب العاشر

رؤية فلسفية للأعداد التخيلية

من حق الجميع أن ينزعج أو يقلق حول شرعية الأعداد التخيلية أو معناها . إذا كان المهتمون بأسس الرياضيات حذرون في التعاطي مع شرعية و منطقية و معنى المعادلة ((1+1=2)) و هذا ليس لأن هناك من مشككٍ أو مجادلٍ حول صحتها أو جدوى استخدامها ، بل إن التحري و التدقيق حولها هي من صميم عمل فلسفة الرياضيات و من حق المنطقيون أن يحذروا من أي صيغة رياضية حول متعلقها وأيضاً حول صحتها . و من يعتقد أن الرياضيات تعمل أو تستمر دون هذه المحاذير مخطئ . لأن مثل هذه النظرة الغبية و عديمة الفائدة و المعنى هي في الأول نظرة معادية للأسئلة الفلسفية إضافة إلى إنها تلغي الاستفسارات و التفسيرات حول أسس الرياضيات التي أثارها كانتور و فريج و جوديل و التي قادت إلى تطور الرياضيات نفسها على مدى القرن العشرين , و ما بزوغ نظرية الفئات إلا إحدى تداعيات تلك الأسئلة و الاستفسارات حول أسس الرياضيات .

إن واقعية الأعداد التخيلية تكمن في إنها وجدت كحل لمعادلات مثل $x^2 = -1$ و حلها $i = \sqrt{-1}$ فهي إذاً - الأعداد التخيلية – كينونات رياضية تتمتع بالوجود أسوةً بكافة الكينونات الرياضية الأخرى مثل الأعداد الطبيعية و الصحيحة و النسبية و الحقيقية و التي وجدت كحلول للمعادلات . إلا أن هذه القاعدة - الأعداد هي حلول معادلات - لا تخلو من إشكاليات فمثلاً المعادلة $5/x = y$ عندما $x = 0$ تعني أما y لانهائي أو غير معرف فالمعادلة $5/x = y$ عندما $x = 0$ أعطت y قيمة إما إنها لا طائل أو نفع من ورائها أو لا نكترث لها باعتبارها غير معرفة . و من ثم نسمح لأنفسنا بأن نشرَع أن القسمة على الصفر غير مسموح به جبرياً . و هذا ما نجده عملياً عندما نستخدم الآلة الحاسبة و تظهر على الشاشة عبارة Error في أي عملية المقسوم عليه صفر . و بالتالي فإن القاعدة القائلة بأن الأعداد وجودها تأتى فقط كحلول للمعادلات ليس إلا هي كمن يشتري العربة قبل

الحصان . نعم لا توجد معادلات في غنى عن الأعداد لكن توجد الأعداد بمعزل عن المعادلات كما هو الحال في نظرية الفئات إذ تؤسس الأعداد لفئات بذاتها .
يرى الشكلانيون Formalisms أن الرياضيات ليست إلا نظام رمزي و أن استخدامه والبراعة في التلاعب برموزه مستقل عن المعنى الذي قد يحمله أي رمز في النظام . لهولاء لا علينا أن ننزعج حول معنى الأعداد التخيلية لأننا أصلاً لا نهتم لمعنى أي رمز - و هذه النظرة الشكلانية عارضها تماماً الفيلسوف جوديل Gödel .
يرى أصحاب المدرسة التقليدية Conventionalism أن الرياضيات هي ذلك العمل الذي قمنا به و تأسست حوله أعراف و من ثم نقوم به ليحقق لنا النتائج التي نرجوها منه و بهذا المعنى فالرياضيات مبررة لأنها تعمل و تفيد .التقليدية كما الشكلانية كلاهما يفشل إذا كانت الحقيقة الرياضية لها معنى أو تعتمد على مرجع . النظام الشكلاني الحقيقي أوالنظام التقليدي مؤسس و مشيد فقط على قواعده الداخلية و لا يحتاج لأي شئ من خارجه . و وفقاً للشكلانية و التقليدية فإن الرياضيات – و من ضمنها الأعداد التخيلية - هي وسيلة براغماتية أي أداة نفعية فحسب .
يقول يُلر- 1770 - كل الصيغ $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-2}$........ هي إما مستحيلة أو تخيلية إذ أنها عبارة عن جذور لكميات سالبة و مثل هذه الأعداد حقيقة نعلن بأنها ليست لاشيء و لا أكبر من لاشيء و لا أقل من لاشيء و من ثم يتعين عليها أن تصبح تخيليه أو مستحيلة بل هناك من اقترح - بعد اكتشاف الأعداد التخيلية - بأن يصبح الرياضيون شعراء أو صوفيون إذ أن الأعداد وبالذات التخيلية لا تنتمي إلى العالم الواقعي . الأعداد التخيلية هي خدعة اصطنعتها الأعداد السالبة و التي هي نفسها - أي السالبة - لا وجود لها في كثير من الحالات العملية ، إلا أنها موجودة فالدين هو ثراء أو غنى سالب ، كما أن عملية الطرح يمكن الاستغناء

عنها واستبدالها بجمع أو إضافة أعداد سالبة في حين عملية ضرب الأعداد السالبة تخضع للقواعد الآتية :

1 - حاصل ضرب عددان موجبان هو عدد موجب .

2 - حاصل ضرب عددن سالبان هو عدد موجب .

3 - حاصل ضرب عدد سالب بآخر موجب هو عدد سالب .

4 - الصفر هو العدد الوحيد الذي ليس بسالب ولا موجب وحاصل ضرب الصفر بأي عدد موجب ، سالب أو صفر هو صفر.

و عليه فإن الصعوبة تكمن في أن مربع العدد سواء كان موجباً أو سالباً دائماً هو موجب مما يعني أن الجذر التربيعي لذلك العدد إما موجب أو سالب . فإذا ما كان ذلك العدد أصلاً سالب فلا عدد موجب أو سالب أو صفر عندما يضرب في نفسه سينتج عدد سالب . و عليه و وفق الاستقراء الكامل (الاستقراء يعني أن لكل عدد تاليه يتكون بإضافة الواحد إليه , في حين لا يتغير العدد اللانهائي بإضافة واحد إليه و هنا ينهار الاستقراء) الذي يستوعب كل الإمكانيات لا يوجد عدد حقيقي هو الجذر التربيعي لعدد سالب ! . (لاحظ : الاستقراء يتهشم و عديم الفائدة عند المالانهاية و من ثم لا يأخذ في اعتباره $\pm\infty$, كما سنرى لاحقا) .إلا أن الاستقراء لا يعطي إلا يقين ظني و ليس قطعي كما يقول الفيلسوف الإسلامي الإمام أبو حامد الغزالي فمثلاً القضية القائلة كل حيوان يحرك فكه الأسفل و التمساح حيوان و بالتالي التمساح يحرك فكه الأسفل . و هذا استقراء خاطئ لأن المستقرئ لم يخطر بباله أن هناك على الأقل حيوان واحد مثل التمساح يحرك فكه الأعلى . الاستقراء السابق القائل بأنه لا يوجد عدد موجب أو سالب أو حتى الصفر عندما يضرب في نفسه يعطي عدد سالب (أو سالب واحد بالتحديد) .

و يظل هذا الاستقراء قاصر إذ لم يمر على جميع الأعدا د- فمثلاً هل أختبر $(-\infty)$ سالب ما لانهاية؟ . سنبرهن- لاحقا - أن المتسلسلة $\sqrt{-1}=\frac{-1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}=-\infty$

عندما نضربها في نفسها تعطي 1- . قد يبدو لأول وهلة أن العدد $\sqrt{-1}$ لا وجود له و من منطلق حسي لا معنى له و مستحيل لكن إذا كنا قاصرين من أن نعي ماهية العدد التخيلي $\sqrt{-1}$ فهذا لا يعني أنه مستحيل بل نظل نحن قاصرين عن فهمه وإدراكه و بالتالي البرهان الذي سنقدمه للتعرف فلسفياً على ماهية $\sqrt{-1}$ يظل جديرا بالاهتمام و النقاش و هو أن $\sqrt{-1} = -\infty$ في غياب أي مخرج آخر . بغض النظر عن أن $\sqrt{-1}$ له معنى أو لا معنى له فإن هذا لا يهم . ما يهم الرياضي حقاً هو هل إضافة أي كينونة رياضية لا يتناقض مع أي شئ آخر داخل النظام الرياضي . فإذا كان $\sqrt{-1}$ لا يناقض وجوده أي شئ آخر في النظام الرياضي فلا غرو أن يعتمد رياضياً . إضافة إلى ذلك حتى لو سلمنا أن $\sqrt{-1}$ ليس له وجود فعلي - و قلنا هذا لا يهم رياضياً - فإن مربع $\sqrt{-1}$ وهو 1- له قيمة فعلية . إلا أن الرياضي حقيقة (لا يهتم بما يعنيه هذا الشيء) ليس دقيق تماماً و يختلف معه أصحاب المنطق الشكلانيون مثل ديفيد هيلبرت الذين يرون أن الرياضيات برمتها يمكن أن تحوَل إلى نظام شكلاني منطقي قد لا يكون فيه معنى لأي حد في حد ذاته لكن له معني ضمن إطار النظام الشكلاني المنطقي . حتى كيرت جوديل الذي برهن لأي نظام شكلاني استنتاجي في الرياضيات توجد عبارات لا يمكن برهنتها في إطار ذلك النظام لكن تظل هذه العبارات صحيحة ، و صحتها تنبع من معناها كما يضيف .

من الناحية الطبيعية فإن الأعداد أو الكميات التخيلية مستحيلة لأنها نتاج لسرعات أكبر من سرعة الضوء - في النظرية النسبية – و هذا مستحيل في الطبيعة المقيدة بسرعة الضوء، و لا يكون الانتقال أسرع من الضوء إلا للمكان space- like Separation و من ثم فإن ظهور الأعداد التخيلية مصاحب للمسارات المستحيلة في الطبيعة .

ملاحظة مهمة *: القطع الزائد الحقيقي هو قطع بيضاوي تخيلي و العكس صحيح .*

لدينا معادلة القطع الزائد الحقيقي

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

في نفس الوقت هي معادلة قطع بيضاوي تخيلي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(iy)^2}{b^2}=1$$

في حين أن معادلة القطع البيضاوي الحقيقي هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

هي معادله قطع زائد تخيلي

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(iy)^2}{b^2}=1$$

إذا لكل قطع ناقص - بيضاوي - حقيقي قطع زائد تخيلي مصاحب له . و لكل قطع زائد حقيقي قطع ناقص تخيلي مصاحب له . القطع الزائد الحقيقي ما هو إلا قطع ناقص محوره الثانوي تخيلي و أن المحور الأساسي للقطع الزائد مقاس في الاتجاه المحدب في حين أن المحور الأساسي للقطع الناقص على الاتجاه المقعر فيحق لنا النظر إلى القطع الزائد – الحقيقي - باعتباره قطع ناقص محوره الأساسي سالب . أخيراً العدد التخيلي موجود لأنه يتحول إلى عدد حقيقي عند تربيعه . في حين أن الشئ غير الموجود لا يوجد عبر أي عملية رياضية مثل الدائرة المربعة أو كما قال الفيلسوف بارميندس لا شئ ينتج فقط من لا شئ . تكمن المشكلة أنى لشئ مستحيل في لحظة ما يصبح ممكناً لاحقاً و هذه مسألة تحتاج إلى وقفة و تأمل ميتا فيزيقي عميق . أنى لشئ - كالأعداد التخيلية - غير موجود ومع ذلك فهو موجود! . بمعنى إذا لم يكن للشئ وجود موضوعي فله وجود ذاتي . كما أن الذاتي له تأثير في الحقيقة الموضوعية و ذلك يتجلى جلياً في مكانيك الكم حيث يلعب المشاهد دوراً غير محايد في أي تجربة كوانتم . و هذا

ليس بجديد على الفلسفة كما يقول الفيلسوف كانط : أي ظاهرة موضوعية لا تنفك عن كونها نتاج للتداخل بين الخارج و الداخل بين الذاتي و الموضوعي . و هذا المفهوم و التأثير يسمو بما هو ذاتي لما يقارب الموضوعي في الواقع و يضفي على الأشياء غير الموجودة - كالأعداد التخيلية - ضرب من الوجودية والحقيقة أكبر مما يبدو لك أنها ليست كذلك .أن عدم وجود الشئ لا يعني عدم تصور وجوده في الذات و من ثم يكتسب وجوده أهمية في مملكة الفلسفة . و يعتمد خروج هذا الوجود من المستوى الذاتي إلى المستوى الموضوعي- إلى عالم الواقع - على عدة أشياء على رأسها مبدأ عدم التناقض ، فمثلاً لا توجد دائرة مربعة لأن هذا يهدم مبدأ عدم التناقض ، هذا إذا كنا نعتقد بأن الواقع محدود مطلقاً بمبدأ عدم التناقض ، لكن إذا تخلصنا من عقدة عدم التناقض فلربما تكون هناك دائرة مربعة .على أي حال عدم التناقض ينهار على مستوى الإله حيث يجتمع فيه الصفة ونقيضها فهو سبحانه الضار و النافع في آنٍ واحد .

