

الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

مقدمة في

نظير البيان

الدكتور علي عزيز علي

- المحتويات -

المقدمة	
٦	الفصل الأول : مفاهيم أساسية
٩	(1-1) تعاريف
١٥	تمارين (1-1)
١٧	(2-1) البيانات الموجهة
٢١	تمارين (2-1)
٢٣	(3-1) البيانات الجزئية
٢٩	(4-1) بعض العمليات على البيانات
٣٣	تمارين (3-1)
٣٤	(5-1) بعض البيانات الخاصة
٤٢	تمارين (4-1)
٤٣	(6-1) مصفوفات الوقوع
٤٨	تمارين (5-1)
٤٩	(7-1) غمر البيانات
٥٧	تمارين (6-1)
الفصل الثاني : الدروب والدارات	
٥٩	(1-2) تعاريف : المسارات . والدارات . والدروب
٦٣	(2-2) الاتصال
٧٠	تمارين (1-2)
٧١	(3-2) المجموعات القاطعة
٧٧	تمارين (2-2)
٧٧	(4-2) المسافة
٨٣	تمارين (3-2)
٨٤	(5-2) البيانات الأويلرية
٩٠	تمارين (4-2)
٩٣	(6-2) البيانات الهملتونية
٩٧	تمارين (5-2)

الفصل الثالث : الاشجار

- ٩٩ ... (1-3) بعض مميزات الاشجار
- ١٠٩ ... تمارين (1-3)
- ١١١ ... تعداد الاشجار (2-3)
- ١٢٣ ... تمارين (2-3)
- ١٢٥ ... أشجار القياس الكلي الاصغر (3-3)
- ١٣٣ ... تمارين (3-3)
- (4-3) مصفوفات الدارات والمجموعات القاطعة
- ١٣٥ ... للبيانات الموجهة ..
- ١٤٠ ... تمارين (4-3)

الفصل الرابع : البيانات المستوية

- ١٤١ ... صيغة أولر للبيانات المستوية (1-4)
- ١٤٦ ... تمارين (1-4)
- ١٤٧ ... مبرهنة كورنوفسكي (2-4)
- ١٥٩ ... تمارين (2-4)
- ١٦٠ ... السطوح المغلقة الموجهة (3-4)
- ١٦٣ ... الجنس والسلك وعدد التقاطع (4-4)
- ١٧٦ ... تمارين (3-4)
- ١٧٧ ... الأثنينية (5-4)
- ١٨٩ ... تمارين (4-4)
- ١٩٠ ... الأثنينية التوافقية (إثنينية وايتني) (6-4)
- ١٩٥ ... تمارين (5-4)

الفصل الخامس : تلوين البيانات

- ١٩٧ ... تلوين الرؤوس (1-5)
- ٢٠٩ ... تمارين (1-5)
- ٢١١ ... تلوين الاوجه (تلوين الخرائط) (2-5)
- ٢١٤ ... تمارين (2-5)
- ٢١٥ ... مبرهنة الالوان الاربعة (3-5)
- ٢٢١ ... تمارين (3-5)

٢٢٢	تلوين الحافات (4-5)
٢٣١	تمارين (4-5)
٢٣٢	حدوديات التلوين (5-5)
٢٤١	تمارين (5-5)

الفصل السادس : تطبيقات متنوعة لنظرية البيانات

٢٤٣	تقليل حوادث التقاطعات في المعامل (1-6)
٢٤٤	تمارين (1-6)
٢٤٦	استعمال التطابق الشجري في الكيمياء العضوية (2-6)
٢٥٥	تمارين (2-6)
٢٥٦	وسيلة تقييم ومراجعة البرامج (3-6)
٢٦٤	تمارين (3-6)
٢٦٤	تطبيقات مبرهنة هول (4-6)
٢٦٧	تمارين (4-6)
٢٦٧	شبيكات السيول (5-6)
٢٨١	تمارين (5-6)
٢٨٣	تحليل الشبيكات الكهربائية (6-6)

الفصل السابع : تطبيقات اخرى لمبرهنة هول

٢٩٣	نظرية المستعرض (1-7)
٢٩٤	المستطيلات اللاتينية (2-7)
٢٩٦	مبرهنة كونيك - اجيرفاري (3-7)
٢٩٨	تمارين
٣٠٠	المصطلحات العلمية
٣٠٥	المراجع

بتكليف من وزارة التعليم العالي والبحث العلمي . قمت بتأليف هذا الكتاب وفق مقررات موضوع « نظرية البيانات » الذي يدرس لطلبة المرحلة الرابعة في الرياضيات . ولقد راعيت في تأليفه الدقة العلمية والتسلسل المنطقي والموضوعي والشرح المبسط . كما اكثر من ايراد الامثلة المحلولة والتمارين المتنوعة .

ان هذا الكتاب هو اول كتاب عربي في موضوع نظرية البيانات . وهو مقدمة متواضعة في نظرية البيانات وبعض تطبيقاتها . ولقد صادفتني عند تألفي الكتاب مشكلة تعريب المصطلحات العلمية . فكثير مما يتعلق منها بنظرية البيانات لم يرد في الكتب المعربة في مواضيع الرياضيات الاخرى . ولقد حاولت جهد امكاني اختيار الكلمة العربية المناسبة التي تعبر عن المعنى العلمي بالدرجة الاولى . وفي هذا المجال ، أرحب بملاحظات زملائي التدريسيين الاختصاصيين للاخذ بها في الطباعات القادمة ان شاء الله .

يمكنني القول بأن نظرية البيانات هي من المواضيع الاولية الرائعة في الرياضيات الحديثة . اذ ان هذه النظرية تستعمل في معظم فروع المعرفة . فهي تخدمنا باعتبارها نموذجاً رياضياً مبسطاً لاي نظام متضمن عملية ثنائية .

دُرست نظرية البيانات لأول مرة باعتبارها مفهوماً في الرياضيات من قبل عالم الرياضيات المعروف اويلر في عام 1736 . ولقد شهد القرن الحالي تطوراً كبيراً في نظرية البيانات . وتفتح هذا التطور في العشرين سنة الاخيرة عن تطبيقات واستعمالات ذات فوائد كبيرة في مواضيع ذات اهمية علمية واقتصادية كبيرة . كنظرية المباريات والبرمجة الرياضية . ونظرية الاتصالات . وشبكات الجريان . والشبكات الكهربائية اضافة الى استعمالاتها في الفيزياء . والكيمياء العضوية . والاقتصاد . والهندسة المدنية . وعلوم الحياة . وعلم النفس . ومجالات اخرى كثيرة ومتنوعة . وقد تطرقت الى عدد من تلك التطبيقات في الفصل السادس . وأشارت الى عدد آخر منها في الفصول الاخرى .

يتألف الكتاب من سبعة فصول . انصبت الفصول الخمسة الاولى على شرح الجوانب النظري والرياضي لنظرية البيانات . وبذلك تعتبر مقدمة جيدة للموضوع .

اما الفصل السادس فقد تضمن بعض تطبيقات البيانات ، كما سبق ان ذكرت . واخيراً فان الفصل السابع يوضح العلاقة بين مبرهنة هول من جهة ونظرية المستعرض والمستطيلات اللاتينية من جهة اخرى .

بعض فقرات فصول هذا الكتاب ذات مستوى عال ، كما ان براهين بعض المبرهنات مطولة ومملة للطالب المبتدىء في نظرية البيانات. وبما ان المادة التي يحتويها الكتاب اكثر مما يمكن تغطيته في فصل دراسي واحد (كما أرى) ، فاني اقترح في هذه الحالة تجنب تدريس تلك البنود او اجزاء البنود المؤشرة بالعلامة ❀ وعدم اعطاء مبراهين تلك المبرهنات أو حل مجاميع التمارين التي وضعت عليها هذه العلامة او المحصورة بين علامتين من هذا النوع . علما بان ترك المواد المؤشرة هذه لن يؤثر في اعتماد الفقرات المتبقية بعضها على بعض .

هذا واقدم شكري وتقديري الى الخبير العلمي الدكتور عادل غسان نعوم الذي بذل جهداً مخلصاً في مراجعة مسودات الكتاب وابدى ملاحظات ثمينة ساعدتني على تنقيح بعض الفقرات وازافة امثلة مفيدة . كما اشكر الخبير اللغوي الدكتور عبد الكريم توفيق لقيامه بضبط لغة الكتاب . وأقدر الجهد الكبير الذي بذله العاملون في مؤسسة دار الكتب بجامعة الموصل لاجل أن يظهر هذا الكتاب بشكله الحالي .

واخيراً أمل ان اكون قد وفقت في خدمة وطني وأمتي باثراء المكتبة العربية .
والله من وراء القصد .

المؤلف

الموصل / ١٩٨٣

الفصل الاول

مفاهيم أساسية

(1-1) تعاريف

نقدم في هذا البند العديد من التعاريف والامثلة على البيانات . وسوف نذكر انواعاً متعددة من البيانات .

يعرف البيان G بأنه مجموعة غير خالية V من عناصر تسمى رؤوس (vertices) البيان . مع عائلة E (أو جملة family) من أزواج غير مرتبة من رؤوس البيان . يطلق على كل عنصر من عناصر E حافة أو ضلع (edge) . ويطلق على V مجموعة رؤوس البيان G . وقد نرمز لها أحياناً بـ $V(G)$. كما يطلق على E عائلة حافات G . وقد نرمز لها أحياناً بـ $E(G)$. ونعبر أحياناً عن البيان G الذي مجموعة رؤوسه V وعائلة حافته E بالزوج المرتب (V, E) . وسوف نرمز لكل حافة بحرف . مثل e مع دليل يوضع اسفل الحرف . وإذا كانت الحافة e هي الزوج غير المرتب للرأسين u و v فإنه يمكننا ان نكتب $e = [u, v]$ أو $e = [v, u]$. وذلك لاهمال الترتيب . وعندئذ نقول ان كلا من u و v هورأس للحافة e . وان e هي حافة تصل الرأسين u و v .

نستنتج من التعريف الذي اعطيناه للبيان هنا . انه من الممكن ان يحتوي البيان على أكثر من حافة واحدة تصل نفس الرأسين . كما انه من الممكن ان يكون للبيان حافة تصل رأساً بنفسه . يطلق على مثل هذه الحافة لغة (loop) . ويقال أيضاً إن الرأسين u و v متجاوران (adjacent) إذا كان $[u, v]$ حافة . كما نقول عندئذ ان كلا من u و v واقعة على (incident with) الحافة $e = [u, v]$. ونقول أيضاً ان الحافة e واقعة على كل من الرأسين u و v . ويقال للحافتين $e_1 = [u, v]$ و $e_2 = [u, w]$ انهما متجاورتان .

يطلق على الرأس الذي لا يقع على أية حافة رأساً منعزلاً (isolated) .

مثال (1) : لتكن $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مجموعة رؤوس بيان ،
ولتكن

$$E = ([v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_2], [v_1, v_4], [v_2, v_3], [v_2, v_1], [v_2, v_3], [v_4, v_4])$$

عائلة حافته ، عندئذ نجد ان البيان $G = (V, E)$ يتكون من خمسة رؤوس وثمان حافات ، وأن هنالك ثلاث حافات تصل الرأسين v_1 و v_2 ، وان هنالك حافتين تصلان الرأسين v_2 و v_3 . كما نلاحظ أن الرأس v_5 لا يقع على أية حافة، فهو بذلك رأس منعزل . كما أن الحافتين $[v_1, v_2]$ و $[v_1, v_4]$ متجاورتان ، وان الرأسين v_3 و v_4 غير متجاورين .

يقال ان هنالك حافة مضاعفة (multiple edge) بين الرأسين u و v في G اذا كان هنالك اكثر من حافة واحدة تصل u و v ، أي ان $[u, v]$ مكرر اكثر من مرة واحدة في عائلة الحافات $E(G)$. كما يقال لبيان G انه بيان مضاعف (multigraph) اذا احتوى على حافة مضاعفة .

وهكذا ، فان تعريفنا للبيان هو تعريف عام يشمل البيان المضاعف .

يقال لبيان G انه بيان p - اذا كان عدد تكرار كل زوج غير مرتب من رأسين في $E(G)$ لا يزيد على p . فالبيان في المثال (1) هو بيان 3- لان الزوج غير المرتب $[v_1, v_2]$ مكرر ثلاث مرات ، $[v_1, v_3]$ مكرر مرة واحدة ، $[v_1, v_4]$ يظهر مرة واحدة ، $[v_2, v_3]$ يظهر مرتين ، و $[v_4, v_4]$ يظهر مرة واحدة .

يعرف البيان البسيط (simple graph) بانه بيان 1 - خال من اللغات .
فالبيان G ، حيث

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$E(G) = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_1], [v_2, v_4], [v_3, v_4]\},$$

هو بيان بسيط. لاحظ ان لكل بيان بسيط G . تكون $E(G)$ مجموعة لعدم تكرار اي عنصر فيها .

تعرف رتبة (order) بيان G بانها عدد رؤوسه . اي أن رتبة G هي عدد العناصر في مجموعة الرؤوس $V(G)$ عندما تكون منتهية .

يقال ان G بيان منته (finite graph) اذا كان عدد حافته عدداً منتهياً كما يقال انه غير منته (infinite) اذا كانت $E(G)$ عائلة غير منتهية . نستنتج من هذا التعريف انه يمكن ان يحتوي بيان منته على عدد غير منته من الرؤوس .

فالبیان $G = (V, E)$. حيث

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\},$$

$$E = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_3], [v_2, v_2]\},$$

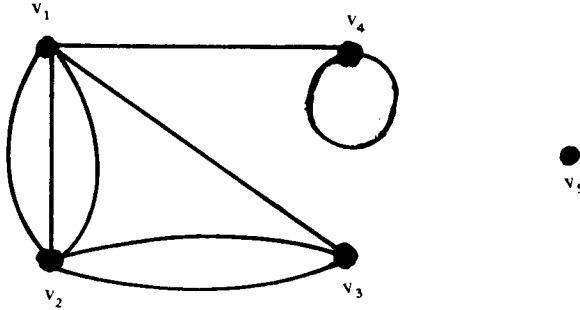
هو بيان منته بالرغم من ان المجموعة V غير منتهية . لاحظ في هذا المثال ان الرؤوس v_4, v_5, \dots هي رؤوس منعزلة . وعلى كل حال . فان الوضع الطبيعي هو ان في كل بيان منته تكون مجموعة رؤوسه منتهية ايضاً . وذلك لان الرؤوس المنعزلة تكون قليلة التأثير في دراسة البيانات . وبما أن معظم دراستنا في هذا الكتاب هي للبيانات المنتهية التي مجموعة رؤوسها منتهية . وعليه سوف نفترض في هذا الكتاب أن كل بيان منته له عدد منته من الرؤوس . الا اذا اشير صراحة الى خلاف ذلك .

ونريد أن نشير هنا الى أنه لا يوجد اتفاق تام على المفاهيم والمصطلحات في نظرية البيانات . فبينما يستعمل بعض المؤلفين العنصرين الاساسين رأس - حافة . يستعمل آخرون نقطة - خط (point - line) . ويستعمل آخرون عقدة - قوس (node - arc) وقد يستعمل احياناً مبسط (0 Simplex) . بدلا من رأس . ومبسط (1 Simplex) بدلاً من حافة . وهكذا الحال لكثير من مفاهيم ومصطلحات نظرية البيانات . ولقد حاولنا في هذا الكتاب اتباع المصطلحات الكثيرة الشيوع والقليلة التعقيد التي تفي بالغرض الذي من أجله وضع هذا الكتاب .

ملاحظة : سوف نفترض ان كافة البيانات التي تعترضنا في هذا الكتاب هي بيانات منتهية الا اذا أشرنا صراحة الى خلاف ذلك .

البيانات التي تكلمنا عليها لحد الآن هي . في الواقع ، بيانات غير موجهة (undirected graphs) . كما تسمى أحياناً . ويظهر سبب هذه التسمية من تمثيل البيانات هندسياً كما مبين فيما يلي .

ليكن $G = (V, E)$ بياناً . لتمثيل G هندسياً في المستوي أو في الفراغ . نعين لكل رأس دائرة صغيرة صلدة وفي اي موقع كفي . وإذا كانت $e = [u, v]$ حافة في G فاننا نصل الدائرة التي تمثل الرأس u مع الدائرة التي تمثل الرأس v بخط متصل بسيط (اي لا يقطع نفسه) مستقيم أو مقوس . وهكذا . فان كل حافة في G تقابل خطأ واحداً وواحداً فقط في التمثيل الهندسي لـ G . لاحظ انه لأهمية لطول الخط أو شكله . وإنما المهم هو وجود أو عدم وجود ذلك الخط بين رأسين معينين . ولتوضيح ذلك رسمنا في شكل (1-1) البيان المعطى في المثال (1)



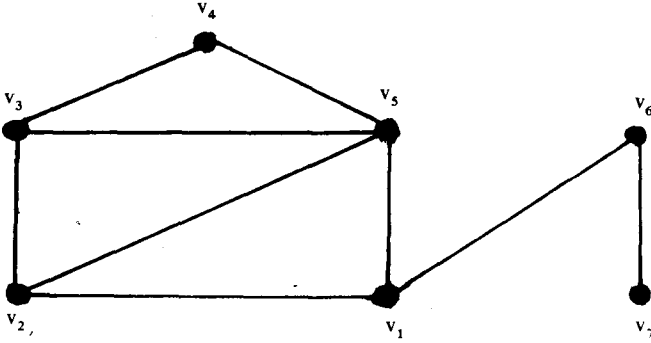
شكل (1-1)

لاحظ ان الخطوط التي تمثل حافات مختلفة يمكن ان تقاطع بعضها في المستوي .

واضح انه يمكن رسم أي بيان اذا أعطيت مجموعة رؤوسه وعائلة حافته . كأزواج غير مرتبة : كما يمكن ايجاد مجموعة الرؤوس وعائلة الحافات اذا اعطي التمثيل الهندسي للبيان . لذلك . فان هنالك تقابلاً بين البيانات وتمثيلاتها الهندسية . عليه . يمكن التعبير عن بيان G اما بذكر عناصر مجموعة رؤوسه وعائلة حافته . أو برسمه هندسياً

بالطريقة التي ذكرناها . وسوف نستخدم أي منهما حسب الحاجة وبالشكل الذي نجده مناسباً لنا .