حل اللغز

التساؤل عن ماهية و جوهر العدد التخيلي $i=\sqrt{-1}$ هو سؤال فلسفي مشروع و لتحسس طبيعة هذا العدد اللغز و المحير انطلقنا :

أولاً من مفكوك تايلور للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ حول النقطة $x_\circ=1$

$$\sqrt{x}=1+\frac{(x-1)}{2.1!}-\frac{(x-1)^2}{2^2.2!}+\frac{1.3(x-1)^3}{2^3.3!}....(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)^3(x-1)^n}{2^n.n!}+.....$$

و بوضع $x=-1$ (خارج فترة التقارب) فإن المفكوك يصبح

$$i=\sqrt{-1}=-\sum_{n=2}\frac{1.3.5(2n-3)}{n!}$$

$$=-\sum_{n=0}\frac{(2n+1)!!}{(n+2)!}=-\infty$$

$$\sqrt{-1}=-\sum_{n=0}\frac{(2n)!}{2^n(n+2)!n!}=-\infty \qquad (1)$$

ثانيا من علاقة يُلر

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

نجد أن

$$e^{i\pi} = -1$$
$$i\pi = \ln -1 = \ln(-2+1)$$

و من مفكوك تايلور فإن

$$\ln(x+1) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$i\pi = \sum (-1)^{n-1} \frac{(-2)^n}{n} = -\sum \frac{2^n}{n}$$
$$i = \sqrt{-1} = \frac{-1}{\pi} \sum_{n=1} \frac{2^n}{n} \quad \to -\infty \qquad (2)$$

إذن من اكثر من اتجاه فإن $i = \sqrt{-1} = -\infty$ و من الطبيعي أن لا تتقارب $\sqrt{-1}$ إلى عدد حقيقي بل تباعدت لتساوي $-\infty$ بالتحديد و كما نعلم فإن $-\infty \notin (-\infty, \infty) = R$ ليست بعدد حقيقي مما يلقي الضوء على أن هذا العدد التخيلي اللغز ما هو إلا سالب ما لانهائية $-\infty$. توصلنا إلى أن

$$i = \frac{-1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \quad \to -\infty$$

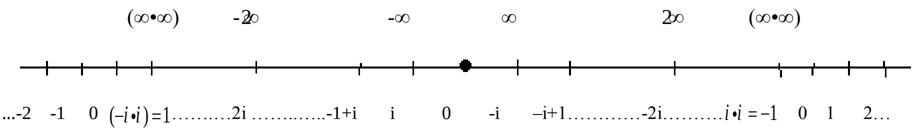
و أيضاً عبر مفكوك تايلور للدالة $\sqrt{x}$ حول $x_\circ = 1$ حيث $x = -1$

$$i = -\sum_{n=0} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \sum_{n=0} \frac{(2n)!}{(n+2)!\,n!\,2^n} \quad \to -\infty$$

لكن لا يمكن لـلعدد i أن يأخذ أي قيمة دون $-\infty$ حينها يصبح عدد حقيقي و هذا يناقض طبيعة i كعدد تخيلي غير حقيقي و بالضرورة أن $i = -\infty$ تماماً . و هذه النتيجة و كما تنبأ الرياضي الإيطالي كاردان في منتصف القرن السادس

عشر :(*جذور الأعداد السالبة مستحيلة و إن وجدت فهي كمية مرعبة* [3]19) و *هي فعلاً كمية مرعبة* $-\infty$.

واضح أن تمثيل الأعداد التخيلية على المحور التخيلي على المستوى التخيلي هو تمثيل مضلل و زائف إذ كيف نسقط أعداد تخيلية على المحور الرأسي – المحور الصادي - و هو محور حقيقي شئنا أم أبينا . دعنا نتصور الآن تمثيل جديد للأعداد التخيلية على متممة خط الأعداد الحقيقية R^c على النحو الآتي :



و كما ذكرنا سابقاً أن يُلر توصل إلي النتيجة

$$-1 > \infty$$

عندما قارن بين المتسلسلتين

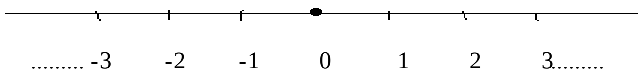
$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \qquad (1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

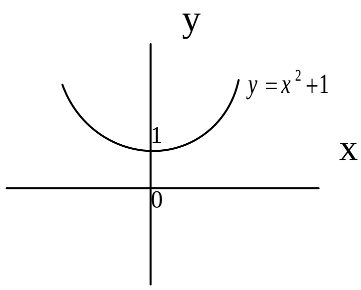
$$x = -2 \quad \Rightarrow -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \qquad (2)$$

استنتج يُلر أن ∞ تفصل بين الأعداد الموجبة والسالبة كما يفصل الصفر . و هذا ما تحقق عبر هذا التمثيل الفعلي للأعداد الحقيقية التخيلية علي امتداد R^c متممة خط الأعداد الحقيقية ثم تبدأ دورة جديدة عندما تنتهي عند $i^2 = -1$ علي يمين الخط ليبدأ بعدها الصفر , واحد اثنان ...الخ , و تنتهي على يسار الخط عند $-i^2 = +1$ ليبدأ بعدها الصفر ثم 1- , 2- ,... و تبدأ الدورة من جديد , و هلم جرا.



تمثيل الجذور التخيلية

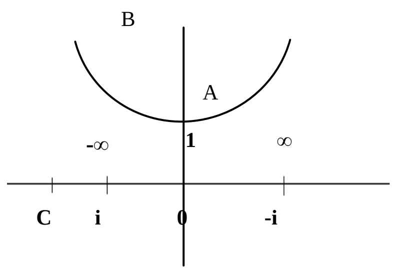
دعنا نرسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 1$



و المنحنى يقطع محور y عندما $y = 1$ و $x = 0$ و يقطع محور X عندما $y = 0$

و $x^2 + 1 = 0 \Leftarrow x = \pm i$ و لكن كيف يقطع المنحنى محور X عندما i و i - ؟

دعنا نعيد رسم المنحنى وفق التمثيل الجديد الذي اقترحناه سابقاً



لا يزال السؤال قائماً كيف و أين يقطع المنحنى محور X عند النقطتين $\pm i$.

السؤال في صيغة أخرى هل يمكن أن يتقاطع الزوجان $\overline{AB}$ و $\overline{oc}$ الجواب

حسب مسلمة ريمان في الهندسة اللاإقليدية :

any pair of lines meet some where

أي زوجين من الخطوط يلتقيان في نقطةٍ ما و هنا نقطة إلتقاءهما عند $-\infty$

و بهذا نكون قد فسرنا كيف يقطع المنحنى المحور الأفقي عند جذوره التخيلية .

أي عند $x = i$ و بصورة مشابهة عند $+\infty$ أي عند $x = -i$

و نكون أيضا قد حلينا ازدواجية (القطع الزائد الحقيقي– القطع الناقص التخيلي

ليتقاطع منحنيا القطع الزائد عند $-\infty$ أي عند $x = i$ و بصورة مشابهة عند $+\infty$ أي عند $x = -i$ بحيث يصبح القطع الزائد الحقيقي ما هو إلا قطع ناقص (بيضاوي) مهول و حقيقي في نفس الوقت , و نكون قد تجاوزنا إشكالية (حقيقي – تخيلي) لتصبح هنالك طبيعة واحدة و حقيقة واحدة . حتى من الناحية العملية لو تتبعنا حركة المذنبات نجدها تأخذ مسار قطع زائد حول الشمس والذي هو أيضا في حقيقة الأمر ما هو إلا مسار بيضاوي مهول . إذ نجد مثلا أن مذنب هالي يستغرق 76 سنة في مسار بيضاوي مهول حول الشمس , في حين تستغرق بعض المذنبات الأخرى آلاف السنين في مسارها البيضاوي – القطع الزائد في نفس الوقت- هذه المقاربة مهمة إذ تجعلنا قاب قوسين أو أدنى من ولوج الأعداد التخيلية إلى العالم الحقيقي و الكون الطبيعي .

تحضرني مقولة نابيير في القرن السادس عشر :(الأعداد التخيلية هي أشباح ghosts الأعداد الحقيقية) و هي كذلك فعلا إذ أن أي عدد حقيقي مثل الواحد له وجود آخر فيما بعد $-\infty$ (أو $+\infty$) و هو 1+ i و من ثم نستطيع أن نعبر عن ذلك العدد التخيلي 1+i . كشبح للعدد الحقيقي 1 على النحو الآتي

$$1 \pm i = 1 \bmod(\pm i).$$

$$a \pm i = a \bmod(\pm i).$$

الاستقراء يعني أنلكل عدد تاليه يتكون بإضافة الواحد إليه , في حين لا يتغير العدد اللانهائي بإضافة واحد إليه و هنا ينهار الاستقراء . لاحظ الاستقراء يتهشم و عديم الفائدة عند المالانهاية و من ثم لا يأخذ في اعتباره $\pm\infty$, و بالتالي لا يوجد عدد هو الجذر التربيعي لعدد سالب ! . و فشل في الوصول إلى أن

$i=\sqrt{-1}=-\infty$. الآن يستطيع مفهوم الاستقراء أن يستعيد عافيته مجددا و يعمل بكفاءة عند $\pm\infty$ أو بالأحرى قل عند $\pm i$ باعتبار أن

$$1\pm\infty=1\pm i\neq\pm\infty$$

لقد ظل السؤال عن ماهية العدد التخيلي $\sqrt{-1}$ يلازمني و يؤرقني طيلة ثمانية عشر عاما و احتل مساحة واسعة من تأملاتي و لم أتوصل إلى كنهه ضربة حظ في حين قد لا يكون خطر لغيري هذا التساؤل أصلا و فضل التعاطي معه كما جرت العادة عدد تخيلي لا قيمة له و حسب . و كما قال الله سبحانه و تعالى (بَلْ قَالُوا إِنَّا وَجَدْنَا آبَاءَنَا عَلَى أُمَّةٍ وَإِنَّا عَلَى آثَارِهِمْ مُهْتَدُونَ) (الزخرف: 22) يقول تعالى (قَالَ أَوَلَوْ جِئْتُكُمْ بِأَهْدَى مِمَّا وَجَدْتُمْ عَلَيْهِ آبَاءَكُمْ)(الزخرف: من الآية 24). والله أعلم .