ان التمثيل الهندسي يوضح في كثير من الاحيان التعاريف والمفاهيم ويفسر براهين بعض القضايا ويساعدنا على فهمها .
مثال (2) : ليكن G البيان المرسوم في شكل (2-1) .



شكل (2-1)

عندئذ يكون

$$V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \},$$

$$E(G) = \{ [v_1, v_2], [v_1, v_5], [v_1, v_6], [v_2, v_3], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], [v_5, v_6], [v_6, v_7] \}.$$

بنظرة واحدة على الرسم نستنتج ان هذا البيان هو بيان بسيط .

تعرف درجة (degree) اي رأس v في بيان G بانها عدد الحافات الواقعة على v . مع احتساب كل لفة مرتين . ويرمز لدرجة v بالرمز $\rho(v)$. فمثلاً . في البيان المعطى في الشكل (1-1) . نجد أن

$$\rho(v_1) = 5, \quad \rho(v_2) = 5, \quad \rho(v_3) = 3, \quad \rho(v_4) = 3, \quad \rho(v_5) = 0.$$

مبرهنة (1-1) : إذا كان $G = (V, E)$ بياناً عدد رؤوسه n وعدد حافته m . فإن مجموع درجات جميع رؤوسه يساوي $2m$. أي أن

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 2m.$$

البرهان : بما أن كل حافة تقع بالضبط على رأسين (مختلفين أو متساويين). فإن كل حافة تساهم بالضبط بـ 2 في مجموع درجات جميع رؤوس G . وبذلك فإن مجموع درجات الرؤوس كلها يساوي ضعف عدد الحافات.

وتوضيحاً لهذه المبرهنة. نلاحظ بالنسبة للبيان في شكل (1-1) أن

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 5 + 5 + 3 + 3 + 0 = 16 = 2(8) = 2m.$$

يطلق على المبرهنة (1-1). التي كانت معروفة لعالم الرياضيات المشهور أولبر (Euler) منذ زمن بعيد، مأخوذة المصافحة (handshaking lemma). وذلك لأنها تعني أنه إذا تصافح عدد من الأشخاص فإن مجموع مصافحات جميع الأيدي لهؤلاء الأشخاص يجب أن يكون عدداً زوجياً. ويعود السبب إلى أن في كل مصافحة تستخدم يداً فقط لشخصين مختلفين.

نتيجة (1-1) : عدد الرؤوس الفردية الدرجة في أي بيان G هو عدد فردي.

يتبع البرهان مباشرة من المبرهنة (1-1) ويترك تمريناً للطالب.

نختم هذا البند بالتعريف المهم الآتي.

يقال أن البيانين

$$G_2 = (V_2, E_2) \text{ و } G_1 = (V_1, E_1)$$

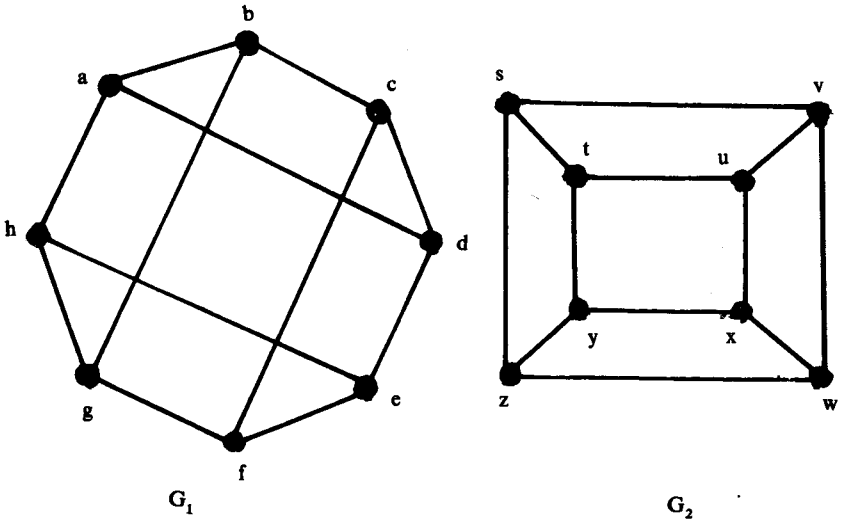
متشاكلان (isomorphic) إذا وجد تقابل متباين بين V_2 و V_1 بحيث أن لكل رأسين v و v' في G_1 يكون عدد الحافات التي تصل v و v' مساوياً لعدد الحافات التي تصل الرأسين v' و v في G_2 المقابلين لـ v و v' على الترتيب.

مثال (3) : تأمل البيانين G_1 و G_2 في شكل (3-1)، تجد أن التقابل الآتي بين $V(G_2)$ و $V(G_1)$

$$a \leftrightarrow s, b \leftrightarrow t, c \leftrightarrow u, d \leftrightarrow v, e \leftrightarrow w, f \leftrightarrow x, g \leftrightarrow y, h \leftrightarrow z$$

يحقق الخاصية: إذا كان الرأسان في G_1 متجاورين، فإن الرأسين المقابلين لهما في G_2 متجاوران أيضاً. ونظراً لأن كل من G_1 و G_2 بيان بسيط، فإن G_1 و G_2 متشاكلان.

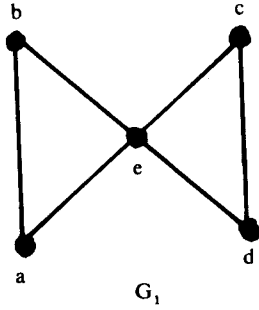
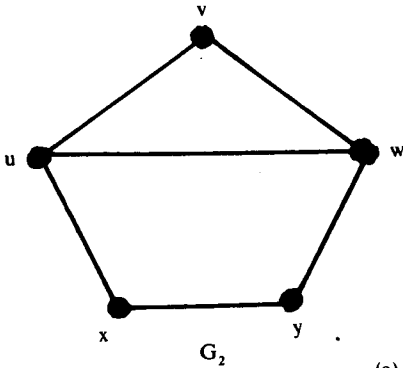
واضح أن علاقة التشاكل على البيانات هي علاقة تكافؤ؛ فكل بيان متشاكل مع نفسه، وإذا كان G_1 متشاكلاً مع G_2 وكان G_2 متشاكلاً مع G_3 فإن G_1 متشاكل مع G_3



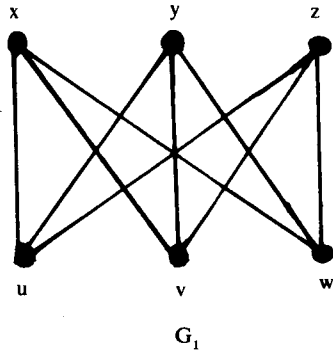
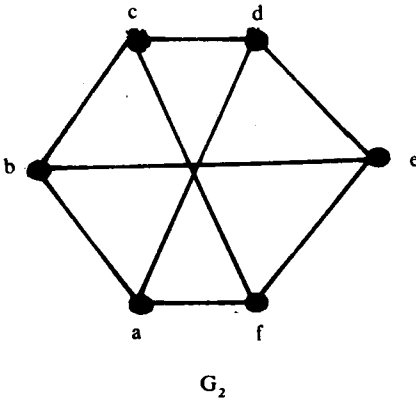
شكل (3-1)

تمارين (1-1)

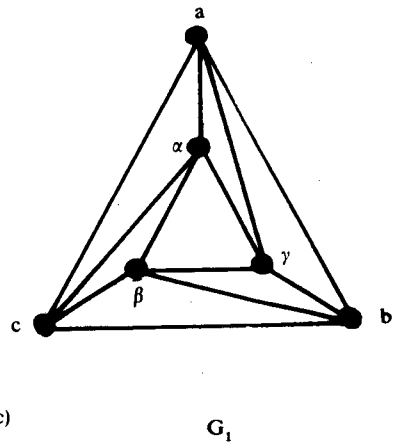
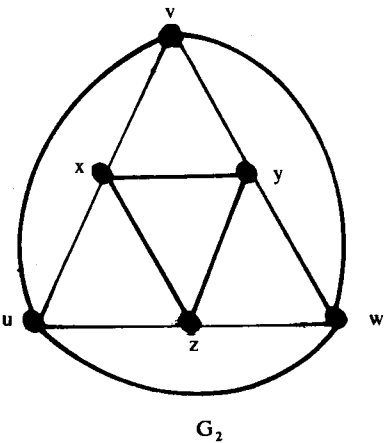
- (1) إثبت نتيجة (1-1).
- (2) هل البيانان G_1 و G_2 المعطيان في كل من (a)، (b)، و (c) في شكل (4-1) متشاكلان أو غير متشاكلين؟ بين ذلك.
- (3) لتكن $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ مجموعة رؤوس بيان G_8 ، فإذا علمت أن الرأسين v_i و v_j متجاوران إذا وإذا فقط $i \equiv j \pmod{3}$ لكل $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ، فجد حافات G وارسمه. وهل أن G بيان بسيط؟ ولماذا؟



(a)



(b)



(c)

شكل (4-1)

(4) لتكن $V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ مجموعة رؤوس بيان بسيط G . فإذا علمت ان $[v_i, v_j]$ حافة في G إذا وإذا فقط كان العددان i و j أوليين مع بعضهما البعض، فجد حافات G وأرسمه.

(5) إثبت ان هنالك بالضبط أربعة بيانات بسيطة، غيرمتشاكله متنى متنى، بثلاثة رؤوس؛ وان هنالك أحد عشر بياناً بسيطاً بأربعة رؤوس.

(6) إذا كان G بياناً بسيطاً برتبة n ، $n \geq 2$ ، فبرهن على أن G يحتوي على رأسين بنفس الدرجة. [تلميح: لأحظ أن $\rho(v) \leq n-1$]

(7) ليكن G بياناً بسيطاً برتبة n . إثبت أن عدد حافات G لايزيد على

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$

(2-1) البيانات الموجهة (Directed Graphs)

يطلق أحيانا على البيانات التي شُرحت في البند السابق بيانات غير موجهة. ولقد اصطَلحنا على تسميتها في هذا الكتاب «بيانات» وذلك لان معظم مواد هذا الكتاب سوف تكون عنها. وقد خصصنا هذا البند لتقديم شرح أولي موجز عن البيانات الموجهة.

يعرف البيان الموجه D . بأنه مجموعة V غير خالية من عناصر تسمى الرؤوس. مع عائلة A من أزواج مرتبة من الرؤوس. يطلق على كل زوج مرتب (u, v) . حيث $u, v \in V$ حافة موجهة (directed edge) أو قوس (arc). ويعبر عن البيان الموجه D كزوج مرتب (V, A) . ويرمز أحيانا لمجموعة رؤوس D بـ $V(D)$. ولعائلة الحافات الموجهة بـ $A(D)$. ويطلق على حافة موجهة (u, u) في بيان موجه D اسم لفة موجهة.

يقال لبيان موجه $D = (V, A)$ أنه بيان موجه p - إذا لم يتكرر أي عنصر من عناصر $V \times V$ أكثر من p من المرات في عائلة الحافات الموجهة A . ويقال لـ D أنه بيان موجه بسيط إذا كان D بياناً موجهاً-1 وليس فيه لفات موجهة.

إذا كانت $e = (u, v)$ حافة موجهة. فانه يطلق على u رأس الابتداء (initial vertex) ويطلق على v رأس الانتهاء (terminal vertex) للحافة الموجهة e . كما نقول أن e تصل من u إلى v . وان كلا من u و v يقع على e .

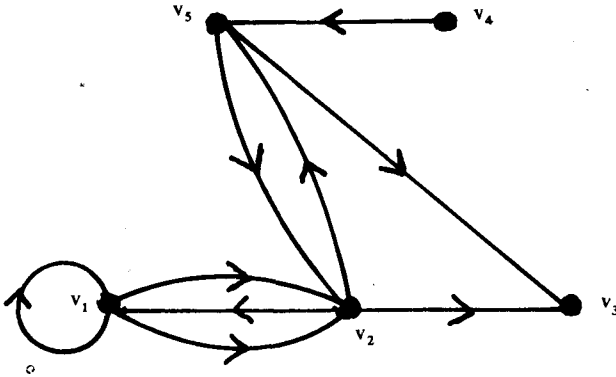
يُمثل اي بيان موجه $D = (V, A)$ هندسياً في المستوي أو في الفراغ برسم دائرة صغيرة صلدة لكل رأس في D ، واذا كانت (u, v) حافة موجهة فيرسم خط بسيط متصل عليه سهم يتجه من الرأس u الى الرأس v .

مثال (1) : تأمل البيان الموجه $D = (V, A)$ ، حيث أن

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$A = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_2), (v_5, v_3)\}$$

لقد رسم التمثيل الهندسي لـ D في شكل (1 - 5) لاحظ ان هذا البيان D هويان موجه 2- ، وأن فيه لفة موجهة عند الرأس v_1 .



شكل (1 - 5)

إذا كان الرأس u هو رأس الابتداء للحافة الموجهة e التي هي ليست لفة موجهة . فإنه يُقال ان e تخرج من الرأس u : وإذا كان v هو رأس الانتهاء لـ e التي هي ليست لفة موجهة . فيقال ان e تدخل الى الرأس v .

إذا كان u رأساً في بيان موجّه D ، فاننا نعرف شبه-الدرجة الخارجية (outer demi-degree) u ، التي يرمز لها $\rho^+(u)$ ، بأنها عدد اللفات المرحوبة الواقعة على u زائداً عدد الحافات الموجّهة الخارجة من u . كما أننا نعرف شبه-الدرجة الداخلية (inner demi-degree) u ، التي يرمز لها $\rho^-(u)$ ، بأنها عدد اللفات الموجّهة الواقعة على u زائداً عدد الحافات الموجّهة الداخلة إلى u . وأخيراً ، نعرف درجة u ، التي يرمز لها $\rho(u)$ ، بـ

$$\rho(u) = \rho^+(u) + \rho^-(u).$$

فمثلاً ، في البيان المعطى في المثال (1) : نجد

$$\rho^+(v_1) = 3 \quad , \quad \rho^-(v_1) = 2 \quad , \quad \rho(v_1) = 5 \quad ;$$

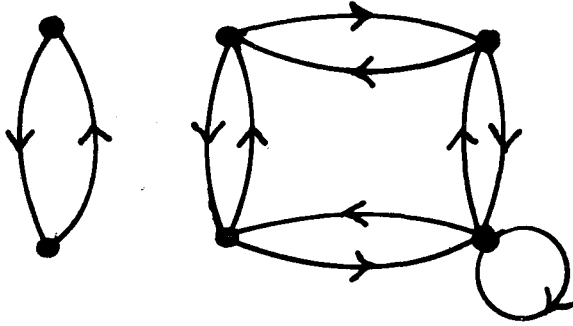
$$\rho^+(v_3) = 0 \quad , \quad \rho^-(v_3) = 2 \quad , \quad \rho(v_3) = 2 \quad .$$

ملاحظة : قد يستنتج القاريء أن هنالك نظرية للبيانات غير الموجّهة . ونظرية للبيانات الموجّهة . هذا في الواقع غير صحيح . فالنتائج للبيانات الموجّهة يمكن ان تطبق على البيانات غير الموجّهة . وذلك بابدال كل حافة غير موجّهة $[u, v]$ بحافتين موجّهتين (u, v) و (v, u) . وبالمثل . النتائج للبيانات غير الموجّهة يمكن ان تطبق على البيانات الموجّهة . وذلك بمجرد إهمال الاتجاه لكل حافة موجّهة ويمكن للقاريء أن يتأكد من صحة ذلك بالنسبة لمفهوم « الدرجة » .

يقال لبيان موجّه D أنه متناظر (symmetric) إذا كان لكل رأسين u و v يكون عدد الحافات الموجّهة من u إلى v مساوياً لعدد الحافات الموجّهة من v إلى u . وعندما يكون $D = (V, A)$ بياناً موجّهاً - 1 . فإنه يكون متناظراً إذا واذا فقط .

$$(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \in A .$$

فالبيان الموجّه المعطى في شكل (1-6) هو بيان موجّه متناظر . أما البيان الموجّه المعطى في شكل (1-5) فهو غير متناظر .

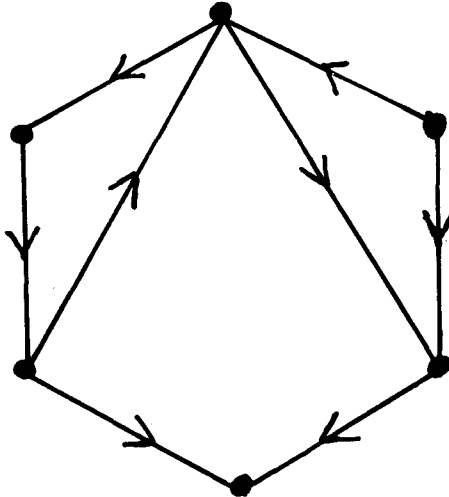


شكل (6-1)

يقال لبيان موجه D انه لاتناظري (anti-symmetric) إذا كان، لكل رأسين u و v ، عدد الحافات الموجهة من u إلى v زائداً عدد الحافات الموجهة من v إلى u لا يزيد على 1. فعندما يكون $D = (V, A)$ بياناً موجهاً-1، فإنه يكون لاتناظرياً إذا وإذا فقط

$$(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \notin A$$

لاحظ ان كل بيان لاتناظري لا يحتوي مطلقاً على لفة موجهة. البيان المعطى في شكل (7-1) هو بيان لاتناظري.

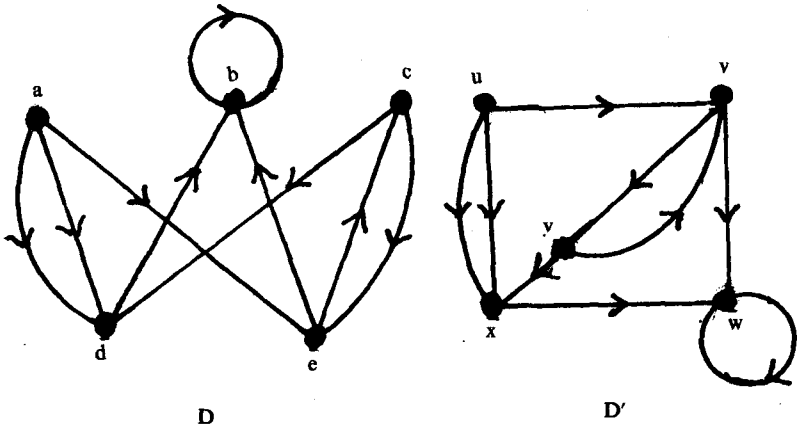


شكل (7-1)

على القاريء أن يلاحظ أن هنالك فرقا كبيرا بين بيان غير متناظر وبيان لاتناظري؛ فكل بيان لاتناظري هو بيان غير متناظر، ولكن العكس غير صحيح.