الباب الحادى عشر

الميتافيزيقا

العلم هو طريقة في التفكير قبل أن يكون كم من المعلومات . ويعرف العلم بأنه (معرفة المعلوم على ما هو به) وينقسم العلم إلى قسمين , هما

علم ضروري

المعرفة الحسية هي إدراك ناتج عن استخدام الحواس الخمسة و هي معرفة ضرورية لا يمكن الشك فيها أو الارتياب بمتعلقها . و يضاف إلى هذه الحواس الخمسة ما يطلق عليه أوائل العقول - البديهيات - و التي تخترع في النفس ابتداءً من غير أن تكون موجودة بواسطة بعض هذه الحواس . و ليس من المستبعد أن تكون هذه العلوم الضرورية بجانبيها الحسي و البديهي من خلق الله و لا قدرة للإنسان عليها أصلاً فهي مما يجده الإنسان في نفسه دون إرادة لها أو قصد إليها.

علم نظري

العلم النظري هو علم يقع عقيب استدلال و تفكر في حال المنظور فيه و هو علم مباين للعلم الضروري من حيث :

أولاً: لأن من حكمه الرجوع عنه و الشك في متعلقه .

ثانياً: هو علم من فعل الإنسان و يقع تحت قدرته و لذلك يسمى علماً كسبياً.

ثالثاً: ليس علماً مبتدأ كالعلم الضروري بل هو علم يبنى على علم الحس والبديهة الضروري اللذان يعدان مقدمة له $_1$(9)

المعرفة و المنطق عند الغزالي

مهد الغزالي لكتابه المعارف العقلية بالإشارة إلى الغاية من تصنيفه فقال : معرفة حقيقية النطق و التمييز بين القول والكلام . و ذلك لأن الله إنما أبدع الإنسان ليكون نموذجاً من العالم الكبير وليعبر عنه بالعالم الأصغر و أشرف ما تميز به الإنسان هو النطق .

آلية الإدراك يقول الغزالي إن إدراك عالم الأشياء لا يتأتى إلا من خلال أربع مراحل متدرجة تبدأ بالحس و تنتهي بالعقل مارة بالخيال والوهم . و المعرفة التي يحصلها الإنسان بهذه الطريقة هي سلسلة من التجريدات المتتابعة تبدأ بالشيء ذاته ثم لا تلبث أن تنتهي به إلى فكرة عقلية مجردة خالصة .

المرتبة الأولى : الحس يدرك الأشياء الحاضرة .

المرتبة الثانية : الخيال بمقدوره أن يستغنى عن مشاهدة الأشياء و أن يتمثلها في حال غيابها إلا أن إدراك الخيال لا يزال مرتبطاً بالكم و الكيف .

المرتبة الثالثة : الوهم و تجريده أتم وأكمل مما سبق فإنه يدرك المعنى المجرد عن الأجسام كالعداوة و المحبة والمخالفة و الموافقة إلا إنه لا يدرك عداوة كلية ومحبة كلية بل يدرك عداوة جزئية بأن يعلم أن الذئب عدو و يلاحظ الغزالي أن هذا التجريد لم يصل إلى إدراك الكليات لأن إدراك الكليات يحتاج إلى مرحلة أخرى رابعة يسميها مرتبة العقل .

المرتبة الرابعة : العقل و إدراكه هو التجريد الكامل عن لواحق الأجسام من القدر والكيف و جميع الأعراض الجسمية و يدرك معناً كلياً لا يختلف بالأشخاص فسواء عنده وجود الأشخاص وعدمها و سواسية لديه القرب و البعد إنما ينفذ في أجزاء الملك والملكوت و ينزع الحقائق منها ويجردها مما ليس منها .

معايير الحقيقة

و لما كانت المعرفة كما يرى الغزالي تتشكل من إدراكات محصلة فمعنى ذلك إنها ستكون عرضة للخطأ والضلال , إذن ما الذي يضمن لنا أن الإحساس لم يشوه الشيء المادي الذي هو صورة له ؟ و ما الذي يؤكد لنا أن الخيال لم يحرف الصورة الحسية ؟ و هكذا نقول في الوهم والعقل . بعد هذا الشك العنيف يضع الغزالي المعايير الآتية للحقيقة :

الدعامة الأولى إن العلم اليقيني هو الذي ينكشف فيه العلم انكشافا لا يبقى معه ريب و لا يقارنه مكان الغلط و الوهم .

الدعامة الثانية في تكوين المعرفة هي مبدأ عدم تضارب الأفكار أو التناقض مثل أن النفي والإثبات لا يجتمعان في شيء واحد أو الشيء الواحد لا يكون حادثاً قديماً ، موجوداً معدوماً , واجباً محالاً.

الدعامة الثالثة الإشراق الذي يعني به ذلك النور الذي قذفه الله في صدره و الذي هو مفتاح أكثر المعارف و الذي عادت بواسطته الضرورات العقلية مقبولة و موثوق بها .

مناهج الأدلة وموازين المعرفة

لما وصل الغزالي إلى إدراك معيار الحقيقة بأشكاله الثلاثة أنطلق يرسم الأدلة ، و يحدد موازين المعرفة ، انطلاقا من ذاته فجعل الموازين العرفانية ثلاثة :

1 - ميزان التعادل: و هو أن نرتب أصلين على وجه من الوجوه ، ثم نستخلص منها علماً جديداً لازماً عنهما و مثال ذلك كل ما لا يخلو عن الحوادث فهو حادث و العالم لا يخلو من الحوادث فهو حادث .

2 - ميزان التلازم: و هو أن نبدأ من دعوى الخصم التي تخالف دعوانا ، ثم نستخلص المحالات التي تنتج عنها إذا سلمنا بها فتظهر بذلك استحالتها و متى ثبت استحالتها كان معنى ذلك إن مضادها ليس مستحيلاً و هذه دعوانا .

3 - ميزان التعاند: إذا أردنا إن نعرف حقيقة مشكلة من المشاكل لا بد من أن نضعه بين افتراضين ، إذا ثبت بطلان أحد هذين الافتراضين لزم عن ذلك ثبوت صحة الافتراض الآخر. ومثال ذلك: العالم إما حادث وإما قديم و محال أن يكون قديماً فهو حادث لا محالة .

قيمة موازين المعرفة

و ربما يتساءل المرء عن قيمة هذه الموازين و ما الذي يفيدنا أنها موازين صحيحة لا يمكن الشك فيها ؟ يجيب الغزالي فيرى أن هذه الموازين لكي تكون صحيحة لا بد من استخدام عيار ثابت لها و هذا العيار هو العلوم الأولية

الضرورية المستفادة من الحس أو التجربة أو غريزة العقل , مع أن الغزالي يذهب إلى أنه لا يمكن الشك بالمقدمة التجريبية والحسية التي بنيت عليها صحة الميزان ، كونه يعتقد أن العقل هو الذي يؤكد هذه المقدمة ، و قد لاحظنا في مرحلة الشك التي مر بها أنه ينتهي إلى مبدأ الكشف ثم لا يلبث أن يحدده تحديداً عقلياً فيحيله إلى مبدأ عدم التناقض . و معنى هذا أن العقل و مبدأه عدم التناقض ، هما المحك الأخير لهذه الموازين . يعتقد الغزالي أن الواضح بنفسه هو الأولي وينتهي إلى العلوم الأولية التي لا يمكن التشكك فيها- أي المسلمات أو البديهيات العقلية - فإن العلوم الجلية الأولية هي أصول العلوم الغامضة الخفية .

المثالية هي عملية من الخلق المنطقي الذي تم تركيبه داخل عقلي بغض النظر عما هو كائن خارج العقل ، وأن الشيء المعروف ليس مستقلاً عن العقل العارف و أن العالم في حقيقته هو هذا الذي يعرفه الإنسان بعقله لا الذي يدركه من ظواهر حسه ، حتى كانط يجعل العالم صيغة العقل . يعتبر معيار الاتساق أساساً لصدق العبارة ، أي أن تكون العبارة على اتساق مع غيرها بحيث لا يكون ثمة تناقض . لنأخذ الهندسة - مثلاً - فعلى أي أساس نحكم على نظرية هندسية من نظريات إقليدس أو مقولة بأنها صواب ؟ و الجواب هو تكون النظرية صواباً لو اتسقت مع سائر النظريات و مع سائر الفروض والتعريفات والمسلمات بحيث تأتي النتيجة محتومة لما سبقها و مقدمة ضرورية لما بعدها ، و إذا كان بين أجزاء البناء الهندسي مثل هذا (الاتساق) كان بناء صحيحاً وكان كل جزء منه صادقاً و هكذا قل في وصف الكون , سيناريو متسق .

الواقعية تتصف نظرية المعرفة ببعدها عن الذاتية فأنا حين أعرف شيئاً عن العالم الخارجي فإنما أكشف عن شيء موجود فعلاً خارج ذاتي لأنه كائن مستقل عن العقل . المعرفة كشف عما هناك و ليست هي بعملية من الخلق المنطقي الذي يتم تركيبه داخل عقلي.

المدرسة الواقعية الجديدة ترى في معيار الصدق رأياً يتفق في عملية اكتساب

المعرفة ، فما دام الشيء الذي أعرفه موجوداً خارج ذاتي أضع ما عرفته عنه في عبارات , فلا بد أن يكون ثمة تطابق بين الوصف والموصوف , تطابق بين القول و الموضوع و ليس حتماً أن تكون مجموعة الأقوال التي أقولها عن العالم مما يكمل بعضه بعضاً في بناء واحد إذ قد يكون العالم قوامه الكثرة- وليس الواحدية - متجاورة أو متعاقبة . يتميز المذهب الواقعي الجديد باهتمام أصحابه بالعلوم و بصفة خاصة الطبيعة والرياضة , فلسفة تأخذ من العلم مبادئه و طرائقه و مدركاته الكلية , فلئن كان العلم يسعى إلى تصنيف الحقائق في مجموعات مستعيناً في ذلك بالقوانين العلمية فهذه القوانين العلمية نفسها هي بمثابة المادة الخامة للفلسفة بمعنى أن الفيلسوف المعاصر يتجه بفلسفته نحو تحليل العلوم في مبادئها و قوانينها . إن أكبر عقبة كانت تقف في طريق أصحاب الفلسفة التجريبية هي : إذا قلنا أن العلم أساسه التجربة الحسية فبماذا نعلل يقين الرياضة و المنطق مع أن قضايا هذين العلمين لا تأتي عن طريق الحواس ؟ و النتيجة التي انتهت إليها (الوضعية المنطقية) هي أنه بتحليل هذين العلمين تبين أنهما تحصيل حاصل و لا تقولان شيئاً جديداً . مثل قولنا $2 + 2 = 4$ هي قضية تكرارية و ليست قضية إخبارية و يرى جماعة الفلسفة التجريبية أن اليقين في الرياضة لا يخبرنا بجديد فلم يعد هناك ما يبرر الاحتجاج بالرياضة و يقينها على الفيلسوف التجريبي الذي يقول أن مصدر كل علم جديد هو الحواس .