ليكن $D = (V, A)$ و $D' = (V', A')$ بيانين موجهين. يقال إن D و D' متشاكلان اذا وجد تقابل متباين بين V, V' بحيث ان لكل رأسين v, u في V يكون عدد الحافات الموجهة من u الى v في D مساويا لعدد الحافات الموجهة من u الى v في D' ، وكذلك عدد الحافات الموجهة من v الى u في D مساويا لعدد الحافات الموجهة من v الى u في D' ، حيث أن u يقابل u' و v يقابل v' ، فمثلا، البيانان الموجهان المعطيان في شكل (1-8) متشاكلان وفق التقابل المتباين

$$a \leftrightarrow u, b \leftrightarrow w, c \leftrightarrow y, d \leftrightarrow x, e \leftrightarrow v.$$



شكل (1-8)

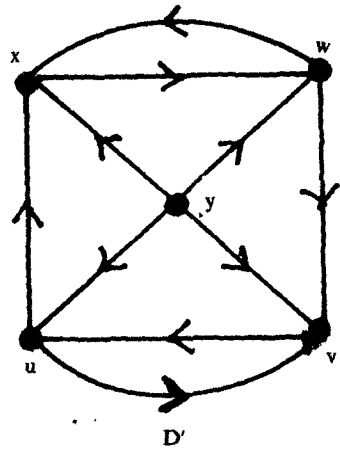
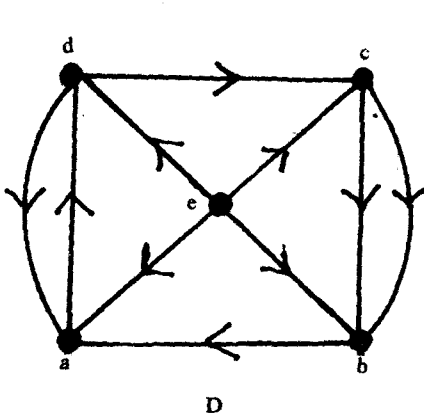
تمارين (1 - 2)

- (1) إعط مثالا لبيان موجه متناظر، وبيان موجه لاتناظري.
- (2) جد شبه- الدرجة الداخلية وشبه- الدرجة الخارجية لكل رأس في البيان الموجه المعطى في شكل (1-6) ماذا تلاحظ؟
- (3) إثبت أن لكل رأس v في بيان موجه متناظر يكون $\rho^+(v) = \rho^-(v)$

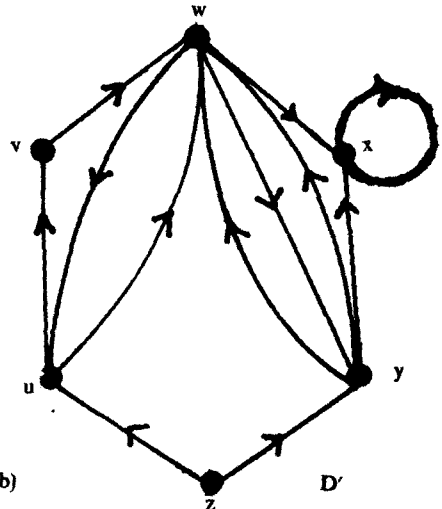
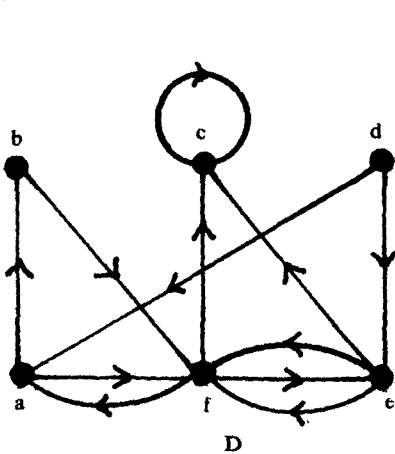
(4) ليكن $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ مجموعة رؤوس بيان موجه بسيط. جد مجموعة حافته الموجهة A اذا علمت أن $(v_i, v_j) \in A$ اذا واذا فقط $i > j$. ارسم (V, A) . ماذا تلاحظ بالنسبة لدرجات رؤوس هذا البيان؟ ماهي الخاصية الاخرى التي يتمتع بها هذا البيان؟

(5) ليكن $D = (V, A)$ بياناً موجهاً عدد حافته الموجهة هو m . اثبت أن

$$\sum_{v \in V} \rho^+(v) = \sum_{v \in V} \rho^-(v) = m.$$



(a)



(b)

شكل (9-1)

(6) بين أكان البيانات الموجهان D, D' المعطيان في كل من (a) ، (b) من شكل (9 - 1) متشاكلين أم لا ؟

(*7) إثبت أن هنالك بالضبط 16 بياناً موجهاً بسيطاً بثلاثة رؤوس غير متشاكله متنى متنى .

(3-1) البيانات الجزئية (Subgraphs)

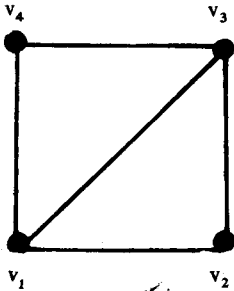
يقال لبيان H انه بيان جزئي من البيان G اذا كانت مجموعة رؤوس H هي مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس G ، وكانت كل حافة في H هي حافة في G .
 و اذا كان H بياناً جزئياً من بيان G ، فاننا نعبر عن ذلك بـ $H \subseteq G$.

البيان التافه (null graph) هو بيان خال من الحافات ،

اي ان عائلة حافته خالية ، ويرمز للبيان التافه المكون

من r من الرؤوس المنعزلة بـ N_r . يعتبر كل بيان تافه N_r بياناً جزئياً لكل بيان ذي رتبته لا تقل عن r . كما أن كل حافة لبيان G تعتبر بحد ذاتها بياناً جزئياً من البيان G .
 وبصورة عامة ، يمكن الحصول على كل البيانات الجزئية المختلفة (أي غير المتشاكله متنى متنى) لبيان G وذلك بايجاد كل العوائل الجزئية المختلفة لـ $E(G)$ ؛ كل عائلة جزئية هي عائلة حافات لبيان جزئي من G .

ينطبق تعريف البيان الجزئي هذا على البيانات الجزئية الموجهة لبيان جزئي موجه .
 فاذا كان D بياناً موجهاً ، وكان H بياناً موجهاً بحيث أن $V(H) \subseteq V(G)$ وأن كل الحافات الموجهة لـ H هي حافات موجهة لـ D ، فعندئذ نقول أن H بيان جزئي موجه من البيان D .



شكل (10-1)

لاحظ ان كل المفاهيم والقضايا التي سوف نذكرها في هذا البند تنطبق (بتعديل بسيط) على البيانات الموجهة .

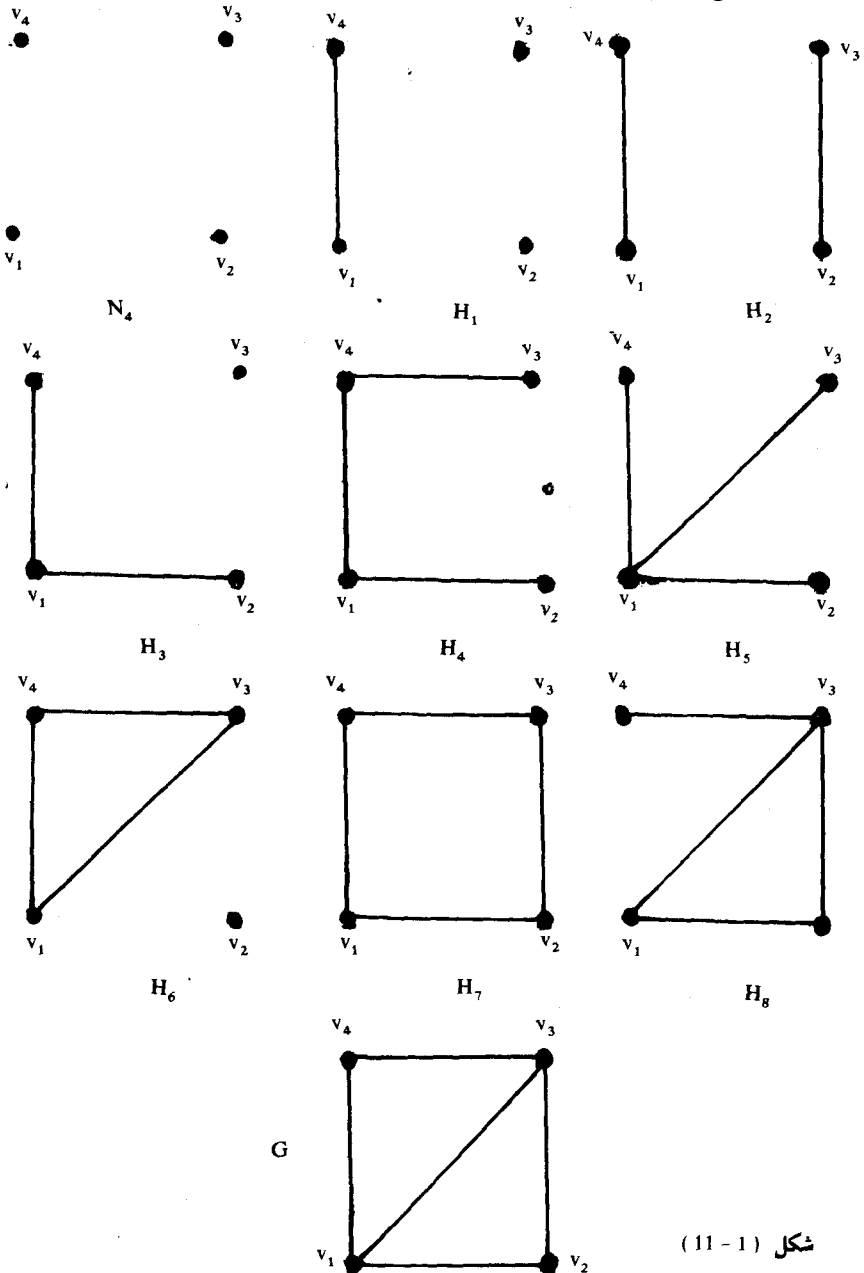
مثال (1) : جد كل البيانات الجزئية المختلفة

(بحدود التشاكل) للبيان الميسن في شكل

(10-1) التي مجموعة رؤوسها هي $V(G)$.

(*) التمارين التي عليها النجمة (*) تعتبر اصعب من غيرها .

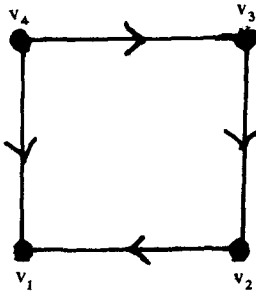
الحل : نأخذ كل المجموعات الجزئية الممكنة من مجموعة الحافات $E(G)$ على أن نهمل تلك التي تؤدي الى بيانات جزئية متشكلة . فنحصل على البيانات الجزئية المبينة في شكل (11 - 1) .



شكل (11 - 1)

واضح أن لدينا 10 بيانات جزئية مختلفة ؛ بالطبع ، كل بيان يعتبر ، حسب التعريف ، بياناً جزئياً من نفسه . إذا أردنا أن نجد كل البيانات الجزئية ومن ضمنها المتشاكلة بعضها مع بعض ، فسوف نحصل على $2^5 = 32$ بياناً جزئياً ، وذلك لان عدد الحافات في البيان المعطى G هو 5 .

مثال (2) : جد كل البيانات الجزئية الموجهة للبيان الجزئي الموجه D المعطى في شكل (1-12) ، التي لها نفس رؤوس D .

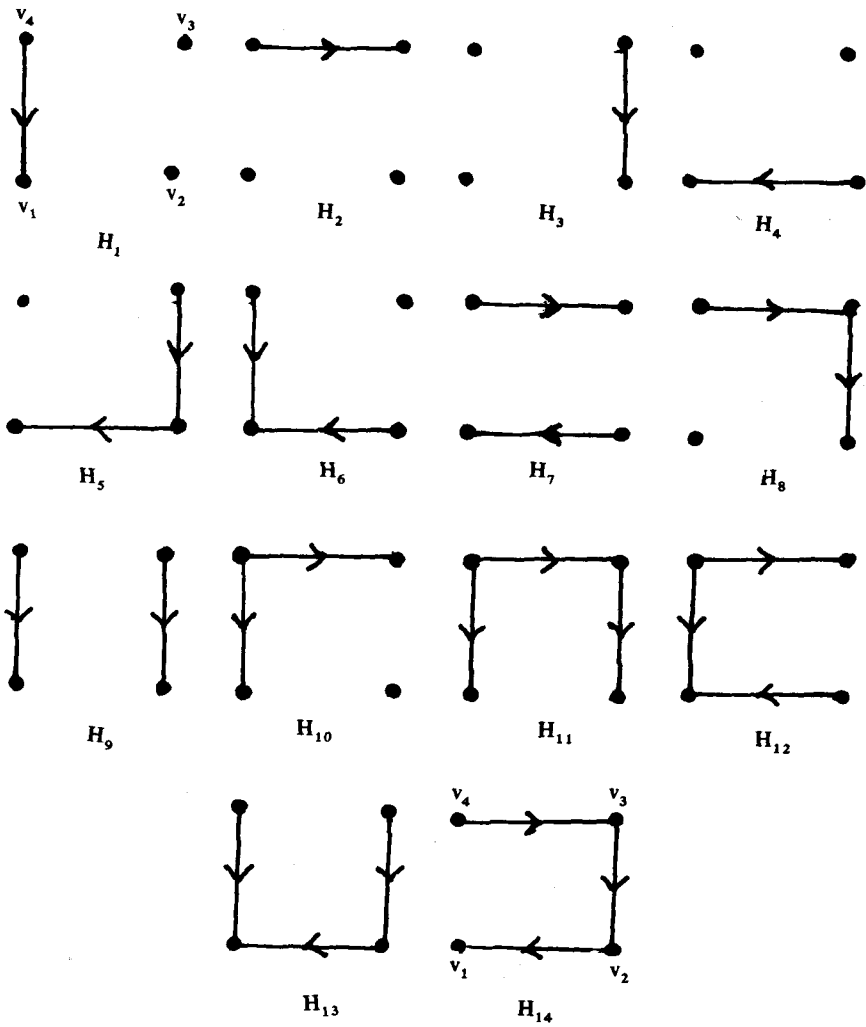


شكل (1-12)

الحل : المطلوب في هذا المثال إيجاد كل البيانات الجزئية من ضمنها المتشاكلة بعضها مع بعض ، لذلك فان لدينا $2^4 = 16$ بياناً جزئياً موجهاً من ضمنها N_4 و D نفسه ؛ وقد رسمت البقية في شكل (1-13) . لاحظ ان H_1, H_2, H_3, H_4 متشاكلة بعضها مع بعض ، كذلك H_5 متشاكل مع H_8 ، و H_7 متشاكل مع H_9 . كم عدد البيانات الجزئية المختلفة في D ؟

من البيانات الجزئية المهمة بخاصة هي البيانات المقطعية (section graphs) التي نعرفها هنا . لتكن W مجموعة جزئية من V ، مجموعة رؤوس بيان G . يعرف البيان المقطعي ، الذي يرمز له $G(W)$ ، على انه البيان الجزئي من G الذي مجموعة رؤوسه W والذي حافته هي كل حافات G التي تصل رأسين في W . وعندما $W = V$ يكون البيان المقطعي هو G نفسه ؛ وعندما تكون $W = \{v\}$ مكونة من رأس واحد فقط ، فان $G(v)$ يتكون من كل اللغات (ان وجدت) عند الرأس v .

ومن البيانات الجزئية الاخرى ، النجمة المعرفة برأس v ، وهي تتكون من كل حافات G الواقعة على الرأس v ، اللغات عند v (ان وجدت) قد تؤخذ أو قد لا تؤخذ .



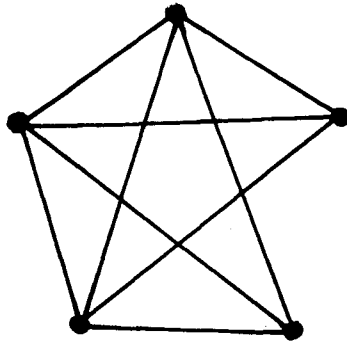
شكل (13-1)

ففي المثال (1) ، البيان الجزئي H_5 المبين في شكل (11-1) هونجمة معرفة بالرأس v_1 ؛ كما أن H_8 في شكل (13-1) هونجمة معرفة بالرأس v_3 للبيان المتجه D المبين في شكل (12-1) .

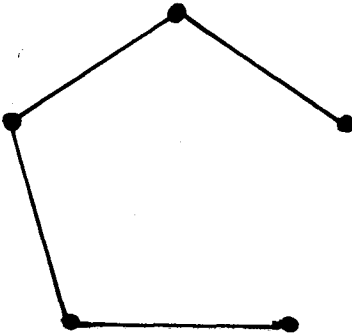
لكل بيان جزئي H من بيان G يوجد بالمقابل بيان جزئي وحيد يطلق عليه البيان الجزئي المتمم لـ H في G (the complementary subgraph of H in G) ويرمز له \bar{H} ، وهو يتكون من رؤوس G مع كل حافات G التي هي ليست حافات في البيان الجزئي H . وسوف نشير إلى البيان الجزئي المتمم لـ H في G بكتابة

$$\bar{H} = G - H.$$

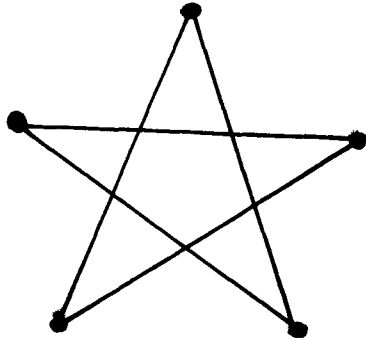
ففي شكل (14-1) أعطي بيان G ، وبيان جزئي H من G مع البيان الجزئي المتمم \bar{H} لـ H في G .



G



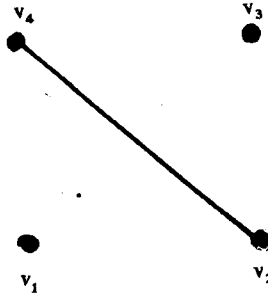
H



$\bar{H} = G - H$

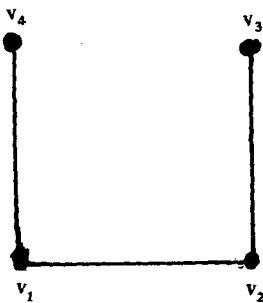
شكل (14-1)

إذا كان G بياناً بسيطاً ، فإننا نعرف متمم G ، الذي يرمز له \bar{G} ، بأنه البيان البسيط الذي رؤوسه $V(G)$ وحافته هي كل الحافات $[u, v]$ ، حيث $u, v \in V(G)$ ، التي هي ليست حافات في G . فمثلاً ، إذا كان \bar{G} هو البيان المعطى في شكل (10-1) فإن متمم \bar{G} هو البيان المعطى في شكل (15-1) .

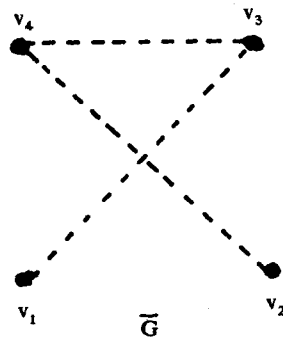


شكل (15-1) : G

يقال لبيان بسيط G انه متمم ذاتي (self-complementary) إذا كان G متشاكلاً مع متمم \bar{G} . فمثلاً ، البيان G المعطى في شكل (16-1) متشاكل مع متمم \bar{G} ، ولذلك فإن G متمم ذاتي .



G



\bar{G}

شكل (16-1)

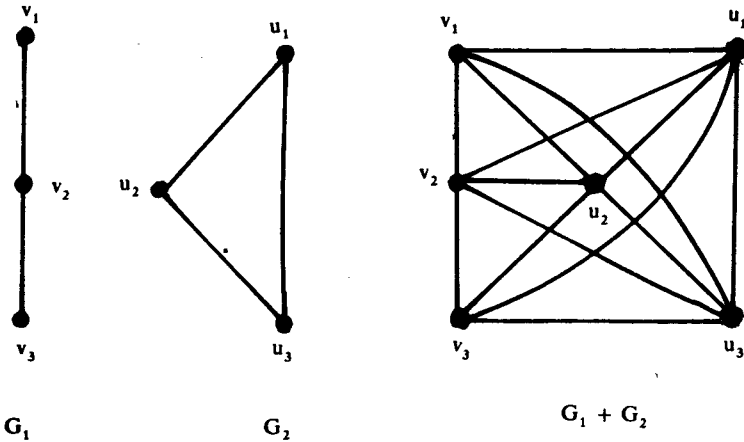
* (4-1) بعض العمليات على البيانات

نذكر في هذا البند بعض العمليات على البيانات .

يقال للبيانين $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ انهما منفصلان (disjoint) اذا كان $V_1 \cap V_2 = \phi$ ، حيث ϕ هي المجموعة الخالية . كما يقال انهما منفصلان بالنسبة للحافات اذا كان $E_1 \cap E_2 = \phi$. واضح انه اذا كان البيانان G_1 و G_2 منفصلين فانهما منفصلان بالنسبة للحافات ، ولكن العكس غير صحيح .

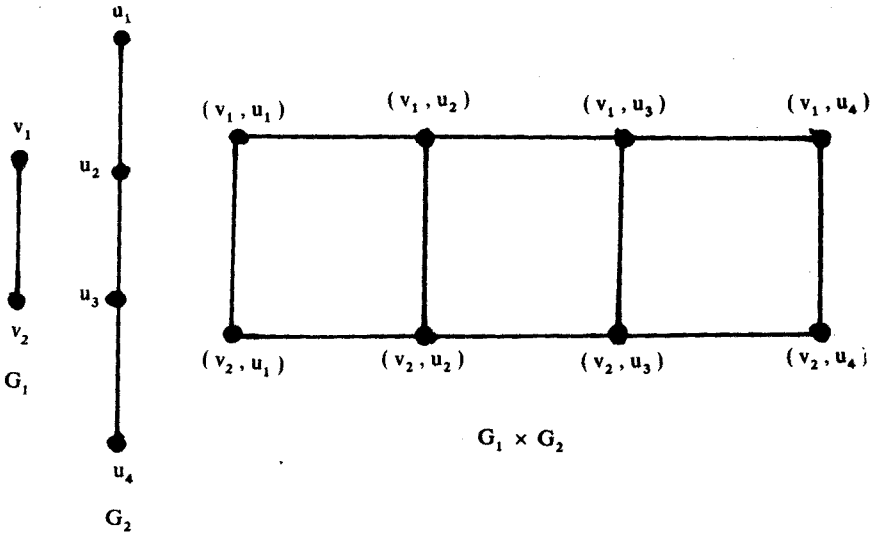
ليكن $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ أي بيانين بسيطين . يعرف اتحاد (union) G_1 و G_2 بأنه البيان $G_1 \cup G_2$ الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \cup V_2$ ومجموعة حافته هي $E_1 \cup E_2$. يمكن تعميم عملية الاتحاد لاي عدد منته من البيانات ؛ فاذا كانت G_1, G_2, \dots, G_k بيانات بسيطة فان اتحادهما هو البيان $\bigcup_{i=1}^k G_i$ الذي مجموعة رؤوسه هي $\bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ ومجموعة حافته هي $\bigcup_{i=1}^k E(G_i)$. واضح أن عملية الاتحاد تحقق خاصيتي التجميع والتبادل .

اذا كان G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين . فان بيان اتصال (join) هذين البيانين هو البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1) \cup V(G_2)$ وحافته هي كافة حافات G_1 و G_2 مع كل الحافات التي تصل رأساً في G_1 مع رأس في G_2 . ويرمز له بـ $G_1 + G_2$. ولهذا يسمى احياناً مجموع G_1 مع G_2 . شكل (17-1) يوضح عملية اتصال بيانين .



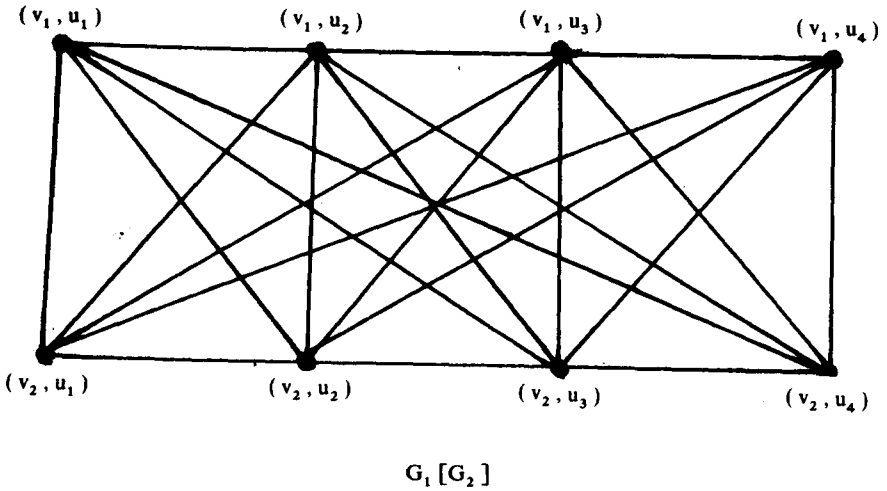
شكل (17-1)

هنالك عمليات ثنائية أخرى عديدة تعرف على بيانين بسيطين منفصلين
 $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ وهي تؤدي الى بيان مجموعة رؤوسه هي
 الحاصل الديكارتي للمجموعتين V_1 و V_2 . من هذه العمليات الضرب والتركيب.
 فيعرف الضرب $G_1 \times G_2$ بأنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \times V_2$ ، ويكون
 الرأسان (v_1, u_1) و (v_2, u_2) متجاورين متى ما كان $[v_1 = v_2 \text{ و } u_1 \text{ متجاوراً مع } u_2]$
 أو $[u_1 = u_2 \text{ و } v_1 \text{ متجاوراً مع } v_2]$ شكل (18-1) يوضح بجلاء هذا التعريف.



شكل (18-1)

واخيراً لنفس البيانين G_1 و G_2 ، نعرف التركيب (the composition)
 $G_1 [G_2]$ بأنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \times V_2$ ويكون فيه الرأسان (v_1, u_1)
 و (v_2, u_2) متجاورين متى ما كان $[v_1 \text{ متجاوراً مع } v_2]$ أو $[v_1 = v_2 \text{ و } u_1 \text{ متجاوراً مع } u_2]$.
 شكل (19-1) يبين التركيب $G_1 [G_2]$ للبيانين G_1 و G_2 المعطيين في شكل (18-1).

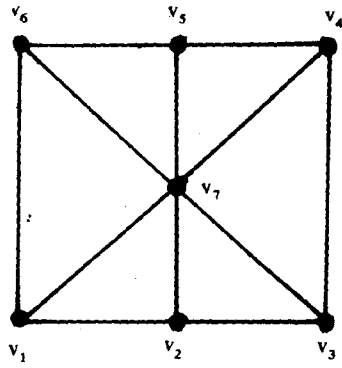


شكل (1 - 19)

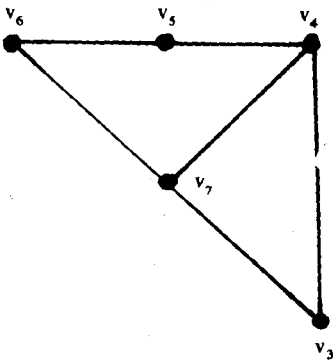
هنالك عملية ثنائية تعرف على البيانات الجزئية لبيان ما . وهي عملية التقاطع (intersection) . فإذا كان H_1 و H_2 بيانين جزئيين من بيان بسيط G . وكان $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \phi$. فإن بيان تقاطعها $H_1 \cap H_2$ هو بيان جزئي من G . مجموعة رؤوسه هي $V(H_1) \cap V(H_2)$ ومجموعه حافته هي $E(H_1) \cap E(H_2)$. طبيعي أنه يمكن تعميم هذه العملية لأي عدد منته من البيانات الجزئية لنفس البيان . فإذا كانت H_1, H_2, \dots, H_k بيانات جزئية من بيان بسيط G . وكان

$$\bigcap_{i=1}^k V(H_i) \neq \phi .$$

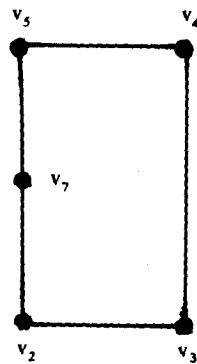
فإن بيان تقاطعها $\bigcap_{i=1}^k H_i$ هو بيان جزئي من G مجموعة رؤوسه $\bigcap_{i=1}^k V(H_i)$ ومجموعة حافته $\bigcap_{i=1}^k E(H_i)$. في شكل (1 - 20) . كل من H_1 و H_2 بيان جزئي من G : ولقد ذكرنا كلاً من $H_1 \cap H_2$ و $H_1 \cup H_2$.



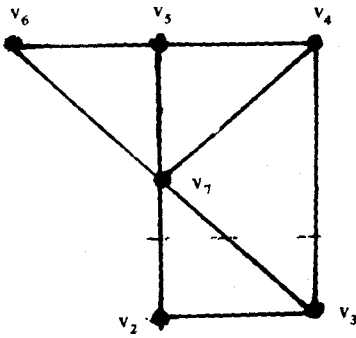
G



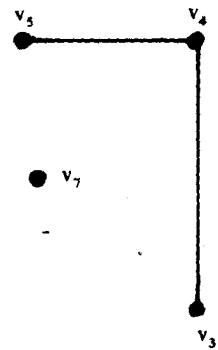
H_1



H_2



$H_1 \cup H_2$

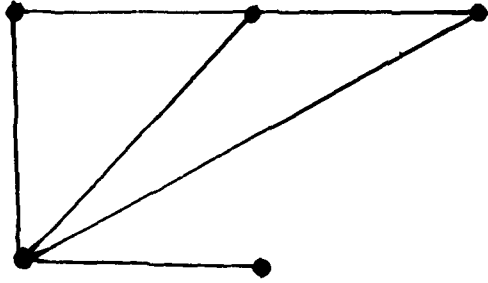


$H_1 \cap H_2$

شکل (1 - 20)

❁ تمارين (3 - 1)

- (1) إرسم كل البيانات البسيطة التي لها أربعة رؤوس (بحدود التماثل).
 (2) جد كل البيانات الجزئية المختلفة بخمسة رؤوس من البيان G المعطى في شكل (21-1)



شكل (1 - 21)

- (3) ليكن H_1 و H_2 بيانين جزئيين من البيان البسيط G . أثبت ان

$$H_1 \cup H_2 = \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 .$$

$$H_1 \cap H_2 = \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 .$$

- (4) ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين. أثبت صواب أو خطأ

$$G_1 + G_2 = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 .$$

- (5) لتكن H_1, H_2 و H_3 ثلاثة بيانات جزئية من البيان البسيط G . فإذا علمت ان

$$V(H_1) \cap V(H_2) \neq \phi, \quad V(H_1) \cap V(H_3) \neq \phi, \quad V(H_2) \cap V(H_3) \neq \phi,$$

فأثبت ان

$$H_1 \cup (H_2 \cap H_3) = (H_1 \cup H_2) \cap (H_1 \cup H_3) .$$

$$H_1 \cap (H_2 \cup H_3) = (H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3).$$

(6) لتكن G_1, G_2, G_3 ثلاثة بيانات بسيطة منفصلة. إثبت صواب أو خطأ

$$G_1 + (G_2 \cup G_3) = (G_1 + G_2) \cup (G_1 + G_3).$$

(7) إثبت ان عدد رؤوس أي بيان متمم- ذاتي هو $4r + 1$ او $4r$ ، حيث أن r عدد صحيح موجب.

(8) هل إن عملية الأتصال تحقق خاصية التبادل؟ خاصية التجميع؟

(9) جد $G_1 \times G_2$ و $G_1 \times G_2$ ، حيث إن G_1 و G_2 هما البيانات المعطيان في شكل (1-17). هل إن $G_1 \times G_2$ و $G_2 \times G_1$ متساويان؟

(10) جد $[G_1]_{G_2}$ ، حيث إن G_1 و G_2 هما البيانات المعطيان في شكل (1-18). هل إن $[G_1]_{G_2}$ و $[G_2]_{G_1}$ متساويان؟

(11) اذا كان G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين، وكان عدد رؤوس G_1 هو n وعدد حافته m_1 ، وعدد رؤوس G_2 هو n_2 وعدد حافته m_2 ، فجد عدد رؤوس وعدد حافات كل من البيانات $[G_2]_{G_1}$ ، $G_1 \cup G_2$ ، $G_1 + G_2$ ، $G_1 \times G_2$.

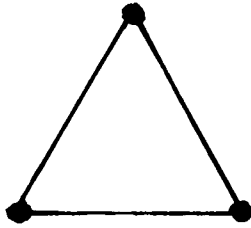
(1-5) بعض البيانات الخاصة

سوف نشرح في هذا المجال العديد من البيانات المهمة والمشهورة التي سوف نتعرض لها في بعض اجزاء الكتاب. لذلك نجد من الضروري ان يتعرف عليها القاري.

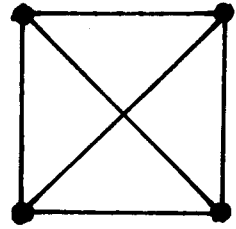
يقال إن البيان G بيان تام (complete graph) اذا كان G بسيطا وكل رأسين مختلفين فيه متجاورين. ويرمز عادة للبيان التام الذي عدد رؤوسه n بـ K_n . البيانات التامة K_n ، حيث $n = 2, 3, 4, 5$. مبيئة في شكل (1-22). واضح ان درجة كل رأس في K_n هي $(n-1)$. ولما كان عدد حافات كل بيان يساوي نصف مجموع درجات رؤوسه [مبرهنة (1-1)]، فان عدد حافات K_n هو $n(n-1)/2$.



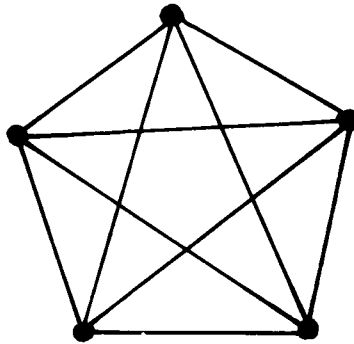
K_2



K_3



K_4



K_5

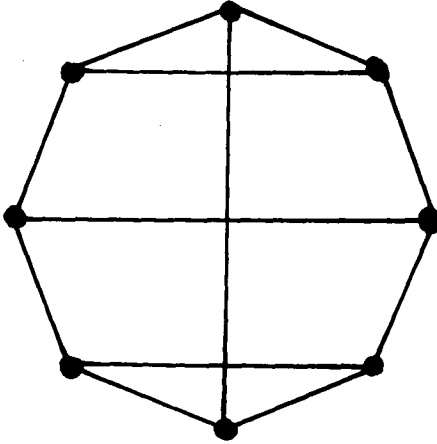
شكل (1 - 22)

يقال ان البيان الموجه D بيان موجه تام اذا كان D بسيطاً وفيه حافتان موجهتان باتجاهين مختلفين بين كل رأسين مختلفين. وبذلك . فان البيان الموجه البسيط يكون تاماً اذا ادى اهمال اتجاهات الحافات وحذف مضاعفاتها الى بيان تام .

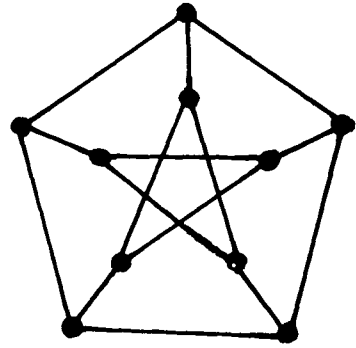
اذا كانت درجة كل رأس v في بيان G هي r . أي أن $\rho(v) = r$. فعندئذ يطلق على G بيان منتظم من الدرجة r . وباختصار منتظم r -regular . واضح ان كل بيان تام K_n هو بيان منتظم من الدرجة $(n-1)$ ؛ وان N_r هو بيان منتظم من الدرجة

صفر. طبيعي ، ان متمم كل بيان منتظم r -بسيط هو بيان منتظم $(n-r-1)$.