السببية

الغزالي , فيما يخص السببية يقول إننا إذا رأينا حادثة تحدث و أخرى تعقبها مثل اقتراب النار من القطن واحتراقه لم يجز لنا أن نقول : أن النار سبب احتراق القطن بل إن الله هو سبب الاحتراق . فمن زعم أن فاعل الاحتراق هو النار ، وهو فاعل بالطبع لا بالاختيار، ينكر الغزالي صحة هذا الزعم بأن مشاهدة حصول الاحتراق عند ملاقاة النار ليس دليلاً , بدليل عندما سلب الله من النار خاصية الإحراق في قوله تعالى: (قُلْنَا يَا نَارُ كُونِي بَرْداً وَسَلاماً عَلَى إِبْرَاهِيمَ)

(الأنبياء:69) [3(4)] تعطلت مقدرتها على الإحراق و لم تحرق إبراهيم الخليل عليه السلام , أي أن اقتران السبب بالمسبب عادة و ليس ضرورة . فيما يخص الاستقراء وقيمته يضيف الغزالي : هو أن تتصفح جزيئات كثيرة داخلة تحت معنى كلي، حتى إذا وجدت حكماً في تلك الجزيئات حكمت على ذلك الكلي به . أما إذا تناول التصفح أكثر الأشياء فهو يفترض أن أقلها الذي لم نتصفحه قد يكون مخالفاً لأكثرها الذي تصفحناه مثل : (كل حيوان يحرك عند المضغ فكه الأسفل ، التمساح حيوان ، التمساح يحرك عند المضغ فكه الأسفل) . فالقضية الناتجة عن المقدمتين (التمساح يحرك عند المضغ فكه الأسفل) قضية خاطئة و سبب خطئها يرجع إلى المقدمة الكبرى (كل حيوان يحرك عند مضغه فكه الأسفل) و قد كانت هذه المقدمة خاطئة لأنها كانت نتيجة استقراء ناقص غاب عنه أن هناك حيواناً اسمه التمساح يحرك فكه الأعلى , و في رأي الغزالي أن الاستقراء التام جهد لا طائل تحته وأن الاستقراء الناقص لا يعطينا مقدمات صحيحة يحق لنا أن نستخدمها في موازين المعرفة . لذلك يجب أن تؤخذ هذه المقدمات من العلوم الضرورية التي تستند على مبدأ عدم التناقض و يخلص الغزالي إلى أن الاستقراء الناقص لا يصل بنا إلى اليقين و لكننا نحصل به الظن فقط و لا يفيد علماً كلياً بثبوت الحكم للمعنى الجامع للجزيئات و لا يجوز لهذا الحكم المحصل بهذه الطريقة أن يستخدم مقدمة في قياس و أن تكون هذه المقدمة كلية لا جزئيه مثال ذلك: (بما أن كل فاعل جسم فإن فاعل العالم جسم) .

<u>ديكارت (1596 – 1650)</u> : الفيلسوف و الرياضي الفرنسي رينيه ديكارت يعتبر من أبطال الحتمية العلمية (السببية) لأنها تطورت على يديه من مقولة ميتافيزيقية إلى مقولة علمية . يعتقد ديكارت أن العقل يحتوي على أفكار فطرية تتسم باليقين . رسم ديكارت صورة للعالم على أنه مادي لا روحي و ميكانيكي لا غائي إنه " الساعة الضخمة التي أطلق الله عملها " على حد تعبيره .

جون لوك (1632 – 1704) : يعتبر التجربة و الخبرة المصدر الوحيد لأفكارنا . يعتقد لوك أن الأصل في السببية تعاقب الظواهر مما يخلق بينها علاقات في الذهن , و من ثم هذا الاعتقاد ذاتي بحت . على أن ذلك لا ينفي انتفاء الضرورة عن علاقة الأسباب و نتائجها , مثلاً بالضرورة أن النار تصهر الذهب .

ديفيد هيوم (1711 – 1776) : يضع تفسيراً للسببية يخلو من أية إضافة عقلية بل يعتبرها تصور ذاتي يدفع بالذهن إلى تكوين عادة تربط بين السبب و النتيجة , فعلاقة الاقتران أو التجاور بين السبب و النتيجة لا يعدو أن يكون ملمحاً حسياً لا يكشف عن جوهر تلك العلاقة . و الضرورة السببية ليست سوى ضرورة نفسية , فهي ليست ضرورة منطقية و من ثم فهي ليست قضية تحليلية . مثلاً , العلاقة السببية "النار تحرق " ليست قضية تحليلية يلزم فيها المحمول لزوماً منطقياً عن الموضوع , لأن بإمكاننا تصور النار بدون تصور الاحتراق كاللهب الكيميائي البارد. يقول الفيلسوف هيوم عن السببية : عندما ننظر حولنا إلى الأشياء الخارجية و نتفحص العملية السببية أبداً لن نستطيع أن نكتشف ضرورة الصلة ، التي تربط التأثير بالسبب ، و التي تُصيِّر أحدهما كتداعي لا شك فيه من الآخر. نحتاج إلى وسط يعين العقل لرسم هكذا استدلال و لا أدعي معرفة ذلك الوسط و لكنني سأكون ممتن لمن يتوصل إليه . فيما يتعلق بالاستقراء يقول الفيلسوف بوبر نحن لا يمكن أن ندرك الحقيقة المطلقة ولكننا نعي ما هو خطأ عبر المنهج العلمي ، وإن الاستدلال صحيح طالما نجهل الروابط الضرورية بين الأشياء (أي السبب والتأثير) . أما إذا توصلنا للرابط الضروري بين السبب و الأثر فإن مشكلة الاستدلال تكون قد حُلت . نحن نسعى نحو الحقيقة من التعلم من أخطاءنا و من ثم إقصاؤها .

السببية مبدأ كلي كوني Universal يعني أن كل حادثة في الكون لها سبب أو علة أحدثتها و لكل علة معلول نجم عنها و أن حدوث العلل ذاتها يستوجب حدوث المعلولات ذاتها و بهذا تحيط الضرورة بالأشياء كلها . تحدث الأحداث في أنماط منتظمة يمكن صياغتها في قوانين . و على أساس هذه القوانين و العلل يمكن وضع تنبؤات دقيقة . كونية مبدأ السببية يجعل كل حدث يمكن التنبؤ به من حيث المبدأ . و ما يقيد تنبؤاتنا هو قصورنا المعرفي بالعلل و القوانين . ترتبط العلية ارتباطاً وثيقاً باتجاه الزمن Time's Arrow أي أن العلة لا بد و أن تسبق المعلول . الحادثة التي وقعت في الماضي لا تكون علة إلا لحادثة تقع في المستقبل , و الحادثة التي تقع في المستقبل لا تكون معلولةً إلا لحادثة وقعت في الماضي . الترتيب الزمني يعكس الترتيب السببي في الكون . العلة و المعلول كلاهما حوادث و معيار التمييز بينهما هو التسلسل الزمني , و ذلك لعدم قابلية الأحداث للانعكاس . و من ثم ترتبط العلاقة السببية بمفهوم الزمان المطلق و المكان المطلق . العلاقة السببية علاقة تعاقب زماني منطقي تسري دائماً في كل الأحوال بما يميز القانون العلمي عن الاتفاق الذي قد يحدث بالصدفة . و كما كان التكرار هو كل ما يميز القانون العلمي عن الاتفاق , كان معنى العلاقة السببية ينحصر في التعبير عن تكرار لا يقبل استثناء (14) . فالتجربة و الاستقراء يعتمدان اعتماداً أساسياً على قانون السببية الذي يعتبر قاعدة أولية لتبرير المعرفة و الاستدلال , و القضايا الاستقرائية هي قضايا سببية . السببية كعلاقة خارجية فإن لها أسبقية عقلية في كل عملية استدلالية و هذا ما يعطيها صفة القبلية . خلاصة القول أن السببية ليست وجه من وجوه الحتمية بل هي الحتمية عينها . السببية الموضوعية كمسلمة للتفكير العلمي تنكر أية صفة موضوعية للمصادفة أو الاحتمال . لقد تغلغلت الحتمية في صميم تفكيرنا لدرجة شكلت إدراكنا للظواهر بل و حتى طريقة تعبيرنا اللغوي ثم انسحبت على الفلسفة و أخيراً على العلم , بطريقة جعلتها بديهية في التفكير . أو ليس بديهياً أن كل ما

يحدث في هذا العالم معلول له علة . لأنه حيث لا يكون ثمة علل فإن ما حدث قد أنتج نفسه بنفسه و هذا تناقض و محال و إلا علينا أن نفكر في كون كل ما يحدث فيه إنما يحدث من قبيل المعجزة . و مثل هذا الكون لا يصلح موضوعاً لتفكير علمي أو منهج عقلاني . لقد أطّرت الحتمية الحس المشترك إلى درجة أصبح الذهن عاجز عن تصور معلول بغير علة و أن مجمل المعرفة البشرية تقتصر على رد المعلولات إلى عللها . وجودياً – انطولوجيا – تُفهم العلة بوصفها شيئاً ما له من القوة و التأثير ما يلزم المعلول بالحدوث . تماماً كما تؤثر الشمس على الأرض أو تؤثر الأرض على القمر .

الميتافيزيقا

ميتا meta كلمة إغريقية تعني over بعد أو وراء . يرجع مصطلح ميتافيزيقا إلى الأرسطوطاليين حيث أطلقوه على الكتب التي أعقبت الكتب حول الفيزياء و تعني أساس الفيزياء أو أرضية الفيزياء أو ما وراء الطبيعة و تعني بحقيقة طبيعة الأشياء و جوهرها النهائي و سبب الوجود . الميتافيزيقا فرع من الفلسفة يتعلق بالعلوم الطبيعية والسيكولوجية وبيولوجيا الدماغ و فلسفة الدين والصوفية والروحانية. على الرغم من صعوبة تعريفها إلا أنه يمكن القول تكمن هويتها في دراسة المفاهيم و المعتقدات الأساسية حول أسس الحقيقة و من ثم الوجود ، الكون , العلاقة ، السبب، الفراغ ، الزمن ...الخ . السؤال الميتافيزيقي الأساسي Why do it work لماذا تعمل ؟ وأنى للرياضيات أن تعبر عن العالم الطبيعي كما نرى بكفاءة ؟ . عندما نستخدم اللغة كنموذج للواقع أي كوسيلة تنتج تكهنات و ليست صورة ساكنة للكون فإن الميتافيزيقا تخلق نموذج لغوي منطقي أو تعمل كأساس يعمد إلى دقة و تهذيب المعنى , و تنقسم الميتافيزيقا إلى ثلاثة أقسام :

1 - <u>الأونطولوجيا</u> : ontology علم الوجود و هو دراسة طبيعة مراتب الوجود . و هي إحدى أهم فروع الميتافيزيقا. و تعني دراسة الوجود . being and existence في الاستخدام الحديث للإنجليزية فإن الوجود being خاص بالكائنات التي تمتلك وعي بشكل أو آخر و هذا واضح في الحيوانات و كل الكائنات الروحية لكنه غير واضح فيما يتعلق بالنباتات و المعادن والفيروسات هل تمتلك وعي conscious أم لا ؟. في حين استخدام الوجود existence يتعلق بالوجود الآني للأشياء أي في الحاضر لا في الماضي و لا في المستقبل .

2 - <u>العلم الكوني</u> : universal مثل قانون عدم التناقض- مثل أن الشيء لا يمكن أن يكون موجود و معدوم في نفس الوقت و الجوهر و السببية .

3 - <u>فلسفة الدين</u>: Theology دراسة طبيعة الإله وما هو سماوي .

<u>مثال</u>: لتوضيح ما هي الميتافيزيقا تخيل الآن نحن في غرفة ، في وسط الغرفة منضدة وفي وسط المنضدة تفاحة كبيرة طازجة حمراء . هناك العديد من الأسئلة الميتافيزيقا التي تثيرها هذه التفاحة :

1 - واضح أن التفاحة مثال جيد لشيء فيزيائي يمكن أن تمسكها بيدك أو تأكلها و لها خواص . السؤال الميتافيزيقي : ما هي الأشياء الفيزيائية ؟ هل هي في جوهرها - ذاتها - بمعزل من خواصها ؟ أم خواصها من ذاتها ؟ فيما يعرف <u>*بمسألة الجوهر*</u> <u>***objecthood***</u> .