من البيانات المنتظمة المهمة، في قضايا التلوين بالاحص، هي البيانات التكعيبية (the cubic graphs) وهي التي تكون درجة كل رأس فيها مساوية لـ 3. ففي شكل (1-23) يوجد بيانان تكعيبيان؛ يعرف البيان في (b) باسم بيان بيترسن (Petersen graph) .



(a)



(b) بيان بيترسن

شكل (1-23)

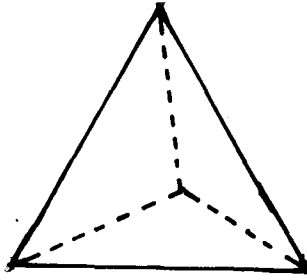
من البيانات المنتظمة المشهورة تلك المعروفة باسم بيانات أفلاطونية (Platonic graphs)، وهي بيانات منتظمة تتكون من رؤوس وحافات الاجسام (الافلاطونية) المنتظمة الخمسة الآتية: رباعي السطوح (أي هرم ثلاثي (tetrahedron) ، مكعب ، ثماني السطوح (octahedron) ، وذو الاثني عشر سطحاً (dodecahedron) ، وذو العشرين سطحاً (icosahedron) ؛ وقد رسمت هذه الاجسام في شكل (1-24) ورسم في شكل (1-25) البيانات الافلاطونية المقابلة لها، على الترتيب .

يعرف البيان الثنائي التجزئة (bipartite graph) بانه بيان $G = (V, E)$ بحيث يمكن تجزئة (*) المجموعة V الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث أن كل

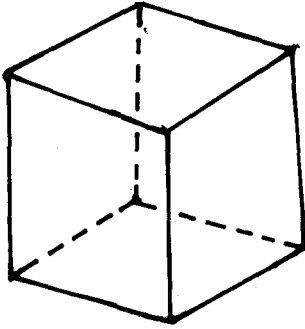
(*) يقال ان V_1, V_2, \dots, V_r تجزئة للمجموعة V اذا كان :

(a) $V_i \neq \phi$; (b) $V_i \cap V_j = \phi, i \neq j$; (c) $V = \cup_{i=1}^r V_i$.

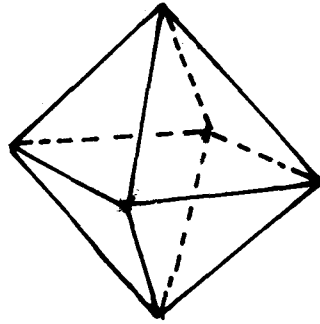
حافة في E تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 . [أنظر شكل (1-26)]. ويمكن أن
 نرمز لهذا البيان الثنائي التجزئة بـ $G = (V_1, V_2; E)$.



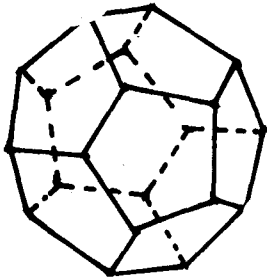
(1) ثلاثي السطوح



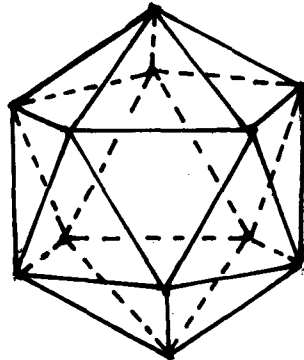
(2) سداسي السطوح



(3) ثماني السطوح

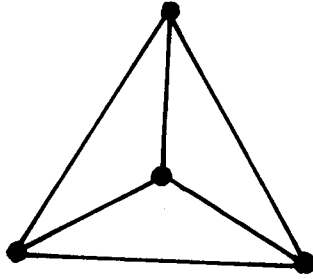


(4) اذواني عشر سطوحاً

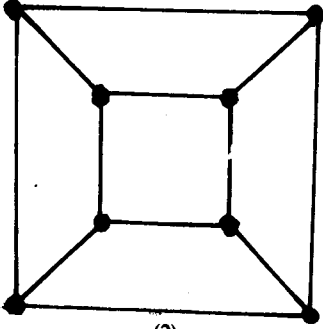


(5) ذوالعشرين سطوحاً

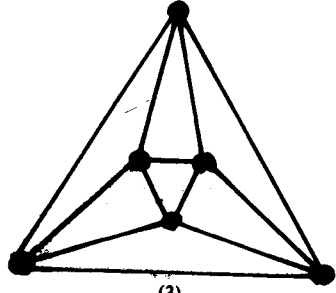
شكل (1-24)



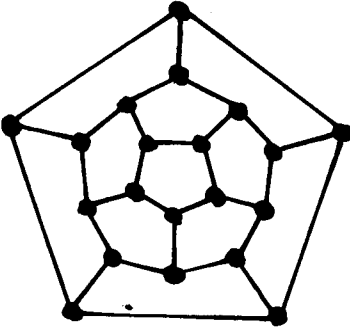
(1)



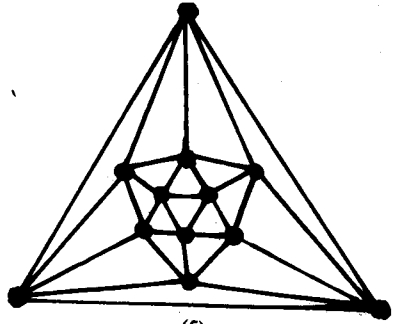
(2)



(3)

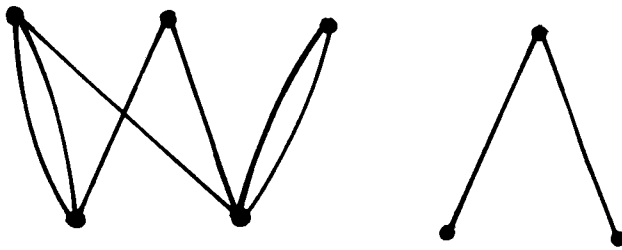


(4)



(5)

شکل (1-25)



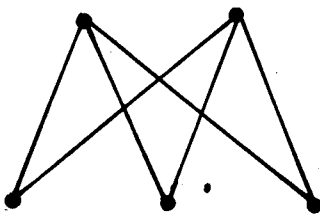
شكل (1 - 26) : بيان ثنائي التجزئة

واضح انه اذا كان G بياناً وكان ممكناً تلوين رؤوسه بلونين ، أحمر أو أزرق ، بحيث لا يوجد رأسان متجاوران لهما نفس اللون ، فعند ذلك يكون G بياناً ثنائي التجزئة .

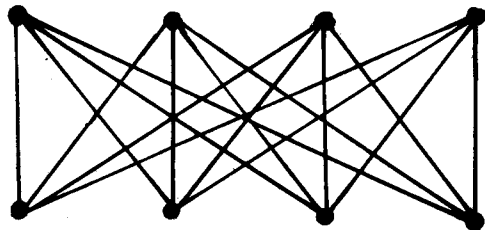
ويقال لبيان بسيط G أنه ثنائي التجزئة تام (complete bipartite) اذا
امكن تجزئة مجموعة رؤوسه \bar{V} الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث ان كل رأس في V_1 متجاور مع كل رأس في V_2 ، وكل رأس في V_2 متجاور مع كل رأس في V_1 ، ولا يوجد رأسان في V_1 (V_2) متجاوران اي أن مجموعة حافات G هي

$$E = \{ [u, v] \mid u \in V_1, v \in V_2 \} .$$

واذا كان عدد الرؤوس في V_1 هو m وفي V_2 هو n فعندئذ يرمز للبيان الثنائي التجزئة التام بـ $K_{m,n}$. فمثلاً ، البيانان $K_{3,2}$ و $K_{4,4}$ مرسومان في شكل (1 - 27) توضيحاً لهذا التعريف .



$K_{3,2}$

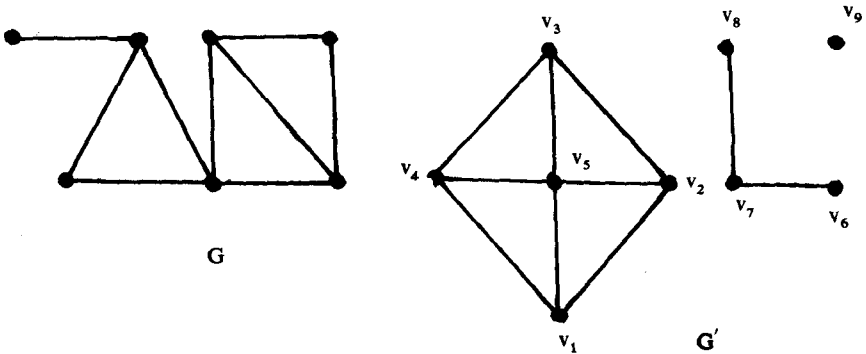


$K_{4,4}$

شكل (1 - 27)

واضح ان كل نجمة بسيطة هي بيان ثنائي التجزئة تام $K_{n,1}$. لاحظ ان عدد رؤوس $K_{m,n}$ هو $m+n$ وعدد حافته هو mn .

يقال لبيان G انه غير متصل (disconnected) اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه الى V_1 و V_2 بحيث لا توجد اية حافة في G تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 . ويقال لبيان انه متصل (*) (connected) فيما عدا ذلك، اي اذا لم يكن بالامكان تجزئة V الى V_1 و V_2 بحيث لا توجد حافة تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 . البيان G في شكل (28-1) هو بيان متصل، ولكن البيان G' غير متصل.

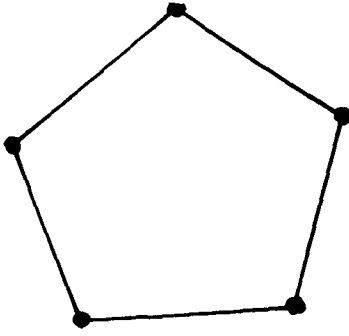


شكل (28-1)

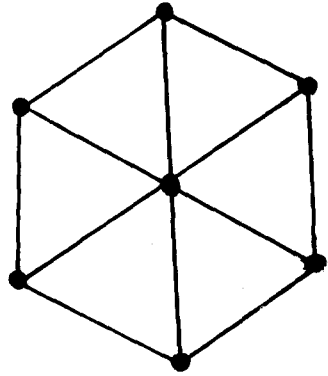
يقال للبيان الجزئي المتصل غير المحتوى فعلياً في اي بيان جزئي متصل آخر من البيان G انه مركبة (component) G . البيان G' في شكل (28-1) يتكون من ثلاث مركبات. طبيعي، اذا كان بيان مكون من مركبة واحدة فهو بيان متصل؛ كما ان كل بيان متصل يتكون من مركبة واحدة.

يقال لبيان متصل انه دائرة (cycle) اذا كان منتظماً ومن الدرجة 2. يرمز للدائرة التي عدد رؤوسها n بالرمز C_n . كما يقال لبيان مكون من n رأساً، حيث $n \geq 3$ ، انه عجلة (wheel). اذا كان مكوناً من الدائرة C_{n-1} مع رأس متجاور مع كل رؤوس C_{n-1} ، ويرمز لهذه العجلة بـ W_n . شكل (29-1) يبين C_5 و W_7 .

(هـ) يمكن تعريف البيان المتصل والبيان غير المتصل باستعمال مفهوم الدرب الذي سوف تأتي الى شرحه في الفصل الثاني.



C_5

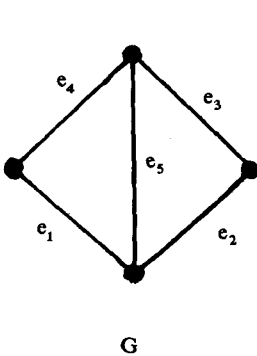


W_7

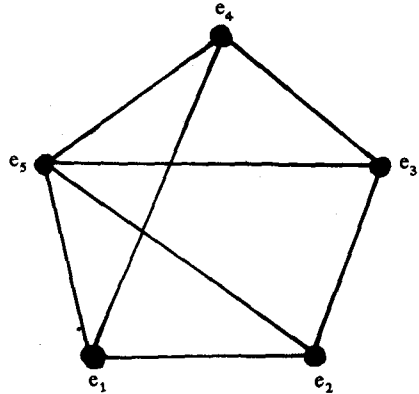
شكل (1 - 29)

يقال لبيان G انه ذو تجزئة k - اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه V الى مجموعات جزئية غير خالية V_1, V_2, \dots, V_k بحيث لا توجد اية حافة في G تصل رأسين في نفس المجموعة الجزئية .

ليكن G بياناً بسيطاً . يعرف البيان المناقلة (interchange) $I(G)$ ، الذي يرمز له بـ $I(G)$ ، بانه البيان الذي عدد عناصر مجموعة رؤوسه يساوي عدد عناصر $E(G)$ ، وعندما يرمز لرؤوسه بالرموز التي تمثل حافات البيان G ، فان رأسين e و e' في $I(G)$ يكونان متجاورين اذا واذا فقط كانت الحافتان e و e' في G متجاورتين . الشكل (1 - 30) يوضح هذا التعريف .



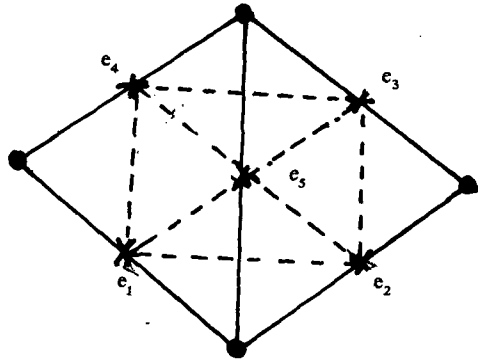
G



$I(G)$

شكل (1 - 30)

يمكن أن نحصل على $I(G)$ بسهولة ؛ وذلك بوضع رأس e ، ممثلاً بعلامة \times على كل حافة e من G ، ثم نصل الرأسين e و e' بحافة تنتمي الى $I(G)$ اذا واذا فقط كانت الحافتان المقابلتان للمقابلتان هما e و e' متجاورتين في G . الشكل (31-1) يوضح هذه الطريقة بالنسبة للبيان G المعطى في شكل (30-1) .



شكل (31-1)

تمارين (4-1)

- (1) اعط مثلاً (مع الرسم) لكل من البيانات الآتية :
 - (أ) بيان بسيط ثنائي التجزئة منتظم من الدرجة 4 .
 - (ب) عجلة بحيث تكون إحدى مركبات بيانها المتمم دائرة .
 - (ج) بيان بسيط متصل منتظم برتبة 7 عدد حافته 14 .
 - (د) بيان بسيط G بحيث يكون متشاكلاً مع $I(G)$.
- (2) برهن على ان اي بيان متصل برتبة n يجب ان يحتوي على ما لا يقل عن $(n-1)$ من الحافات .
- (3) جد بيان المناقلة للبيان K_4 . من أي البيانات الأفلاطونية يكون $I(K_4)$ ؟
- (4) هل يمكن ايجاد بيان G بحيث أن $I(G)$ نجمة ؟
- (5) اثبت ان $I(K_n)$ هويان منتظم بدرجة $(2n-4)$. واثبت ان $I(K_{m,n})$ هويان منتظم بدرجة $(m+n-2)$.
- (6*) ليكن G بياناً بسيطاً برتبة 6 . اثبت ان K_3 بيان جزئي من G او من \bar{G} .
 [تلميح : خذ أي رأس v في G وناقش الحالات $d(v) = 0, 1, 2, \dots, 5$]
 اثبات أن \bar{G} يحتوي K_3 عندما لا يحتوي G على K_3 .

(6 - 1) مصفوفات الوقوع (*) (Incidence Matrices)

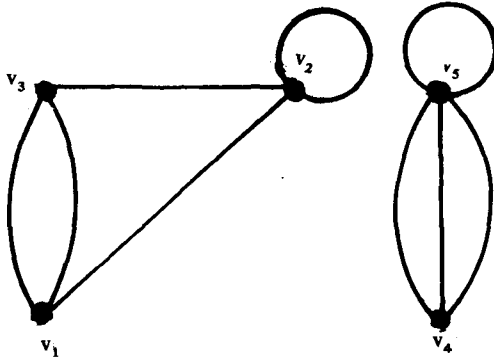
هناك العديد من المصفوفات التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات (الموجهة أو غير الموجهة) أو تمثل بعض البيانات الجزئية لبيان ما . ونشرح في هذا المجال المصفوفات التي تمثل العلاقة الأساسية بين رؤوس بيان ما وحافات ، هذه العلاقة هي علاقة الوقوع ، أي وقوع الرؤوس على الحافات . وسوف نعرض في الفصول القادمة أنواعاً أخرى من المصفوفات ذات الأهمية التطبيقية في نظرية البيانات .

ليكن $G = (V, E)$ بياناً فيه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. تعرف مصفوفة التجاور (adjacency matrix) ، أو مصفوفة الوقوع للرؤوس (vertex incidence matrix) ، بأنها مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ من السعة $n \times n$ فيها a_{ij} مساو لعدد الحافات التي تصل الرأسين v_i و v_j ؛ طبيعي أن a_{ii} يساوي عدد اللغات عند الرأس v_i ؛ وإذا كان الرأسان v_i و v_j غير متجاورين يكون $a_{ij} = 0$. واضح ان A مصفوفة متناظرة .

إذا كان G بياناً بسيطاً ، عندئذ تكون قيمة كل عنصر في مصفوفة تجاوره اما 0 واما 1 ، وتكون عناصر قطره الرئيسي كلها أصفاراً .

وبالمثل ، تعرف مصفوفة التجاور لبيان غير منته ، وعند ذلك تكون مصفوفة غير منتهية السعة .

مثال (1) : اكتب مصفوفة التجاور للبيان المعطى في شكل (32 - 1) .



شكل (32 - 1)

(*) نقترح على الطالب الذي يدرس الموضوع لأول مرة تأجيل قراءة هذا البند لحين الوصول الى البند (3 - 2)

الحل : بموجب التعريف تكون مصفوفة التجاور للبيان المعطى

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن البيان المعطى في شكل (1-32) يتكون من مركبتين ، لذلك فإنه من الطبيعي ان تتجزأ مصفوفة التجاور له قطرياً بحيث ان كل مصفوفة جزئية واقعة على القطر هي مصفوفة التجاور لمركبة واحدة .

طبيعي أن ، كل مصفوفة مربعة متناظرة التي عناصرها اعداد صحيحة غير سالبة هي مصفوفة تجاور لبيان ما ، ويمكن بطريقة مباشرة رسم ذلك البيان . من هذا نستنتج ان هنالك تقابلاً متبايناً بين البيانات (بحدود التشاكل) والمصفوفات المربعة المتناظرة التي عناصرها اعداد صحيحة غير سالبة .

ويمكن تعريف مصفوفة التجاور $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ لبيان موجة D على انه مصفوفة مربعة فيها \bar{a}_{ij} مساو لعدد الحافات الموجهة التي تصل من الرأس v_i الى الرأس v_j في D . طبيعي أنه ، لا يشترط ان يكون \bar{A} متناظراً .

والآن نعرف نوعاً آخرأ من مصفوفات البيانات . ليكن G بياناً بسيطاً مجموعة حافاته هي $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. تُعرف مصفوفة الوقوع لحافات البيان (edge incidence matrix) البسيط G على أنها مصفوفة $M = [m_{ij}]$ مربعة $k \times k$ فيها $m_{ij} = 1$ اذا كانت الحافتان e_i و e_j متجاورتين ، ويكون $m_{ij} = 0$ اذا لم تكن الحافتان e_i و e_j متجاورتين ، $m_{ii} = 0$ لكل $i = 1, 2, \dots, k$. واضح أن هذه المصفوفة متناظرة .

فمثلاً ، مصفوفة الوقوع لحافات البيان المعطى في الشكل (1-30) هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

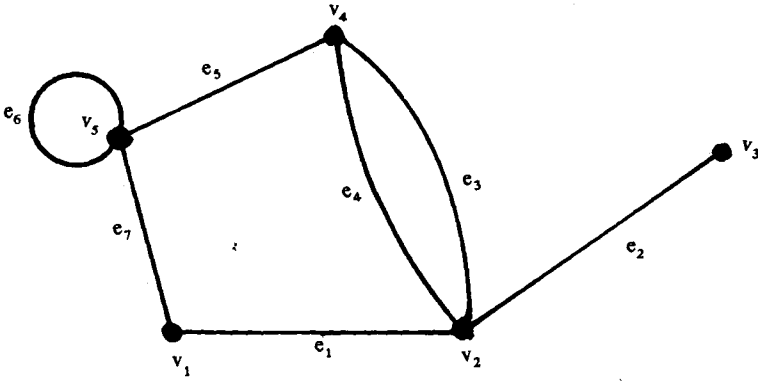
واخيراً ، يمكن تمثيل البيان بنوع اخر من المصفوفات . وهذا النوع من التمثيل له اهمية كبيرة في تطبيقات البيانات في الشبكات الكهربائية كما سنلاحظ في الفصل السادس.

ليكن $G = (V, E)$ ، حيث ان

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad , \quad E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} ,$$

نعرف مصفوفة الوقوع (incidence matrix) للبيان G بانها مصفوفة $B = [b_{ij}]$ بسعة $n \times m$ بحيث إن $b_{ij} = 1$ عندما تكون الحافة e_j واقعة على الرأس v_i و $b_{ii} = 0$ فيما عدا ذلك واضح انه اذا كان G خالياً من اللغات . فان مجموع عناصر أي صف في B يساوي درجة الرأس الذي يقابل ذلك الصف . ومثال على ذلك . تكون مصفوفة الوقوع للبيان G المعطي في الشكل (1 - 33) هي

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

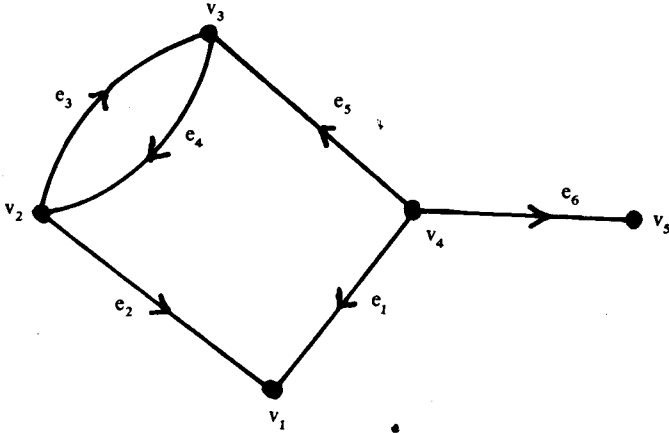


شكل (1 - 33)

لاحظ ان العمود في B الذي يحتوي على عنصر واحد غير صفري يمثل لفة، كما ان العمود الذي يحتوي بالضبط على عنصرين غير صفريين يمثل حافة تصل رأسين مختلفين. ولذلك، يمكن القول بان هنالك تقابلاً متبايناً بين البيانات (بحدود التشاكل) والمصفوفات التي عناصرها 1 أو 0، بحيث ان كل عمود فيها يحتوي على عنصر أو عنصرين بقيمة 1.

وبالمثل، نعرف مصفوفة الوقوع لبيان موجة $D = (V, A)$ خال من اللفات بأنها المصفوفة $B = [b_{ij}]$ بحيث أن $b_{ij} = 1$ عندما يكون رأس v_i الابتدء للحافة الموجهة e_j ، وان $b_{ij} = -1$ عندما يكون رأس الانتهاء للحافة الموجهة e_j ، وأن $b_{ij} = 0$ اذا لم تكن الحافة الموجهة e_j واقعة على الرأس v_i . لاحظ أن كل عمود في B يحتوي بالضبط على عنصرين غير صفريين أحدهما 1 والآخر -1. وتوضيحاً لذلك، تكون مصفوفة الوقوع للبيان الموجه المعطى في الشكل (1 - 34) هي.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



شكل (1 - 34)

مبرهنة (2 - 1): مرتبة مصفوفة الوقوع لبيان موجه متصل خالٍ من اللفات هي $(n - 1)$ حيث أن n هو عدد رؤوس البيان.

البرهان: لاجل اثبات المبرهنة نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي على n .
عندما يكون $n = 2$ تكون مصفوفة الوقوع إحدى المصفوفتين:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

وفقاً لوجود حافة موجهة واحدة او حافتين موجهتين باتجاهين متعاكسين. واضح ان مرتبة كل من هاتين المصفوفتين هي 1. إن وجود حافات موجهة مضاعفة يؤدي الى تكرار بعض الاعمدة. وهذا لايزيد المرتبة. لذلك. فان المبرهنة صحيحة لـ $n = 2$.

والآن. نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان موجه بـ $(n - 1)$. $n \geq 3$ من الرؤوس وخالٍ من اللفات. وتأمل المصفوفة \bar{B} لبيان موجه متصل بدون لفات. D . له n من الرؤوس. يمكن ترتيب أسطر \bar{B} . دون التأثير في مرتبة المصفوفة. بحيث يصبح العنصر في السطر الاول والعمود الاول هو 1. وفي السطر الأخير والعمود الاول هو -1 .

إن إضافة كل أسطر \bar{B} ، من الاول الى ما قبل الأخير، الى السطر الاخير يؤدي الى سطر عناصره اصفار، لذلك، فإن مرتبة \bar{B} لا تزيد على $(n - 1)$

لتكن \bar{B}_1 هي المصفوفة الناتجة من \bar{B} بإضافة السطر الاول الى السطر الاخير. واضح ان العمود الاول في \bar{B}_1 يتكون من اصفار عدا العنصر الاول الذي قيمته هي 1. إن مرتبة \bar{B}_1 هي نفس مرتبة \bar{B} . لتكن \bar{B}_2 المصفوفة الناتجة من \bar{B}_1 . بحذف السطر الاول وكل الاعمدة الصفرية الناتجة بعد حذف السطر الاول. واضح أن \bar{B}_2 هي مصفوفة الوقوع لبيان موجه D_1 ناتج من D بتطابق الرأسين المقابلين للسطرين الاول والاخير في \bar{B} ، مع حذف كل لفة ناتجة من هذا التطابق. واضح أن D_1 هوبيان موجه متصل خالٍ من اللفات عدد رؤوسه $(n - 1)$. ولذلك تكون مرتبة \bar{B}_2 هي $(n - 2)$ بموجب فرض الاستقراء الرياضي. وعليه، فإن \bar{B}_2 يحتوي على $(n - 2)$ من الأسطر المستقلة خطياً. وبذلك فإن \bar{B}_1 يحتوي على $(n - 1)$ من الاسطر المستقلة خطياً، لأن السطر الأول لا يعتمد على بقية الاسطر (لماذا؟). اذاً مرتبة \bar{B}_1 لا تقل عن $(n - 1)$ وهكذا فإن مرتبة \bar{B} لا تقل عن $(n - 1)$ من ذلك نستنتج أن مرتبة \bar{B} هي $(n - 1)$ وهكذا، بموجب مبدأ الاستقراء الرياضي ، فإن المبرهنة صحيحة.

نتيجة $(2 - 1)$: اذا كانت \bar{B} مصفوفة الوقوع لبيان موجه خالٍ من اللفات مكون من n المركبات و n من الرؤوس، فإن مرتبة \bar{B} هي $n - p$.
يترك البرهان تمريناً للطالب.

تمارين (5 - 1)

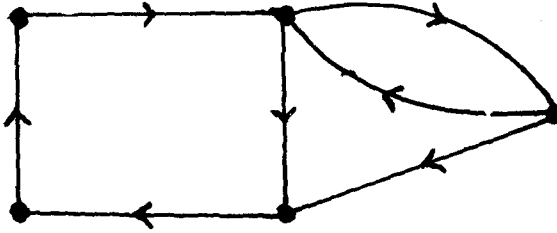
- (1) جد مصفوفة التجاور لكل من البيانات المبينة في الاشكال
 $(29 - 1)$, $(33 - 1)$, $(34 - 1)$.
- (2) جد مصفوفة التجاور للبيان $I(G)$ المبين في شكل $(30 - 1)$. وقارن جوابك بمصفوفة الوقوع لحافات G التي اعطيت في الشرح. هل إن مصفوفة الوقوع لحافات أي بيان بسيط G هي مصفوفة التجاور لبيان المناقلة $I(G)$ ؟
- (3) جد مصفوفة الوقوع لحافات البيان التام K_4 .
- (4) جد مصفوفة الوقوع لكل من البيانات K_4 . المكعب $K_{3,2}$.
- (5) جد مصفوفة الوقوع للبيان الموجه المبين في شكل $(35 - 1)$.

(6) لتكن \bar{B} مصفوفة الوقوع لبيان موجه بسيط D . ولتكن

$$\bar{B} \bar{B}' = M = [m_{ij}] .$$

حيث أن \bar{B}' هي مبدول (أو منقول) المصفوفة \bar{B} . إثبت أن m_{ii} تساوي درجة الرأس v_j وأن m_{ij} ، $i \neq j$ ، تساوي - (عدد الحافات الموجهة التي تصل الرأسين v_j, v_i)

(7) إثبت نتيجة (2-1) .

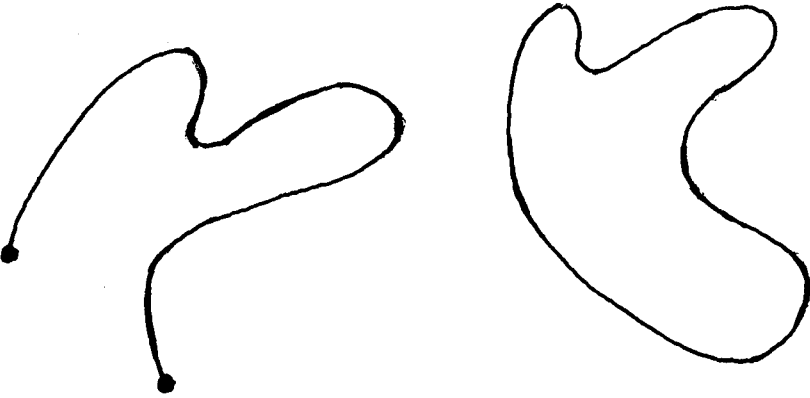


شكل (1-35)

(7-1) غمر البيانات (Embeddings of Graphs)

لقد سبق أن ذكرنا أنه يمكن تمثيل أي بيان برسم شكل يتكون من دوائر صلبة صغيرة تقابل الرؤوس وخطوط أو منحنيات تقابل الحافات ، ووجدنا أن هذه الأشكال مفيدة جداً في توضيح العديد من مفاهيم البيانات . وقد يسأل القارئ عن المقصود بتمثيل البيان برسم أو بشكل ، وهل أن ذلك التمثيل يصح لكل بيان وفي أي فضاء هندسي ؟ للإجابة عن ذلك نبدأ بأعطاء تعاريف لبعض المفاهيم ثم نعرف المقصود بـ غمر بيان مافي فضاء هندسي معين .

يُعرف منحني جوردن المفتوح (open Jordan curve) في المستوي أو الفضاء الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة (أو على سطح جسم مائل الكرة أو الطرة) على أنه منحنٍ مستمر في السطح لا يقطع نفسه يصل بين نقطتين مختلفتين تسميان نهايتي المنحني . وبالمثل يعرف منحني جوردن المغلق (closed Jordan curve) على أنه منحنٍ جورداني نهايتاه متطابقتان [انظر شكل (1-36)] .



(أ) منحنٍ جوردياني مفتوح

(ب) منحنٍ جوردياني مغلق

شكل (1 - 36)

بصورة عامة . الفضاء S الذي سوف نتكلم عليه فيما يأتي من شرح هو ذلك الفضاء الذي يمكن ان نعرف عليه منحنياً جورديانياً (مفتوحاً أو مغلقاً) . وسوف نركز بالاهتمام على المستوى الاقليدي والفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد . لانهما الفضاءان اللذان نؤكد هما هنا .

ليكن c_1 و c_2 منحنين جوردينيين مفتوحين في فضاء S . يقال أن c_1 و c_2 متقاطعان (crossing) اذا وجدت نقطة في S مشتركة بينهما وهي ليست نهاية ل احدهما أو لكليهما . وسوف نستعمل نفس هذا المعنى للتقاطع عندما نتكلم على تقاطع حافتين لبيان ما .

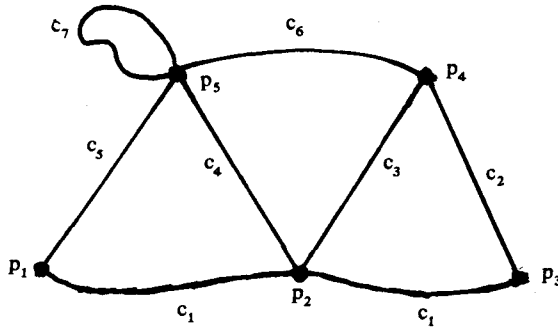
يعرف البيان الهندسي (geometric graph) في فضاء S على أنه مجموعة من نقاط P مع مجموعة C من المنحنيات الجورديانية التي تحقق الشروط الآتية :

(أ) يحتوي كل منحنٍ جوردياني مفتوح في C على نقطتين فقط من P . وهاتان النقطتان هما نهايتاه .

(ب) يحتوي كل منحنٍ جوردياني مغلق في C على نقطة واحدة فقط من P .

(ج) كل نقطة مشتركة بين منحنين أو أكثر في C هي نقطة في P .

فمثلاً ، الرسم في شكل (1-37) ليس بياناً هندسياً لأن المنحني الجورداني المفتوح c_1 يحتوي على ثلاث نقاط من المجموعة $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ ، مما يناقض الشرط (أ) .



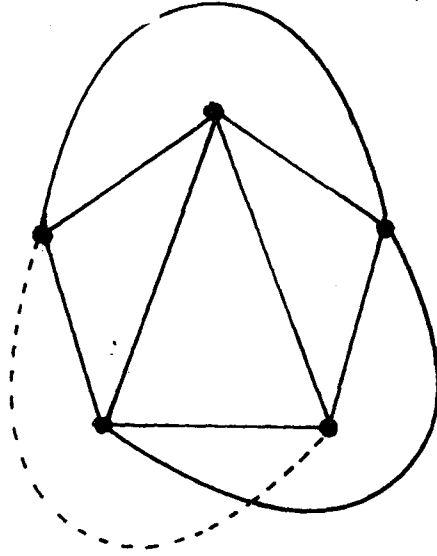
شكل (1-37)

نحن الآن مهوون لشرح المقصود بالتعبير « غمريان في فضاء » . يقال انه يمكن غمريان G في فضاء S (او ان G مغمور في S) اذا كان G متشاكلا مع بيان هندسي H في S ، أي يوجد تقابل متباين بين مجموعة رؤوس G ومجموعة نهايات المنحنيات في H ، بحيث ان لكل رأسين v_1 و v_2 في G ، اذا كان

$$v_1 \leftrightarrow p_1 \quad , \quad v_2 \leftrightarrow p_2$$

فان عدد الحافات التي تصل الرأسين v_1 و v_2 في G يساوي عدد المنحنيات الجوردانية التي نهايتها كل منها p_1 و p_2 .

اذا كان G بياناً مغموراً في المستوي ، فانه يمكن تمثيل G هندسياً في المستوي بحيث لا يوجد تقاطع بين اية حافتين في نقطة ليست رأساً لاحدى (أو كلتا) الحافتين وعند ذلك نقول لهذا البيان انه بيان مستوي (planar graph) وسوف نشرح هذا النوع من البيانات في الفصل الرابع . فمثلاً ، البيان K_4 هو بيان مستوي ، ولكن البيان K_5 غير مستوي [انظر شكل (1-38)] . في الواقع ، لا يمكن غمر K_5 في المستوي ، ان هذه نتيجة غير تافهة وسوف يجد لها القارئ برهاناً في الفصل الرابع .