2 - التفاحة لها خواص أو صفات ، كونها كبيرة و حمراء . كيف تختلف الخواص أو الصفات عن الأشياء ؟ نحن نقول تفاحة حمراء لكن التفاحة و الاحمرار هما شيئان مختلفان . يمكن للمرء أن يلمس التفاحة بيده لكن أنى له أن يمسك الاحمرار بيده , اللهم إلا إذا أمسك التفاحة ذات اللون

الأحمر . إذاً يحق لنا أن نتساءل عن ماهية الخواص والصفات ؟ و هذا سؤال ميتافيزيقي يعرف *بمسألة الكونية* ***universal*** .

3 - السؤال عن الهوية ، هوية الشيء الفيزيائي هل يستمر مع الزمن كما هو أم يتغير . التفاحة قد تكون حمراء أو صفراء أو قد تتعفن لكن لا تزال تفاحة . لكن إذا أكلتها فسوف تتغير و تتحول بحيث لا تظل بعد تفاحة . السؤال عن *الهوية* ***identification*** سؤال ميتافيزيقي .

4 - التفاحة موجودة في الفضاء - موضوعة على المنضدة- والزمان- هي موجودة الآن وليس قبل أسبوع أو بعد أسبوع- لنا أن نتصور أن الفضاء مكون من شبكة خفية من ثلاثة أبعاد حيث توجد التفاحة . لنفرض أن التفاحة بل وكل الأشياء الفيزيائية في الكون أزيلت عن الوجود هل يظل الفضاء موجود ؟ قد يجيب البعض لا . الفضاء الذي يشكل الإطار الذي تفهم من خلاله علاقة الأشياء ببعضها البعض- الأشياء تخلق الفضاء و الفضاء هو الإطار الذي يحتضن الأشياء . السؤال حول *الفضاء و الزمان* ***space-time*** سؤال ميتافيزيقي .

5 - لنفرض أن فاطمة موجودة في نفس الغرفة مع التفاحة . فاطمة لها عقل من المؤكد أن عقل فاطمة شيء يختلف عن التفاحة ، قد يقول قائل أن العقل شيء غير مادي والتفاحة شيء مادي . في الوقت الذي فيه التفاحة موجودة بالتحديد على المنضدة من الصعب القول بأن العقل موجود في مكان محدد . لكن كيف لشيء عقلي كالقرار, قرار الأكل يحدث ظاهرة فيزيائية مثل أن تأكل التفاحة ؟ كيف يرتبط العقل مع الجسد سببياً وهما شيئان مختلفان ؟ و هذه تعرف بمسألة *ثنائية العقل والجسد* ***mind body*** و هي مسألة ميتافيزيقية و إن بدأت تستقل الآن كفرع من الفلسفة يعرف بفلسفة العقل .

[13] كانط و الميتافيزيقا

الميتافيزيقا رغم أن محاولاتها فشلت حتى اليوم إلا إنها لا تزال وفق طبيعة السببية البشرية مرغوبة وتحتوي على معرفة تركيبية قبلية مهمة لإيجاد وتمديد المعرفة القبلية مثل القضية القائلة : (الكون يجب أن تكون له بداية).
فالميتافيزيقا مؤسسة بهدف معرفة و خلق قضايا قبلية . كيف تكون الرياضيات البحتة ممكنة ؟ و كيف يكون العلم البحت ممكن في الطبيعة ؟ لا يزال البعض يجادل عندما نتناول العلم الطبيعي البحت وعندما يتعلق الأمر بالقضايا المتنوعة فيما يخص بدايات الفيزياء كبقاء المادة والخمول ولكل فعل رد فعل مساوٍ له.
الميتافيزيقا ينظر إليها على أن تشكل علم مستقل . إن التقدم البطيء حتى اليوم في الميتافيزيقا وعدم وجود نظام مقترح لها رغم أهميتها و حقيقة وجودها ينمي جدلاً كافٍ لأي شخص حول إمكانية تحققها . إن الميتافيزيقا موجودة فعلياً إن لم تكن كعلم تبقى كمزاج و نظام طبيعي و كحاجة ملحة للإجابة على أسئلة مهمة لا يمكن الإجابة عليها وفق المنهج التجريبي و السببي و يبقى السؤال حول إمكانية *الميتافيزيقا كمزاج طبيعي* ؟

هناك أسئلة تطرح نفسها وفق النظام السببي للتفكير الإنساني يعجز هذا النظام السببي نفسه عن الإجابة عليها ، مثل السؤال عن أصل الكون ؟ مما يمهد تلقائياً للميتافيزيقا أن تطرح نفسها . لكن ما مدى اليقين الذي تحمله الميتافيزيقا وما هي المواضيع الخاضعة لها وما هي حدودها ؟ [14] ويمكن إجمال كل هذه التساؤلات في السؤال : *كيف يمكن أن تكون الميتافيزيقا علم؟*

إن السببية من الضروري أن تقود إلى معرفة علمية إلا أن مأزق السببية يكمن في التوظيف الدوغماتي- اليقيني- الذي يقاوم بإصرار أي شكل آخر للحقيقة و يصفها بالزيف وهذا يجعل كل المحاولات للوصول إلى دوغما ميتافيزيقية ناقصة النمو بل إن دوغما السببية تقوض مرجعية وسلطة أي نظام ميتافيزيقي

مقترح . هناك مصدران أو جذران للمعرفة الإنسانية هما الفهم والإحساس و محتمل أن أصلاهما واحد و إن كان مجهول بالنسبة لنا . السببية تظل على الدوام فقط تطوير للتركيبات التجريبية . إن الأفكار هي بحيث أن الشيء الذي ينطبق عليها لا يمكن الحصول عليه عبر أي خبرة ممكنة . يكمن كبرياء و فخر الأفكار في كفاحها في توسعة النطاق الذي يقف وراء حدود الخبرة . تبدأ الفلسفة من مجال الخبرة و تحلق تدريجياً نحو سماء الأفكار وتعِد – الفلسفة - بأساس آمن لتوقعاتنا للنهايات الأخيرة والتي تتقارب نحوها أخيراً كل المحاولات السببية .
هل لهذا العالم بداية في الزمن ؟ هل لهذا العالم حدود لامتداده في الفضاء ؟ هل هناك كائن لا يتجزأ وحيد غير قابل للتلف أم لا شيء بل ما هو مجزأ و زائل ؟ هل أنا حر في تصرفاتي أم كباقي الأشياء مسير تحت وطأة الطبيعة و يد القدر ؟ هل هناك مسبب علوي للعالم أم هي الطبيعة و أوامرها هي آخر شيء يحد الفكر ؟ هل الشيء حتى في تخميناتنا لا يسمو فوق الوجود المادي ؟ هذه الأسئلة و التي تقود إلى المعرفة بالطبيعة في ترتيبها وانتظامها تدفع بالبصيرة إلى درجة بعيدة وراء ما يصل إليه الفيلسوف المؤسس على الخبرة العادية والتجربة . و أخيراً فإن التجريبي لا يعتقد أن السبب يمكن النظر إليه خارج الطبيعة. نحن لا نعلم غير الطبيعة لأنها توجد الأشياء ثم تعلمنا قوانينها .

ايمانويل كانط (نقد العقل المحض)

ايمانويل كانط فيلسوف ألماني (1724-1804) . ذاع صيت كانط كمفكر تجريدي . كانت دراسة كانط قاصرة على العلوم الطبيعية حتى عام 1770 حين توجه لدراسة الفلسفة . لم يكن كانط رياضي أو عالم تجريبي بمعنى الكلمة . إلا أنه أثر بقوة على المعرفة العلمية في توقعه الحدسي حول السديم الأولي الذي شكل المجموعة الشمسية قبل لابلاس بـنحو 40 سنة , كما تنبأ أيضاً بأن السديم ما هو إلا جزر كونية تضم عدد هائل من النجوم و تأكد هذا الحدس بعد 150 عام

. تخمينات كانط ظهرت لأول مره عام 1755 في مؤلف مجهول المؤلف - خوفاً من وطأة الكنيسة - تحت عنوان (التاريخ الطبيعي للكون ونظرية السماوات) و موضوعه الأساسي انصب على برهنة وجود الله بإيضاح أن الكون النيوتني لم ينتج ضربة حظ لكنه مصمم على مبدأ النشوء و التطور على نحو مرتب . ذاع صيت كانط نتيجة لكتابه (الطريقة الوحيدة لمعرفة وجود الله) , وعرض عليه العمل في العديد من الجامعات . أعطى كانط العديد من المحاضرات في الفيزياء و الرياضيات والمنطق و الأخلاق ليصبح عام 1770 بروفسورا في المنطق و الميتافيزيقا و من أهم أعماله (نقد العقل المحض) كأطروحة في نظرية المعرفة ، كما أسهم كانط بشكل مؤثر في الميتافيزيقا و انسحب أثر الفيلسوف كانط على مجمل حركة الفلسفة من بعده. [12]

من المتفق عليه أن معرفتنا بدأت مع الخبرة و لا نمتلك معرفة سابقة للخبرة و مع الخبرة بدأت معرفتنا ، و هذا لا يعني أن كل معرفتنا نتاج الخبرة ، واضح أن كل معرفتنا التجريبية هي نتاج الخبرة و من ثم فهي معرفة بعدية – posteriori – بل أن مجمل معرفتنا عن طريق الحواس و دلالاتها هي من قبيل المعرفة البعدية . و هنا سؤال يطرح نفسه : هل هناك معرفة لا تعتمد على الخبرة والحواس , أي معرفة قبلية apriori ؟ و نقول أن المعرفة قبلية بحتة إذا لم يخالطها أي معرفة تجريبية , مثلاً القضية القائلة :(أي تغير نتيجة لسبب) قضية قبلية لكنها ليست قبلية بحتة إذ أن التغير في حد ذاته تعبير مشتق من الخبرة . نحن في حاجة إلى معيار للتمييز بيقين بين المعرفة التجريبية و المعرفة البحتة . إذا كانت القضية ضرورية فلها حكم القبلية المطلقة . ليس هناك جدال حول صحة الخبرة أو دقتها لكن يفترض كونيتها بالمقارنة من خلال الاستقراء ، و من خلال الملاحظة بحيث لا نرقب أي استثناء . هذا التصميم الكوني للقانون غير مشتق من الخبرة و من ثم فهو قبلي بحت . فمثلاً القضية القائلة (كل الأجسام لها ثقل) قطعاً لم نختبر كل الأجسام لكنه تصميم قائم على

الاستقراء ومن ثم فهي قضية ذات معرفة قبلية. إذاً معيار المعرفة القبلية هما (1) - الضرورة و (2) - كونية القانون . لكن تظل العديد من أشكال المعرفة خارج إطار الخبرة لكنها تظهر كامتداد لأحكامنا ورؤانا وراء كل حدود الخبرة في مملكة عالم ما وراء الحواس حيث لا تشكل الخبرة دليل لأسئلة من وحي السببية نفسها لأسئلة حتمية تتعلق بالله , الجمال ,الحرية والخلود . العلم الذي هدفه النهائي موجه لحل هذه الأسئلة هو الميتافيزيقا .

<u>كانط : (العقل يصنع الطبيعة)</u>

تكمن فكرة كانط في أن الهندسة و العلم الطبيعي هو علم أسبق و قبلي apriori و تكمن صحته في فطرة العقل الذي يقبله . العبارة أي (حادثة يجب أن يكون لها سبب) لا يمكن برهانها بالخبرة . و الخبرة مستحيلة بدون هذه المسلمات العقلية . الخبرة عن العالم أو الكون ممكنة فقط إذا كان العقل يحقق النسق الذي تمثله , بمعنى أن قوانين الكون موجودة فطرياً في بنية العقل البشري . هذا النسق البنيوي هو قبل أي تحليل أو تمثيل عقلي تجريبي أو منطقي لأن الخبرة فقط تحلل نتائج تفاعل العقل مع الكون وليس طبيعة تأثير العقل على الكون . يضيف كانط هناك أشياء موجودة في الفضاء والزمان بمعزل عني وأن العقل له تأثير مسبق على الخبرة لا يخطئ , مثل ما توصل إليه المنطقيون بأن العقل يمتلك أفكار فطرية مثل الإله كائن مكتمل . إن التحري الفلسفي حول طبيعة العالم الخارجي هو تأويل حول نشاط ومستقبل ما يعرفه العقل . يلعب العقل دور نشط في تركيبة الواقع و خلقه بحيث يبدو مألوفاً بالنسبة لنا . العقل هو الذي يعطي الأشياء على الأقل خصائصها حتى تتفق مع تركيب العقل وسعة فهمه ، و بهذا يرفض كانط المنطقية التي تعتقد بمعرفة فوق حسية كما يرفض التجريبية باعتبارها محدودة جداً .

إن الحاجة إلى تمدد و تطور المعرفة لا يعترف بحدود ولا يمكن أن يقيد بالسببية مهما كانت قوتها . لقد كان كانط محقاً في توجهه و ما الثورة التي أحدثتها نظرية الكم إلا نتيجة لتجاوز السببية . إن الحمامة التي تشق الهواء بجناحيها أثناء طيرانها تحس بمقاومة الهواء و ترى أن التحليق سيكون أفضل في الفضاء الخالي . و هذا ما رآه أفلاطون عندما ترك عالم الحواس الذي يقيد الفهم في إطار ضيق جداً و غامر بالخروج على أجنحة من الفكر فقط إلى فضاء خالي عدا فقط من الفهم البحت لنتحسس إلى أي مدى أسس المعرفة موثوق بها .

التحليل يمدنا بقدر معتبر من المعرفة لكنه لا يعدو ضرب من الشرح و التوضيح لما هو موجود أصلاً في مفهومنا و إن كان مشوش و يكون القانون تحليلي إذا كان مرتبط بالسبب الذي يعزى إليه من خلال التماثل أو التطابق , فعلى سبيل المثال القضية القائلة (كل الأجسام قابلة للتمدد) قضية تحليلية إذ لا تتطلب مني أن أتجاوز المفهوم المرتبط بالجسم . لكن عندما نقول : (كل الأجسام لها ثقل) فإن ما يعزى إليه- المسبب- شيء خارج مفهوم الجسم وأصبح إضافة قادت إلى قضية مركبة.

الباب الثاني عشر

الرياضيات و العقل و الجمال

الرياضيات كما يراها جاليليو هي المنطق الجديد للعلم . و هو مطمئن إلى أن الرياضيات هي مفتاح سر الطبيعة نظراً لاكتشافاته العديدة في مجال الميكانيكا حيث تسير الظواهر الطبيعية وفقاً لمبادئ الهندسة . و هذه الوفرة من الحقائق الرياضية في العلم الطبيعي توحي إلى جاليليو أن العالم الذي يقع خارج العقل مكون من خواص رياضية فقط . و أن المادة تتمثل في مقادير و قيم رياضية , و خواص المادة الكمية و القابلة للقياس , كالحدود و الشكل و الحجم و المكان و الزمان والحركة و العدد , هي وحدها التي يمكن اعتبارها جزءاً من العالم الحقيقي لأنه لا وجود لأجسام بدون هذه الخواص في حين حتى لو تلاشى الجسد يبقى الشكل فكرة مجردة في العقل .

الفيلسوف باركلي يذهب إلى أن فرضية جوهرية المادة لا حاجة لها , و لما كانت جميع خواص المادة هي أفكار من نتاج عقولنا فهو يصل إلى أن الوجود الجوهري الوحيد هو الذات أو العقل . و هكذا لا يعترف باركلي إلا بالوجود الروحي . و هذا على النقيض من الفلسفة المادية التي لا تعترف إلا بالوجود المادي فقط و أن الوعي هو نتاج المادة .

الفيلسوف ديكارت يعتقد بثنائية العقل و الجسد , بعبارة أخرى ثنائية العقل و المادة و بحيث أن كل واحد منهما مستقل تماماً عن الآخر , على سبيل الإيضاح فالحيوان لا يمتلك عقل رغم امتلاكه جسد و دماغ و من ثم عقل الإنسان مفارق لجسده . يصر ديكارت من أن مفهوم المالانهاية لم نتوصل إليه من الخبرة بل إن الله ألهمنا إياه و من ثم فإن المالانهاية هي دليل على وجود الله . و بما أن الله

صادق بالضرورة فلا يمكن أن يخدعنا بشأن أفكارنا الواضحة و المتميزة مثل مفهوم الجسد و الامتداد , فبالضرورة أن تكون الأجسام موجودة .

يقول ديكارت : بعد أن رأيت حواسنا تخدعنا أحياناً , افترضت , أن لا وجود لشيء في الواقع على نحو ما تمثله حواسنا و رأيت أن ذات الأشياء (أي صور الأشياء) التي تقع في محيط خبرتنا و نحن أيقاظ قد تدخل في محيط خبرتنا و نحن نيام و من ثم فإن نصيبها من الصدق لا يزيد عن نصيب تخيلات أحلامي و حينها راودتني فكرة أنا الذي أفكر على هذا النحو بالضرورة أن أكون موجود و هكذا أدركت الحقيقة (أنا أفكر إذاً أنا موجود) صادقة يقيناً و واضحة بداهة و اعتبرتها المبدأ الأول للفلسفة التي كنت أبحث عنها . انطلق ديكارت من مبدأه (أنا أفكر إذاً فأنا موجود) نقطة انطلاق لبناء نسق فلسفي مضى به صاعداً إلى الله , المتعالي غير المشخص . فلتت من ديكارت ملاحظة مفادها أن بالإمكان أن تستبدل النظام الرياضي للطبيعة محل الله , مما أثار حفيظة الكنيسة .

<u>الفيلسوف اسبينوزا</u> في كتابه الأخلاق , نجد أن الله يشكل القضية المركزية . ينطلق اسبينوزا من تعاريف و مسلمات ينتج عنها لوازم . الجوهر عند اسبينوزا شيء يجب أن يعرف نفسه بنفسه كليةً و يجب أن يكون لا متناهي كما لا يجب أن يوجد إلا جوهر واحد و هو العالم ككل و بالمثل هو الله ذاته و هذا ما يعرف بمذهب (وحدة الوجود) . يرى اسبينوزا أن العقل البشري هو جزء من العقل الإلهي , و من طبيعة العقل أن يتأمل الأشياء من حيث هي ضرورية لا من حيث هي عرضية و كلما ازددنا قدرة على ذلك ازددنا قدرة على التوحد مع الله و العالم و في نفس الوقت ازددنا حريةً و تحرراً من الخوف . الإنسان في سبيل مصلحته الخاصة يجد لزاماً عليه أن يتوحد مع الله و هو يحقق مسعاه هذا كلما تمكن من رؤية الأشياء من منظور لازماني . يرى اسبينوزا أن الجهل هو العلة الأولى لكل شر بينما المعرفة – أي الفهم الأفضل للكون – هي السبيل إلى

الحكمة و الخير و الفضيلة . أخيراً نشير إلى أن الله – عند اسبينوزا - هو نظام علوي في إطار مذهب وحدة الوجود الذي ابتدعه .

الفيلسوف كانط يلم الشمل فيؤكد على ضرورة وجود القوانين العلمية لا في الطبيعة فحسب بل أيضاً في بنية العقل البشري , على سبيل المثال فإن قوانين نيوتن في الفيزياء هي الطريقة الحتمية التي لابد للعقل البشري – بحكم بنيته – من أن يفهم بها العالم المادي .

الفيلسوف هيغل يذهب إلى أن انطباعات العقل هي طبيعة الأشياء و أن الوعي الإنساني الجماعي ذاته هو علة كل الموجودات و مصدرها و تفسيرها . فالعقل هو الذي يخلق الواقع و يخلق العالم و يخلق الحقيقة . تستلهم فلسفة هيغل مبدءاً عاماً هو أن من المستحيل فهم أي جزء من العالم ما لم ينظر إليه في إطار الكون ككل , و من ثم فإن الكل هو الحقيقة الوحيدة . و بهذا يزعم هيغل أنه حقق وحدة العالم و العقل , و لكن بأي ثمن ؟ ما قيمة حقيقة هي مجرد ابتداع ذهني محض . و من ثم تذهب الفلسفة المعاصرة إلى الارتياب في كل الفكر التأملي . ليس هناك حقيقة بل وجهات نظر .

يأتي العلم الحديث ليلغي هذا الفصل الصارم بين الذات و الموضوع . لقد بينت الفيزياء الحديثة و المتمثلة في نظرية الكوانتم إلى التداخل بين الذات و الموضوع بحيث لم يصبح المشاهد محايد في التجربة بل جزءاً منها . لقد تدخل الوعي في صميم سلوك النظام الطبيعي ليفرض اختيار محدد تنهار إليه دالة الموجة التي تعبر عن النظام الفيزيائي و التي تحتوي على عدة احتمالات متشابكة . و يصبح التمييز بين الذاتي و الموضوعي وهم من الأوهام .

الدهشة و حب الاستطلاع و المتعة تشكل الدافع الأساسي للعلم و ليس المنفعة أو القوة . يقول شرودنجر (التخصص ليس فضيلة و لكن شر لابد منه , فهو

يضيق أفق العقل و إن المعرفة المعزولة في حقل ضيق لا قيمة لها ما لم تدمج في سائر حقول المعرفة) و يقول عالم الرياضيات موريس كلاين (إن ثمن التخصص هو العقم) . و من هنا يجب التأكيد على ضرورة الخبرة و الثراء المعرفي .

الجمال(15)

الرؤية التقليدية للعلم لم تعير الجمال أدنى اهتمام , فالجمال ليس مثار جدل علمي إذ أنه لا يعيننا بتاتاً في اكتشاف قوانين الطبيعة . وفق هذه الرؤية الضيقة , الجمال صفة من صفات المراقب و ليست من صميم بنية الطبيعة في شيء كما يعتقد ديكارت . و يقول الفيلسوف اسبينوزا (الجمال ليس صفة في الشيء المدروس بقدر ما هو الأثر الذي ينطبع في ذهن المراقب) . فرويد بدوره يحصر الجمال في الغريزة قائلاً (للأسف أن التحليل النفسي ليس لديه ما يقوله عن الجمال) و أخيراً يضيف داروين (من الجلي أن الإحساس بالجمال يتوقف على طبيعة العقل بصرف النظر عن أي صفة حقيقية في الشيء محل الإعجاب و الجمال ليس ضروري لبقاء الكائنات الحية) . هذه النظرة البائسة تصور العلوم على أنها باردة المشاعر , و لكنها واقعية , و تصور الفنون على أنها جوفاء المضمون , بحيث يفترض من علم الحشرات أن يسكت عن جمال الفراشة سكوت الشعر عن أنزيماتها .

الرؤية الحديثة للعلم , على النقيض من ذلك , ترى في الجمال وسيلة يُهتدى بها في اكتشاف الحقيقة العلمية . جيمس واتسون يقول حين اكتشف تركيبة DNA (أن تركيب بهذا الجمال لابد أن يكون حقيقة علمية) . يجمع أبرز علماء الفيزياء في القرن العشرين على أن الجمال هو المقياس الأساسي للحقيقة العلمية . عالم الفيزياء فينمان الحائز على جائزة نوبل يقول (أن المرء يمكن أن يستبين الحقيقة بفضل جمالها و بساطتها) . و يعلن هايزنبرغ الحائز على جائزة نوبل في

الفيزياء (إن الجمال في العلوم و في الفنون على السواء هو أهم مصدر من مصادر الاستنارة و الوضوح و أن أي قانون من قوانين الفيزياء مرده إلى تماثل موجود في الطبيعة و أن خواص التماثل تشكل على الدوام أهم سمات النظرية) و فيما يتعلق بنظرية الكم يضيف قائلاً (إن نظرية الكم مقنعة بفضل كمالها و جمالها التجريدي) .