شكل (1-38)

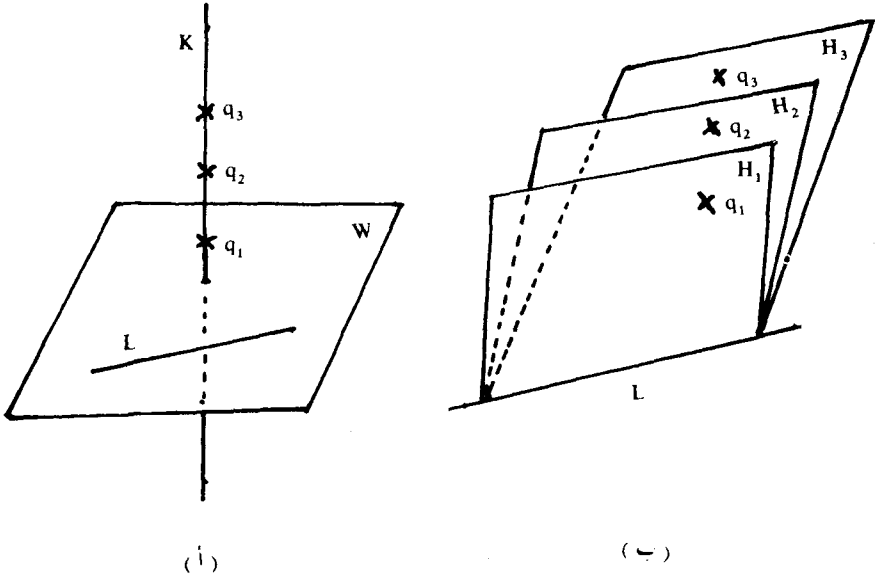
مما تقدم نستنتج أن هنالك بيانات لا يمكن غمرها في المستوي . وقد يتوارد الى ذهن القارئ السؤال الآتي : هل توجد بيانات لا يمكن غمرها في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ؟ نجيب عن هذا السؤال في المبرهنة الاساسية الآتية .

مبرهنة (3-1) : كل بيان منته يمكن غمره في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 المبرهنة التالية أشمل من هذه المبرهنة .

مبرهنة (4-1) : يمكن غمر أي بيان غير منته $G = (V, E)$ في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 ، اذا واذا فقط وجد تقابل متباين بين V ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية ، وكذلك وجود تقابل متباين بين E ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية .

سنعطي البرهان للمبرهنة (4-1) وهو يشمل اثبات المبرهنة (3-1) .

❖ البرهان : ليكن L أي مستقيم في الفضاء الاقليدي R^3 . لما كان هنالك تقابل متباين بين $V = \{v_i : i \in \Lambda\}$ ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية . فان هنالك تقابلاً متبايناً بين V وبعض نقاط L ولنفرض أن $v_i \leftrightarrow P_i$ لكل $i \in \Lambda$ حيث أن P_i نقطة على L وان Λ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة . ليكن W أي مستوي يمر بالمستقيم L . وليكن K مستقيماً عمودياً على W ولكنه لا يقطع L . لما كان هنالك تقابل بين E ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية . فان هنالك تقابلاً متبايناً بين $E = \{e_i : i \in \Lambda\}$ وبعض نقاط المستقيم K ولنفرض أن $e_i \leftrightarrow q_i$ لكل $i \in \Lambda$ حيث أن q_i نقطة على K [انظر شكل (1 - 39 (أ)] . لكل q_i هنالك نصف - مستوي واحد فقط . نرمله H_i . يمر بالنقطة q_i والمستقيم L الذي يحده [انظر شكل (1 - 39 (ب)] . وبذلك فان هنالك تقابلاً متبايناً بين E ومجموعة أنصاف المستويات المختلفة $\{H_i : i \in \Lambda\}$.



شكل (1 - 39)

إذا كان v_i و v_k رأسى الحافة c_i فاننا نرسم منحنيًا جورديانيًا c_k يصل النقطتين P_k و P_i في المستوي H_i ولا يمر بآية نقطة أخرى من نقاط L . إذا كان $v_k \neq v_i$ فانه يمكننا ان نرسم c_k كنصف دائرة قطرها قطعة المستقيم $P_i P_k$. وإذا كان $v_k = v_i$ نأخذ c_k دائرة في H_i تماس L عند النقطة P_i . واضح انه أصبح لدينا الآن تقابل متباين بين E ومجموعة المنحنيات الجوردانية $\{c_i : i \in \Lambda\}$. من طريقة انشاء هذه المنحنيات

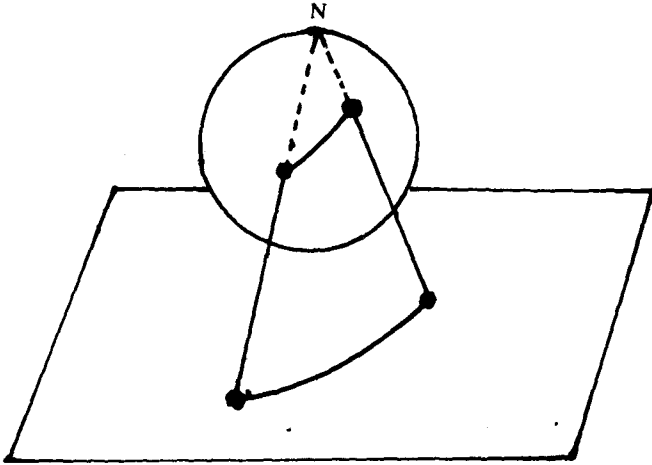
نستنتج أن مجموعة النقاط $\{P_i : i \in \Lambda\}$ مع مجموعة المنحنيات $\{c_i : i \in \Lambda\}$ تكون بياناً هندسياً H في الفضاء الاقليدي R^3 ، وأن H متشاكل مع البيان G . وبذلك، فإنه يمكن غمر G في الفضاء R^3 .

وهكذا، فإنه يمكن رسم أي بيان يحقق شروط المبرهنة (1-4) في الفضاء الاقليدي R^3 بدون ان يكون هنالك تقاطع بين أية حافتين منه في نقطة ليست رأساً لأحدى أوكلتا الحافتين.

إذا تأملنا سطح كرة، فإنه يمكننا أن نلاحظ أن البيان الذي يمكن غمره في المستوي يمكن غمره أيضاً في سطح كرة، وبالعكس، كل بيان مغمور في سطح كرة هو بيان مستوي. كما هو مثبت في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (1-5): يكون البيان G مستويًا إذا وإذا فقط أمكن غمره في سطح كرة.

البرهان: لنفرض أن G بيان مغمور في سطح كرة. نضع تلك الكرة على سطح افقي بحيث لا يقع قطبها الشمالي N (أي النقطة على سطح الكرة التي تقابل تماماً نقطة تماسها مع المستوي باعتباره أخذ أفقياً) على أية حافة من G . وطبيعي إنه ليس رأساً في G . كما هو موضح في الشكل.

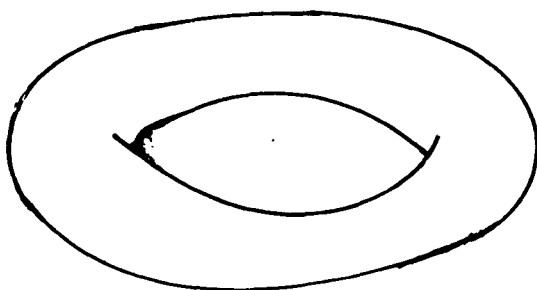


شكل (1) (40)

نحصل على تمثيل G في المستوي باتباع إسقاط إستريوغرافي (stereographic projection) مركزه نقطة N . فنصل كل نقطة من نقاط حافات G . المرسوم على سطح الكرة. بالنقطة N بمستقيم نمده حتى يلتقي مع المستوي. فنحصل من نقاط التلاقي هذه على إسقاط G على المستوي. نظراً لعدم وجود تقاطع بين أية حافتين من حافات G المرسوم على سطح الكرة. فإنه لا يوجد تقاطع بين أية حافتين في مسقطه على المستوي. لأن هذا الإسقاط هو في الحقيقة تقابل متباين. لذلك فإن G بيان مستوي.

إذا كان G بياناً مستوياً. أي مغموراً في المستوي. فإننا نتبع الإسقاط نفسه المذكور آنفاً للحصول على تمثيل G على سطح كرة. وذلك بوصل كل نقطة من حافات G بمستقيم إلى نقطة N . مركز الإسقاط. وتكون نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع سطح الكرة تمثيلاً G على سطح الكرة دون ان يكون هنالك تقاطع بين أية حافتين. وبذلك يمكن غمر G في سطح كرة. ■

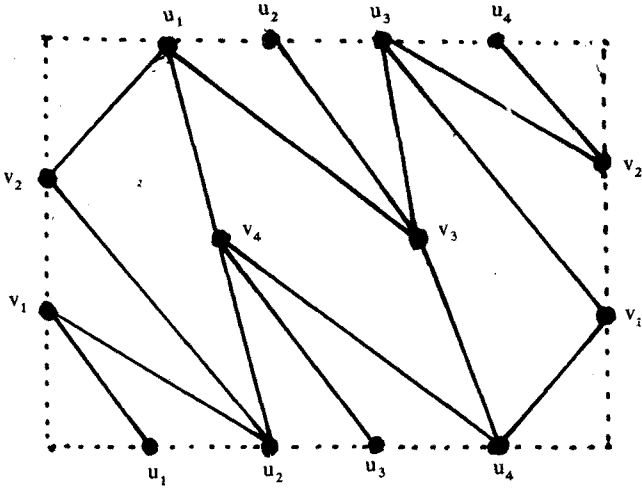
من البرهنة السابقة نستنتج أنه لا يمكن غمر البيانات غير المستوية في سطح كرة. ولكن هل يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية في سطوح أخرى. كسطح الطرة (torus) [إنظر شكل (1 41)]. مثلاً؛ نعم. يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية على سطوح أخرى غير سطح الكرة. فمثلاً. يمكن غمر البيانات غير المستوية $K_{4,4}$ و $K_{3,3}$ و K_6 و K_5 على سطح الطرة.



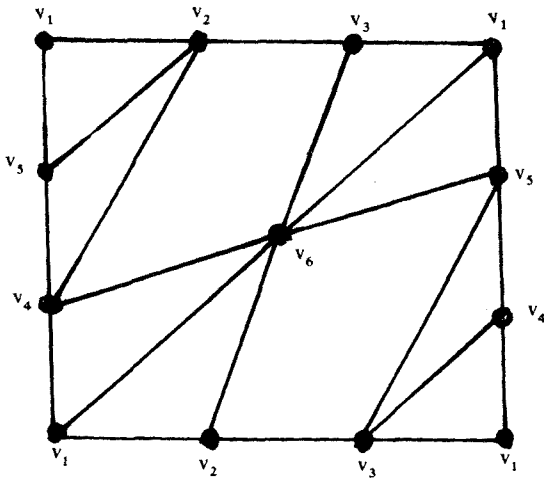
شكل (1 41) : طرة

لاحظ انه يمكن الحصول على سطح طرة من مستطيل بانطباع كل ضلعين فيه. وبلاستفادة من هذه الفكرة. فقد رسمنا $K_{4,4}$ و $K_{6,6}$ على سطح طرة في شكل (1 42). ففي رسم $K_{4,4}$. أخذنا مجموعة الرؤوس مجزأة إلى المجموعتين v_1, v_2, v_3, v_4 و

{ u_1, u_2, u_3, u_4 } وللتعرف على المزيد من النتائج في هذا الموضوع يمكن للقارئ الاطلاع على المصدر. [6]



(ب) غمر $K_{4,4}$ في سطح طرة



(أ) غمر K_6 في سطح طرة

شكل (1 - 42)

تمارين (1-6)

- (1) إثبت ان كل بيان جزئي من بيان مستوي يكون مستويًا.
- (2) إذ كر كل قيم m و n بحيث يكون البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ مستويًا.
- (3) إثبت بالرسم أنه يمكن غمر كل من البيانات K_3, K_5, K_7 في سطح طرة.
- (4) يعرف عدد التقاطع (the crossing number) لبيان G بأنه أصغر عدد من التقاطعات للحافات [لاحظ بأنه لايسمح بتقاطع أكثر من حافتين في نقطة واحدة] عندما يرسم G في المستوي . ويرمز لهذا العدد بـ $\nu(G)$.
واضح أن $\nu(G) = 0$ اذا واذا فقط كان G بياناً مستويًا .
جد $\nu(K_5), \nu(K_{3,3}), \nu(K_6)$.

الفصل الثاني —

الدروب والدارات

Chairs and Cycles

بعد أن أعطينا العديد من المفاهيم عن البيانات وذكرنا الكثير من انواع البيانات . يمكننا أن ندرس خصائص البيانات . ولكن . سنلاحظ اننا كلما شرحنا موضوعاً جديداً نحتاج الى تقديم المزيد من التعاريف للمصطلحات التي سوف تصادفنا لأول مرة . وكما سبق ان أشرنا في بداية الفصل الاول . فانه لا يوجد اتفاق تام على المصطلحات التي سوف نذكرها في هذا الفصل .

(2 - 1) تعاريف : المسارات والدارات والدروب :

نذكر في هذا المجال المزيد من المفاهيم الأساسية لنظرية البيانات . ليكن $G = (V, E)$ بياناً . يقال ان W مسار (walk) من الرأس v_0 الى الرأس v_n في البيان G اذا كان W متابعه متناوبة من رؤوس وحافات بالصيغة

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n).$$

بحيث أن كل حافة تقع على الرأس يسبقها مباشرة والرأس الذي يليها مباشرة في هذه المتابعة . يطلق على v_0 الرأس الابتدائي (initial vertex) . ويطلق على v_n الرأس النهائي (terminal vertex) . كما يقال لعدد الحافات للمسار W .

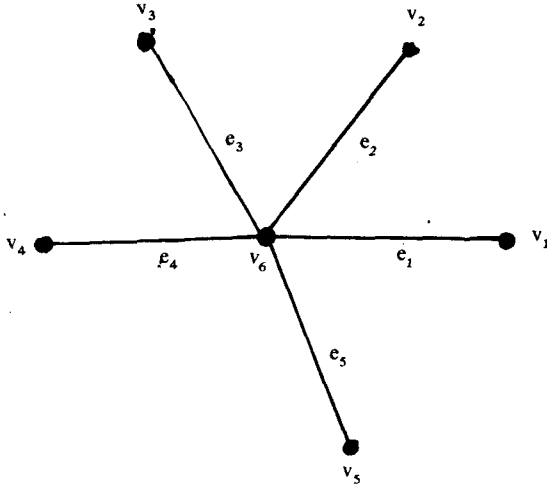
n . طول المسار . واضح ان كل حافتين متتاليتين في المسار W تكونان متجاورتين أو متطابقتين . ومع ذلك . فان هذه الخاصية ليست كافية لجعل متتابعة من حافات مساراً . فمثلاً . المتابعة e_1, e_2, e_3, e_4 من النجمة الميئة في شكل (2 - 1) هي ليست مساراً بالرغم من أن كل حافتين متتاليتين متجاورتين (لماذا؟) . ولكن المتابعة $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4$ من الحافات تكون مساراً من v_1 الى v_4 . وذلك لانه يمكن وضع

هذه المتابعة من الحافات بالصيغة

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_2, e_2, v_2, e_3, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4).$$

واضح أن في تعريف المسار لا يشترط عدم تكرار الحافات . وبالطبع . لا يشترط عدم

تكرار الرؤوس .



شكل (1-2)

- يقال لمسار W انه مفتوح اذا كان $v_0 \neq v_n$ ويقال انه مغلق اذا كان $v_0 = v_n$
- حيث أن v_0 هو الرأس الابتدائي وان v_n هو الرأس النهائي للمسار W

يقال ان P درب (chain) من الرأس v_0 الى الرأس v_n في بيان G اذا كان مساراً من v_0 الى v_n .

$$(v_0 \cdot e_1 \cdot v_1 \cdot e_2 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot e_n \cdot v_n)$$

وكانت حافته مختلفة. طول الدرب هو عدد حافته. لاحظ انه قد تكون بعض رؤوس P متكررة. أي لا يشترط اختلاف الرؤوس. ولكن اذا كانت الرؤوس v_0, v_1, \dots, v_n كلها مختلفة. فعندئذ يقال إن P درب بسيط (simple chain).

يقال لدرب P من v_0 الى v_n إنه دائرة (cycle) اذا كان $v_0 = v_n$. كما يقال لدائرة إنها بسيطة اذا كانت كافة رؤوسها مختلفة. أي كانت بالصيغة.

$$(v_0 \cdot e_1 \cdot v_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_n \cdot v_0)$$

حيث إن الرؤوس v_0, v_1, \dots, v_{n-1} كلها مختلفة.

ملاحظة: لاجل السهولة والتبسيط سوف نكتب المسارات والدروب والدارات كمتابعات لحافاتها فقط على ان نتقيد بالترتيب اللازم للحافات والرؤوس بموجب التعاريف مبتدئين من الرأس الابتدائي ومنتهمين بالرأس النهائي. كما مبين في المثال

الآتي.

مثال 1 : تأمل البيان في شكل (2-2) ، تجد أن

$$W_1 = (e_1, e_5, e_6, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7)$$

مسار مفتوح من الرأس v_1 الى الرأس v_5 ؛ وأن

$$W_2 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_5, e_{10}, e_{13})$$

هو مسار مغلق من الرأس v_1 الى الرأس v_1 .

$$P_1 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_7) ,$$

وان كلاً من

$$P_2 = (e_1, e_{10}, e_{12}, e_8)$$

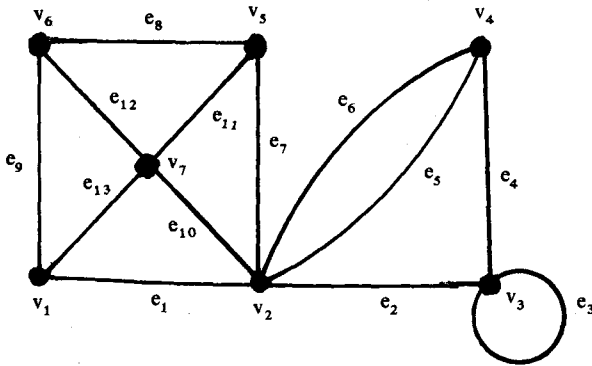
هو درب من v_1 الى v_5 ، واضح أن P_2 بسيط وأن P_1 غير بسيط كما ان كلاً من

$$C_1 = (e_1, e_7, e_8, e_9) ,$$

$$C_2 = (e_2, e_4, e_6) ,$$

$$C_3 = (e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9)$$

دائرة ، وأن C_1 و C_2 دارتان بسيطتان ، أما C_3 فهي دائرة غير بسيطة وهي في هذه الحالة مكونة من اتحاد الدارتين البسيطتين C_1 و C_2 . وهذه حقيقة صادقة دائماً ، فكل دائرة غير بسيطة هي اتحاد دارات بسيطات لا توجد بين أية اثنتين منها حافة مشتركة [انظر تمرين (4) من مجموعة تمارين (1-2)] .