<u>الجمال</u> يتلخص في **البساطة و الاتساق و الروعة** كما نشرحها كالآتي :

- مبدأ البساطة يستلزم شيئين اثنين هما الكمال و الاقتصاد . لقد كانت البساطة أهم معيار في تفضيل نموذج كوبرنيكس القائل بمركزية الشمس على نموذج أرسطو القائل بمركزية الأرض الذي يفترض مدارات إضافية لكوكبي عطارد و الزهرة حول الشمس في حين لا يحتاج نموذج كوبرنيكس لمثل هذا التعقيد في تفسيره لحركة الكواكب المشاهدة . يقول نيوتن (الطبيعة تسرها البساطة و هي لا تأبه بالأسباب الفائضة عن الحاجة) . إن بساطة قوانين الطبيعة المتمثلة في الصيغ الرياضية الخلابة ليس مردها اقتصاد في التفكير فحسب بل هي صفة موضوعية للطبيعة . إن الاقتصاد في التفكير يفسر لنا سبب بحثنا عن قوانين بسيطة لكن لا يفسر عثورنا عليها , الطبيعة هي مصدر البساطة و من ثم فهي مصدر الجمال .
- مبدأ الاتساق و الذي يحوي ضمناً التماثل و يعني أن تنجح النظرية في الجمع بين العديد من الظواهر التي تبدو لأول وهلة أنها مختلفة . التناسق يعني انسجام الأجزاء بعضها مع بعض و مع الكل . ديراك الحائز على جائزة نوبل في الفيزياء لاكتشافه البوسترون - نقيض الإلكترون - من منطلق جمالي بحت نتيجة للتماثل الموجود في معادلة الإلكترون , يقول (إنه لأهم أن يجد الإنسان الجمال في معادلاته من أن يجعلها تتفق مع التجربة) . لقد تم اكتشاف عالم من الجسيمات المضادة انطلاقاً من وحي الجمال الكامن في التماثل . و عندما أحجم شرودنجر عن نشر معادلاته القيمة في الميكانيكا

الموجي لأنها لم تتفق مع المعطيات التجريبية حينها أضاف ديراك مخاطباً شرودنجر (إن من المهم أن تكون لدينا نظرية جميلة و إذا حدث أن المشاهدات لا تؤيدها فلا تكتئب و تريث لعل خطأ ما سيظهر في المشاهدة) و هذا ما تبين لاحقاً أن ثمة خطأٍ ما في تأويل المشاهدات .

- مبدأ الروعة و الذي يعني اتساع و شمول تطبيق النظرية يتجلى واضحاً في قوانين نيوتن الثلاثة للحركة التي أوجزت حركة الكواكب و المذنبات و المد و الجزر . النظرية النسبية لآينشتاين تمثل قمة الروعة حيث أفلحت في الجمع بين مفهومي الزمان والمكان و هما مفهومان كانا مستقلان , كما أفلحت من جهة أخرى في دمج مفهومي المادة و الطاقة معاً .

العالم الرياضي هنري بوانكاريه يقول (العالم لا يدرس الطبيعة سعياً وراء المنفعة , بل لأنه يجد متعة في دراستها و ذلك لأن الطبيعة جميلة في ذاتها و إلا لما كانت جديرة بأن تعرف و لما كانت الحياة جديرة لأن تعاش) . و بما أن الطبيعة جميلة بالضرورة أن يصبح الجمال معيار للعلم , و لعمري من عَمِي أن يستشف جمال الطبيعة كان أعمى من أن يدرك قوانينها . و لأول مرة نعي أن العلم و الفن يمكن أن يلتقيا تحت مظلة واحدة هي الجمال . يؤكد داروين أن الجمال لا يشكل حاجة ضرورية للبقاء و الارتقاء . يقر أرسطو بأن الطبيعة زاخرة بالجمال و هو جمال لا يمكن تفسيره بالضرورة المادية و لا بالصدفة و من ثم فهو يعزو الجمال إلى الله . الجمال المتمثل في التماثل الذي تزخر به البلورات المعدنية لا يمكن أن يعزى للضرورة . الجمال بُعد إضافي يتجاوز حدود المنفعة , يتضح ذلك جلياً في قوله تعالى ((و الأنعام خلقها لكم فيها دفء و منافع و منها تأكلون * و لكم فيها جمالٌ حين تريحون و حين تسرحون * و تحمل أثقالكم إلى بلدٍ لم تكونوا بالغيه إلا بشق الأنفس إن ربكم لرءوفٌ رحيم * و الخيل و البغال و الحمير لتركبوها و زينةً و يخلق ما لا تعلمون)) فالمنفعة تنحصر في ركوبها في حين تعبر الزينة عن البعد الجمالي الزخارف التي

تزخر بها الطبيعة و التي نراها في أوراق الشجر و في الفراشات و تناسق ألوان ريش الطيور و زخرفة قنديل البحر و زهاء الطاؤوس وبهرجة ألوان الحشرات (و هل للحشرات حس جمالي ؟) , هذه الزخارف ليست حاجة ضرورية للبقاء , و لوفرتها في الطبيعة ليس مردها إلى الصدفة و حتى لو سلمنا بالصدفة فإن الصدفة تختار من بين عدة بدائل , فلم اختارت الصدفة هذا البديل الأجمل و الأبهى . يجب التسليم بوجود حرية اختيار و من ثم بوجود عقل يتمتع بأسمى آيات الجمال هو الله يدير دفة هذا الجمال و يشيعه في أرجاء الكون , لا لحاجة مادية أو نتيجة صدفة عمياء بل لأن الجمال غاية في ذاته. الجمال وحده ما هو إلهي و مرئي معاً في آنٍ واحد . الرسول صلى الله عليه و سلم – الذي أوتي جوامع الكلم , أي الذي لا يقول إلا المختصر المفيد و هذا الاقتصاد اللغوي هو بُعد جمالي - يقول (إن الله جميل يحب الجمال) .

العقل (15)

الملكة التي تعين على فهم علل الأشياء هي العقل . اللسان , مثلاً , يدلنا على أن البحر مالح لكن لا يفسر لنا العلة : لماذا البحر مالح ؟ العقل كذلك يمكننا من إدراك ماهية الأشياء و هو أمر تعجز الحواس عن القيام به . حتى الخيال قد يرسم صورة لحيوان معين لكن لا يستوعب المفهوم الكلي و المجرد للحيوان و قس على ذلك أيضاً مفهوم الزمان و المكان , فقط العقل هو القادر على هذا النمط من الإدراك . العقل له مقدرة على الإدراك تفوق مقدرة الحس و الخيال . العقل وحده يصنع العلم لأنه وحده يستطيع أن يستكشف ماهية الأشياء و عللها .
الإرادة ملكة أخرى تفصلنا عن عالم الحيوان الذي يسترشد بالإحساس و العاطفة فقط , في حين يمتلك الإنسان الإرادة الحرة وفقاً لما يراه العقل .
إذاً ما هي العلاقة بين الإرادة و العقل ؟

ويلدر بنفيلد في كتابه (لغز العقل The Mystery Of The Mind) يضع نتائج أبحاثه من خلال عمليات جراحية أجراها على ما يربو من ألف مريض في حالة الوعي . في عام 1933 اكتشف بنفيلد بمحض الصدفة أن تنبيه مناطق معينة في الدماغ بالكهرباء تنبيهاً خفيفاً يحدث استرجاعاً فجائياً للذاكرة عند المريض الواعي , فعندما لامس بنفيلد بالالكترود (القطب الكهربائي) قشرة دماغ شاب تذكر هذا الشاب مشهد لعبة بيسبول في مدينة صغيرة . لاحظ بنفيلد أن ملامسة الالكترود لمنطقة الكلام في الدماغ تحدث احتباس للكلام عند المريض , فعندما عرضت صورة فراشة على المريض فهم المريض بعقله أنها فراشة في حين عجز من أن ينطق كلمة فراشة بصوته . أي طلب العقل من مركز الكلام في الدماغ أن ينطق بالكلمة التي تماثل مفهوم الفراشة و هذا يعني أن آلية الكلام ليست متماثلة في العقل بل موجهة من قبله . الكلام أو اللغة هي وسيلة للتعبير عن الأفكار و لكنها ليست الأفكار ذاتها . استطاع بنفيلد باستخدام الالكترود أن يجعل الشخص يحرك بعض أطرافه لاإرادياً . خلص بنفيلد إلى الآتي : (عقل المريض الذي يراقب الموقف بمثل هذه العزلة و الطريقة النقدية لا بد أن يكون شيء آخر يختلف كلياً عن فعل الأعصاب اللاإرادي و مع أن مضمون الوعي يتوقف إلى حد كبير على النشاط العصبي فالإدراك نفسه لا يتوقف على ذلك) . باستخدام أساليب المراقبة هذه استطاع بنفيلد أن يرسم خريطة كاملة للدماغ تبين المناطق المسئولة عن النطق و الحركة و جميع الحواس الداخلية و الخارجية . غير أنه لم يكن من المستطاع تحديد موقع العقل أو الإرادة في أي جزء من الدماغ . يعلن بنفيلد : (ليس في قشرة الدماغ أي مكان يستطيع التنبيه الكهربائي فيه أن يجعل المريض يعتقد أو يقرر شيئا أو يفكر منطقياً أو يحل مسألة في الجبر , الالكترود يستطيع أن يجعل عضو المريض يتحرك و لكن لا يستطيع أن يجعله يريد أن يتحرك , لا يستطيع أن يكره الإرادة) . خلاصة القول أن (العقل و الإرادة ليس لهما أعضاء جسدية

بل هما مفارقان للجسد) . التفكير يؤثر في الفعل و الإرادة تؤثر في المادة . فإذا كانت الإرادة غير مادية فليس مما ينافي العقل أن تتصرف على نحو غير مادي , أي باختيار حر تعجز العلوم الآلية من فيزياء و كيمياء و فسيولوجيا و غيرها من تفسيره . و العقل هو الذي يوجه الدماغ , حتى لو كان الدماغ حاسبة إلكترونية بالغة التعقيد فلا بد لها من مبرمج يوجهها .ذلك شأن الدماغ أيضاً لابد له من موجه ألا و هو العقل , و كما أن المبرمج ليس جزءاً من الحاسبة و لا نفسها كذلك العقل ليس جزءاً من الدماغ و لا حتى الدماغ كله . الحاسبة و كذلك الدماغ لا بد من أن تبرمجها و تديرها قوة قادرة على الفهم المستقل . من السخرية أن بنفيلد بدأ أبحاثه ساعياً إلى إثبات أن (الدماغ يفسر العقل) و انتهى به المطاف إلى نقيض ذلك أن (العقل يفسر الدماغ).

أرسطو وباستخدام المنطق و قانون العلة و المعلول انطلاقاً من أن لكل حركة لابد من محرك توصل إلى العلة الأولى للحركة و هو المحرك الذي لا يحتاج لمحرك و في نفس الوقت لا يتحرك لأن حركته تعني عدم اكتماله. و هذا الذي لا يتحرك بالضرورة مبرأ من المادة و من ثم فهو عقل . و هذا العقل يحرك الموجودات دون أن يتحرك , كما يحرك الحبيب – دون أن يتحرك - حبيبه شوقاً إليه . فكل الكائنات تتحرك شوقاً إلى هذا العقل باعتباره الخير الأسمى و الغاية المنشودة ألا و هو الله .

الثورة على الجمود العقلي

ما كان مطلباً في الماضي أصبح قيداً على الحاضر , و ما كان إبداعاً أصبح جمود و عقبة كئود في طريق التطور . ينتكس العقل و الفكر في حالات الوصايا الفكرية و الإرهاب و القمع السلطوي . الواقع الجديد يفرض تحدياته التي يجب التصدي لها و من ثم يفرض حتمية مواجهة التقليد و الهروب إلى الماضي . و لزم التخلي عن التقديس الأعمى و التحرر من سلطة السلف على

الخلف و إخضاع الأسفار المقدسة لتمحيص العقل و عملية النقد و التحليل . كما يجب التعاطي مع النصوص المقدسة بمنظار اليوم و بلغة العصر و ثقافته , دون وصايا أو قيود من تأويل أو تفاسير , عفا عنها الدهر و صدئت , حجبت عنّا النص و جعلته معتماً تستشكل قراءته في الحاضر أو إنزاله على نحو إيجابي على الواقع . لابد من رصد الواقع و استقراء أحداثه و فق إضاءة جديدة هي نور العقل لا كتابات السلف و لا القوالب الجامدة التي نريد أن نقولب بها الحاضر لنعيد إنتاج الماضي . نجد روح التحرر من قيود السلف هي ديدن الأنبياء , فهاهو المسيح عليه السلام يخاطب بني إسرائيل في القرءان قائلاً ((لأحل لكم بعض الذي حرم عليكم)) و يصف الله سبحانه و تعالى النبي صلى الله عليه و سلم في قوله تعالى ((النبي الأمي الذي يجدونه مكتوباً عندهم في التوراة و الإنجيل يأمرهم بالمعروف و ينهاهم عن المنكر و يحل لهم الطيبات و يحرم عليهم الخبائث و يضع عنهم إصرهم و الأغلال التي كانت عليهم)) . فالأنبياء هم أهل التجديد و ورثتهم هم العلماء من أهل التجديد الذي و صفهم النبي في قوله (إن الله يسخر لهذه الأمة على رأس مائة سنة من يجدد لها دينها) و يبقى العقل هو منهج التجديد . العقل الذي أشار الله سبحانه و تعالى إليه في قوله ((و الذين إذا ذكروا بآيات ربهم لم يخروا عليها صماً و عمياناً)) أي الذين خروا عليها بتدبر و تفكر و إعمال العقل . إن الله سبحانه و يتعالى يدعونا لإعمال العقل في القرآن لكي نقتنع أنه كلام الله و يتحدانا أن نجد فيه تناقض و معلوم أن مبدأ عدم التناقض هو مفهوم عقلي كوني , فيقول تعالى ((أفلا يتدبرون القرءان و لو كان من عند غير الله لوجدوا فيه اختلافاً كبيراً)) . فإذا كان الله سبحانه و تعالى لم يحظر إعمال العقل في القرآن فمن يا ترى يحق له أن يحجر علينا هذا الحق . و إذا كان القرآن خاضع لتمحيص العقل فمن باب أولى أن يخضع ما دونه من الأثر و القول المأثور أو مجمل تراث السلف لهذا التمحيص و النقد و التحليل بغية فهمها و تنقيتها و الاستفادة منها على نحو

إيجابي . المفارقة تتمثل في الوقت الذي نتباهى فيه بماضينا العلمي المجيد فإذا بنا نقاوم العلم في حاضرنا أشد المقاومة . هذا الانفصام لا علاج له إلا أن نحترم العلم في الحاضر كما احترمناه في الماضي , و من ثم يصبح التفكير العلمي هو المنهج الذي نعتد به . يجب أن نضع نصب أعيننا أن أي معركة ضد العلم هي معركة خاسرة . عندما نغيب العقل و نكبت النقد لا يتبقى لنا سوى الشعوذة و الخرافة و الهوس و التطرف . لا يوجد علاج ناجع لعقليتنا الأسطورية إلا بالمنهج العلمي و النقد و التحليل . فالجهل و اللاعقلانية و غياب المعرفة العلمية و هيمنة الخرافة و الرواسب الأسطورية و اعتماد أساليب إنتاج بائدة و قديمة هي مؤشرات التخلف . الدكتور علي أسعد وطفة في كتابه (الجمود و التجديد في العقلية العربية) يلخص خصائص المجتمعات التقليدية :

1 - المجتمعات التقليدية هي تلك المجموعات البشرية التي تحكمها أنساق متجانسة من القيم الثابتة .

2 - تستند هذه المجتمعات في تصوراتها عن نفسها و عن غيرها إلى مرجعيات عقائدية أو طائفية أو عرقية ضيقة .

3 - لم تفلح هذه المجتمعات في صوغ تصورات شاملة عن نفسها و عن الآخر فلجأت إلى الماضي في نوع من الإنكفاء الذي تفسره تمسكاً بالأصالة .

4 - مجتمعات تخشى التغيير في بنيتها الإجتماعية و تعتبره تهديداً لقيمها الخاصة .

5 - مجتمعات تأثيمية تؤثّم أفرادها عندما يقدمون أفكاراً جديدة و يتطلعون إلى تصورات مغايرة .

6 - مجتمعات معتصمة بهوية ثقافية ثابتة تناهض التغيير و التحول . مجتمعات تعيش في أنفاق معتمة يكون فيها ضوء الشمس مؤلماً .

7 - مجتمعات تعتمد تفسيراً ضيقاً و مغلقاً للنصوص الدينية .

8 - مجتمعات لم تتمكن من التمييز بين الظاهرة الدينية السماوية من جهة , و الشروح و التفسيرات البشرية التي أصبحت مقدسة لا تقبل نقد و لا تحليل .

أما المجتمعات الحديثة فهي تلك المجتمعات التي تتميز بالنشاط العقلي و العلمي و حدّثت تكويناتها الإجتماعية و الثقافية و نهجت منهج التجديد فتحررت من هيمنة السلف على الخلف و تخلصت من عبء الماضي و إن تمثلت روحه و انفتحت تستشرف المستقبل برمجةً و تخطيطاً . لا يمكن لأمة من الأمم أن تدافع عن وجودها و هويتها و تحلم بمستقبل مشرق و مشرف إلا إذا استطاعت أن تحدث تحولات نوعية في العقلية السائدة . (13)

و نحن نرجو أن يكون هذا الجهد المتواضع بين دفتي الكتاب محاولة لاستنهاض العقل العربي الإسلامي من سباته و من استنامته إلى التقليد و الجمود و الخرافة و الأسطورة إلى سماوات العقلانية و التجديد الخلق و الإبداع في العلم و الأدب و الفن مستصحبين قول الرسول صلى الله عليه و سلم (همة ابن آدم عالية لو طلب الثريا لنالها) .

المراجع

(1) ماكليش, جون : العدد . عالم المعرفة , عدد 251 الكويت

$(1)_1$ ص 118, 119

$(1)_2$ ص 124, 125

$(1)_3$ ص 168

$(1)_4$ ص 176

$(1)_5$ ص181

$(1)_6$ ص 128

(2) برونوفسكي . ج : ارتقاء الإنسان . عالم المعرفة ,الكويت .

$(2)_1$ ص 107

$(2)_2$ ص 124

(3) عثمان , صلاح محمود : الاتصال و اللاتناهي بين العلم و الفلسفة . المعارف بالإسكندرية .

$(3)_1$ ص 84 -85

$(3)_2$ ص 87

$(3)_3$ ص 89

$(3)_4$ ص 91

$(3)_5$ ص 93 -94

$(3)_6$ ص 95

(3)$_7$ ص 137

(4) غالب , مصطفى : في سبيل موسوعة فلسفية (برتراند راسل) .

دار الهلال , بيروت

(4)$_1$ ص60

(4)$_2$ ص79

(4)$_3$ ص29

(4)$_4$ ص86

(5) جوزيف شاخت و كليعورد بوزوث : تراث الإسلام (الجزء الثاني)

عالم المعرفة . عدد 234 . الكويت . ص 200

(6) راشد , رشدي (2004): تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر و

الحساب . مركز دراسات الوحدة العربية

(6)$_1$ ص 304 , 328

(6)$_2$ ص 54

(6)$_3$ ص 137

(6)$_4$ ص 140

(7) الحمزة , محمود حمو (2002) : موجز في تاريخ الرياضيات و

تطورها الفكري و الفلسفي . اليرموكللنشر و التوزيع . تعز .

(7)$_1$ ص 111

(8) الخوري , أديب (2003) الرياضيات عالم رائع . وزارة الثقافة

السورية . ص 76 , 77 , 78 , 81 .

(9) منتصر , عبد الحليم (1990) : تاريخ العلم و دور العلماء العرب في تقدمه . دار المعارف . القاهرة . ص 94,98, 105, 107, 111, 133

(10) الخولي,يمنى طريف (2001) : فلسفة العلم من الحتمية إلى اللاحتمية . دار قباء للطباعة و النشر . ص 378 – 381 .

(11) بوانكاريه , هنري : العلم و الفرضية . المنظمة العربية للترجمة . ص 255 - 265

(12) الجابري , صلاح(2006) : فلسفة العلم . الانتشار العربي . بيروت

(12)$_1$ ص 122,123 , 124, 125 .

(12)$_2$ ص 131 , 132, 133 , 134 , 135 .

(13) وطفة , علي أسعد (2007) : الجمود و التجديد في العقلية العربية . الهيئة العامة السورية للكتاب . ص112, 113, 114

(14) رايشنباخ : نشأة الفلسفة العلمية . ص 135 - 137

(15) أغروس و ستانسيو : العلم في منظوره الجديد . عالم المعرفة العدد 134 . ص 25 -40 , 43 – 50 .

References

[1] Burton, David M(1980) : Number Theory.Allyn and Bacon Inc.london.page 14-18.

[2] JJO`Connor and EF Roberson : www-history.msc.st-andrews.ac.uk/history

[3] Burton, David M(2003) : The History Of Mathematics

Mc Graw-Hill Companies . $[3]_1$page 2-6 . $[3]_2$173.

$[3]_3$ 469-475. $[3]_4$ 477. $[3]_5$ 638-642. $[3]_6$ 496.

$[3]_7$ 353-373 . $[3]_8$ 355 . $[3]_9$ 358,359 . $[3]_{10}$ 363,364

$[3]_{11}$ 368,369,370. $[3]_{12}$ 139,140. $[3]_{13}$ 546

$[3]_{14}$ 543,555,558,562. $[3]_{15}$ 652-656. $[3]_{16}$ 657. $[3]_{17}$ 661

$[3]_{18}$ 652. $[3]_{19}$ 297. $[3]_{20}$ 629 . $[3]_{21}$34-43 . $[3]_{22}$59-67.

$[3]_{23}$14-16 . $[3]_{24}$671-672.$[3]_{25}$675-677. $[3]_{26}$ 480-485

[4] Simmons G.F (1963): Introduction To Topology And Modern Analysis . Mc GRAW-HILL.$[4]_1$ 31. $[4]_2$ 38.

[5] Shum : Set Theory . $[5]_1$ 6,7,179.$[5]_2$ 146.

[6] Chaitin,G.J: Lecture :- A century of controversy over the foundations of mathematics . Springer-Verlag

Claude,C.s and Paun,G(2000) : Finite Versus Infinite. Springer-Verlag . pp 75-100

[7] Hilbert, David(1927) : The foundation of mathematics .Source : The Emergence of logical empiricism .1996

Garland Publishing Inc.

[8] Brouwer,G.T(1951):Historical introduction and fundamental notions.

Source : Brouwer`s Cambridge Lectures On Intuitionism . Cambridge University Press , 1981 .

[9] Edwad,H.Madden(1967): Philosophy of science : on Gödel's philosophy of mathematics .chapter I and II.

[10] Gödel, Kurt(1961) : collected works :- The modern development of the foundation of mathematics in the light of philosophy .volume III.Oxford University Press.

[11] Halmos,Paul R(1974): Measure Theory . Springer-Verlag .p.67.

[12] Immanuel Kant (1787): Critique of pure reason.

[13] Encyclopedia of philosophy(internet) .

Immanuel Kant (1787): Metaphysics

[14] Immanuel Kant (1787): The antinomy of pure reason