شكل (2-2)

يمكن تعريف المسار الموجه (المفتوح أو المغلق) ، الدرب الموجه ، والدائرة الموجهة في بيان موجه D بطريقة مشابهة لتعاريف هذه المفاهيم في بيان غير موجه G ، بشرط أخذ الاتجاه للحافات بنظر الاعتبار . ولذلك ، يعرف المسار الموجه في D بأنه متتابعة متناوبة من رؤوس وحافات موجهة بالصيغة

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n),$$

بحيث ان كل حافة موجهة من الرأس الذي يسبقها الى الرأس الذي يليها مباشرة ، اي أن v_{i-1} هو الرأس الابتدائي وان v_i هو الرأس النهائي للحافة الموجهة e_i . وعندما يكون $v_0 \neq v_n$ يكون المسار الموجه مفتوحاً ، وعندما يكون $v_0 = v_n$ يكون المسار الموجه مغلقاً . واذا كانت كل الحافات الموجهة مختلفة فانه يسمى درب موجه (path) . بشرط أن يكون $v_0 \neq v_n$ ، اما اذا كان $v_0 = v_n$ فعندئذ يصبح دائرة موجهة (directed cycle) أو دورة (circuit)

ويعرف الدرب الموجه البسيط بأنه درب موجه كافة رؤوسه مختلفة ، كما أن الدائرة الموجهة البسيطة هي دائرة موجهة كافة رؤوسها مختلفة .

اذا لم يكن هنالك أي التباس ، فسوف نمثل المسارات والدوائر والدروب الموجهة كمتتابعات للحافات الموجهة فقط بدون ذكر الرؤوس لانها تكون مفهومة نصاً من الحافات الموجهة .

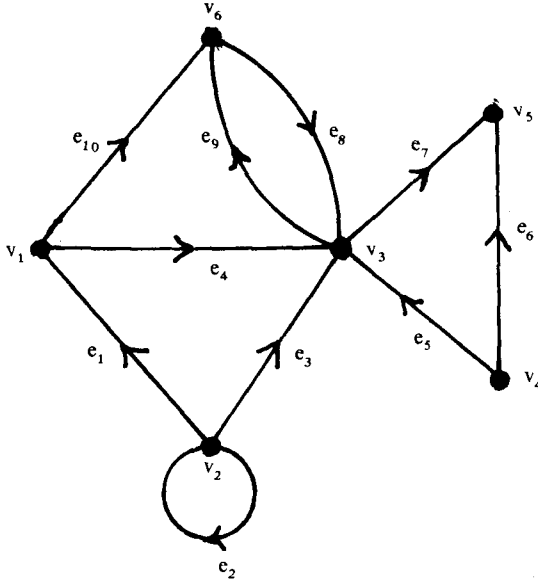
مثال (2) : تأمل البيان الموجه المعطى في شكل (2-3) ، تجد أن

$$(e_4, e_9, e_8, e_7)$$

درب موجه من الرأس v_1 الى الرأس v_5 ، وان

$$(e_{10}, e_8, e_7)$$

هو درب موجه بسيط من v_1 الى v_5 ؛ كما أن (e_8, e_9) هي دائرة موجهة بسيطة . بالطبع اللفة e_2 هي دائرة موجهة بسيطة . لاحظ أنه لا يوجد درب موجه من v_5 الى أي رأس ، كما لا يوجد أي درب موجه من أي رأس الى الرأس v_4



شكل (2-3)

(2-2) الاتصال* (Connectedness)

لقد سبق ان عرفنا في البند (1-5) البيان المتصل . وهنا نعطي تعريفاً آخر مكافئاً باستخدام مفهوم الدرب .

يقال لبيان G انه متصل اذا واذا فقط وجد درب واحد على الاقل بين كل رأسين في G . ويقال ان \overline{G} غير متصل اذا احتوى على رأسين لا يوجد بينهما أي درب .

هذا التعريف اكثر فائدة من التعريف السابق . وبالطبع . التعريفان متكافئان [انظر التمرين (1) من مجموعة تمارين (2-1)] .

يقال لرأسين v و u في بيان G انهما متصلان اذا وجد درب من أحدهما الى الآخر . اذا اعتبرنا أن كل رأس متصل مع نفسه . فاننا نجد أن علاقة الاتصال هذه هي علاقة تكافؤ . لانه اذا كان الرأسان u و v متصلين . وكان الرأسان v و w متصلين . فانه يوجد درب من u الى v . ودرب من v الى w . وبذلك يوجد درب من u الى w . وعليه فان u و w متصلان .

إذا كان $G = (V, E)$. فان مجموعة كل الرؤوس في V المتصلة مع بعضها تكون مع الحافات الواقعة عليها مركبة لـ G . وبذلك . فان علاقة الاتصال على V تجزيء G الى مركباته . بالطبع . هذه التجزئة وحيدة .

المبرهنة الآتية تبين لنا أنه في حالة احتواء البيان غير المتصل على رأسين فقط بدرجة فردية . فيجب ان يكون هذان الرأسان متصلين . وبذلك يجب أن يقعا في نفس المركبة .

مبرهنة (1-2): ليكن G بياناً بسيطاً محتوياً على رأسين فقط ، u و v . بدرجة فردية . عندئذ يكون الرأسان u و v متصلين .

البرهان : لما كان كل بيان (متصل أو غير متصل) يحتوي على عدد زوجي من الرؤوس ذات الدرجة الفردية [راجع نتيجة (1-1)] . فان الرأسين u و v يقعا في مركبة واحدة لـ G . وبذلك . فان هنالك درباً من u الى v . اذاً ، الرأسان u و v متصلان .

المبرهنة الثانية تزودنا بعلاقة بين عدد رؤوس اي بيان جزئي من بيان متصل G مع عدد مركبات متممة في G .

مبرهنة (2-2) : ليكن G بياناً متصلاً ، وليكن H بياناً جزئياً من G . عندئذ يكون عدد مركبات البيان الجزئي المتمم \bar{H} للبيان الجزئي H في G لا يزيد على عدد رؤوس H .

البرهان : اذا كان \bar{H} متصلاً ، فان المبرهنة صحيحة . والآن نفرض أن C_1 و C_2 مركبتين في \bar{H} . وليكن v_1 رأساً في C_1 ، و v_2 رأساً في C_2 . لما كان هنالك درب P في G بين v_1 و v_2 ، وأنه لا يوجد في \bar{H} درب بين v_1 و v_2 ، فان هنالك في هذا الدرب P حافة e_1 موجودة في H وواقعة على رأس في C_1 ، وكذلك توجد حافة e_2 في P موجودة في H وواقعة على رأس في C_2 ، قد يكون $e_1 = e_2$. وبذلك ، فان في كل من C_1 و C_2 رأس واحد على الاقل من H . من هذا نستنتج ان كل مركبة في \bar{H} تحتوي على رأس واحد على الاقل من H . وبذلك عدد مركبات \bar{H} لا يزيد على عدد رؤوس H .

في المبرهنة الثالثة نستخرج قيماً أعلى لعدد حافات أي بيان بسيط منته بدلالة عدد رؤوسه وعدد مركباته .

مبرهنة (3-2) : ليكن G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد حافته m وعد مركباته k . عندئذ يكون

$$m \leq \frac{1}{2} (n - k)(n - k + 1).$$

البرهان : لتكن H_1, H_2, \dots, H_k مركبات G . وان n_1, n_2, \dots, n_k عدد رؤوسها . على الترتيب . بما ان عدد حافات اي بيان بسيط متصل برتبة r لا يزيد على $\frac{1}{2} r(r-1)$. فان عدد حافات H_i لا يزيد على $\frac{1}{2} n_i(n_i - 1)$ وبذلك . فان عدد حافات G لا يزيد على

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i(n_i - 1)$$

اذا اخذنا بيانين تامين K_s و K_t . بحيث ان $s \geq t > 1$. وازلنا من K_t رأساً مع الحافات الواقعة عليه واضفناه الى K_s ثم وصلناه بحافة مع كل من رؤوس K_s . نحصل على K_{s+1} و K_{t-1} . وبهذه العملية زاد عدد الحافات بـ $(s - t + 1)$ بدون ان يتغير مجموع الرؤوس في البيانين . وبتكرار هذه العملية نحصل على K_{t+1} و K_{s-1} . وتوصل الى نتيجة وهي أن مجموع عدد الحافات فسي K_{t+1} و K_{s-1} يزيد على مجموع عدد الحافات في K_s و K_t .

واضح انه يمكن تطبيق هذه العملية في حالة وجود k من البيانات التامة بحيث نحصل اخيراً على $k-1$ من الرؤوس المعزولة مع بيان تام واجد برتبة $(n-k+1)$. حيث ان n مجموع الرؤوس في كل تلك البيانات التامة . وبعدد من الحافات يزيد على عدد الحافات الاصلية .
 مما تقدم نستنتج ان :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i(n_i - 1) \leq \frac{1}{2} (n - k)(n - k + 1)$$

وبذلك يتم البرهان . ■

المبرهنة الرابعة تزودنا بالعدد اللازم من الحافات لكي يصبح البيان متصلاً .

مبرهنة (4-2) : أي بيان بسيط G بـ n من الرؤوس وبأكثر من $(n-1)(n-2)$ من الحافات يكون متصلاً .

البرهان : اذا كان G مكوناً من k من المركبات ، فان عدد حافته لا يزيد على $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ بموجب المبرهنة (3-2). ولما كان

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \geq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

عندما $k \geq 2$ ، وان عدد حافات G يزيد على $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ بالفرض ، فان كون $k \geq 2$ يناقض المبرهنة (3-2). لذلك ، فان $k = 1$ وان G بيان متصل .

المبرهنة (3-2) تزودنا بالقيود الاعلى لعدد الحافات لبيان بسيط بدلالة عدد رؤوسه وعدد مركباته. والمبرهنة الآتية تزودنا بالقيود الادنى لعدد الحافات .

مبرهنة (5-2) : اذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافته m ، فان $m \geq n - 1$.

البرهان : لاثبات المبرهنة نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n .

واضح انه عندما يكون $n = 1$ ، فان $m = 0$. وعندئذ تكون المبرهنة صحيحة . لنفرض ان لكل بيان متصل رتبته r ، حيث ان $n - 1 \geq r \geq 1$.

يحتوي على $(r - 1)$ من الحافات على الاقل . وتأمل بياناً بسيطاً متصلاً G عدد رؤوسه n وعدد حافته m . اذا كانت درجة كل رأس في G لا تقل عن اثنتين ، فانه بموجب المبرهنة (1-1) يكون لدينا

$$2m \geq 2n ,$$

اي ان

$$m \geq n > n - 1 .$$

والان . نفرض ان هنالك في G رأساً u درجته تساوي 1 . فاذا ازلنا الرأس u من G مع الحافة الواقعة عليه . نحصل على بيان متصل G' عدد رؤوسه n' وعدد حافته m' . حيث ان :

$$m' = m - 1 , \quad n' = n - 1 .$$

وبموجب فرض الاستقراء الرياضي . يكون لدينا

$$m' \geq n' - 1 .$$

وعليه فان

$$m = m' + 1 \geq n' = n - 1 .$$

وهكذا . بموجب مبدأ الاستقراء الرياضي . تكون المبرهنة صحيحة . ■

نتيجة (1 2) : اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد حافته m وعدد مركباته k . فان $m \geq n - k$.

البرهان مباشر وتترك باعتباره تمريناً للطلاب .

مبرهنة (6 - 2) : اذا كان G بياناً بسيطاً خالياً من المثلثات (+) عدد رؤوسه $2n$. فان عدد حافته لايزيد على n^2 .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على n . فعندما $n = 1$ ، يكون عدد الحافات 0 أو 1 . لان البيان البسيط المكون من رأسين له حافة واحدة على الاكثر . وبذلك . فان المبرهنة صحيحة عندما $n = 1$.

لنفرض أن المبرهنة صحيحة لكل بيان بسيط خال من المثلثات وعدد رؤوسه $2(n - 1)$ ولنأخذ بياناً بسيطاً G خالياً من المثلثات وعدد رؤوسه $2n$. لتكن $[u, v]$ حافة في G . وليكن H البيان الناتج من G بإزالة الرأسين u و v مع كل الحافات الواقعة عليهما . واضح أن H يحتوي على $2(n - 1)$ رأساً وهو خال من المثلثات . لذلك فان عدد حافته m' لايزيد على $(n - 1)^2$.

اذا كان w أي رأس . غير u و v . في G . فانه لايمكن أن يكون متجاوراً مع u و v معاً . لان G خال من المثلثات . لذلك . اذا كانت درجة u هي k فان درجة v لا تزيد على $(2n - k)$. وعليه . فان m . عدد حافات G . يحقق المتباينة

$$m \leq (n - 1)^2 + k + (2n - k) - 1 = n^2 .$$

(+) المثلث هو دائرة بسيطة طولها يساوي 3 .

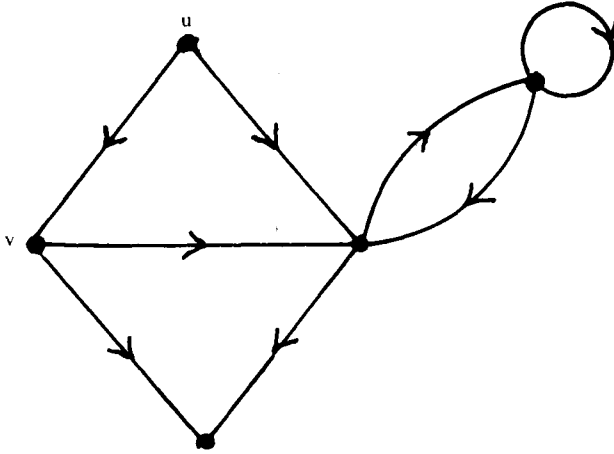
وبهذا يتم البرهان . ■

لاحظ أن هنالك بيانات بسيطة خالية من المثلثات يكون فيها عدد الحواف مساوياً لمربع نصف عدد الرؤوس . خذ مثلاً البيان الذي هو دائرة بسيطة بطول 4 . ولذلك . فإن n^2 هو أقل قيد أعلى لعدد الحواف لهذا النوع من البيانات . ولهذا السبب يطلق على المبرهنة (2 - 6) المبرهنة القصوى لتوازن (Turan's extremal theorem) .

كما يمكن إثبات أن عدد الحواف m لا يزيد على $(n^2 - 1)/4$ عندما يكون البيان بسيطاً خالياً من المثلثات عدد رؤوسه n . فردياً . [إنظر تمرين (9) من مجموعة تمارين (2 - 1)] .

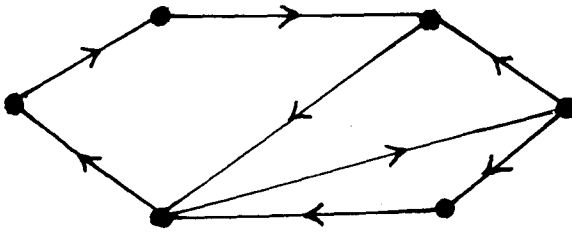
الاتصال للبيانات الموجهة

والآن نقدم فكرة بسيطة عن مفهوم الاتصال للبيانات الموجهة . يقال لبيان موجه D أنه متصل إذا كان اهمال اتجاه الحواف يؤدي الى بيان متصل ؛ وفيما عدا ذلك فإنه غير متصل . فالبيان الموجه D في الشكل (2 - 4) هو بيان متصل .



شكل (2 - 4)

يقال لبيان موجه D انه متصل بشدة (strongly - connected) اذا كان لكل رأسين مختلفين u و v في D يوجد على الأقل درب موجه واحد من u الى v وكذلك يوجد درب موجه من v الى u . طبيعي أن كل بيان موجه متصل بشدة هو بيان موجه متصل. ولكن العكس غير صحيح. فالبيان الموجه المبين في الشكل (2 - 4) هو متصل ولكنه ليس متصلاً بشدة لعدم وجود درب موجه من الرأس v الى الرأس u . البيان المعطى في الشكل (2 - 5) هو بيان موجه متصل بشدة.



شكل (2 - 5)

قد نستفيد من مفهوم الاتصال بشدة في تثبيت اتجاه السير في شوارع مدينة ما بحيث يصبح السير في كل شارع باتجاه واحد وبحيث نستطيع أن نتقل طبقاً لذلك من أي موقع الى أي موقع آخر في داخل المدينة. طبيعي أن هذا ليس ممكناً دائماً. الا اذا كانت خارطة شوارع المدينة (وهي التي تشكل بياناً) تحقق شرطاً معيناً. كما هو وارد في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (2 - 7): ليكن G بياناً متصلاً. يمكن تثبيت اتجاه لكل حافة في G بحيث يصبح البيان الموجه الناتج D متصلاً بشدة اذا واذا فقط كانت كل حافة في G تنتمي الى دائرة واحدة على الاقل.

البرهان: اذا أمكن تثبيت اتجاهات للحافات بحيث يصبح D متصلاً بشدة. فانه ينتج مباشرة ان كل حافة في G تنتمي الى دائرة واحدة على الاقل.

والان نفرض ان كل حافة في G تنتمي الى دائرة واحدة على الاقل. ولتكن C دائرة ما. نعطي اتجاهها لكل حافة في C بحيث تصبح C دائرة موجهة. اذا كانت C محتوية على كل حافات G . عندئذ يتم البرهان. اما اذا وجدت حافات لاتقع في C فعندئذ

نأخذ منها حافة e . تكون متجاورة مع حافة في C . لتكن C' دائرة تحتوي على e . لكل حافات C' التي لم تأخذ اتجاهها . نثبت لها نفس الاتجاه . كالاتجاه الذي ينطبق مع اتجاه مرورنا حول الدائرة وفقاً لمتابعتها . وهكذا . نستمر بتثبيت اتجاه لكل حافة في G بهذه الطريقة حتى يصبح لدينا بياناً موجهاً .

من السهولة ان نلاحظ ان البيان الموجه الناتج متصل بشده . لان في كل خطوة من خطوات تثبيت اتجاهات الحافات . يكون البيان الموجه الجزئي الناتج . والمكون من الحافات التي تم اعطاؤها اتجاهات . هو بيان متصل بشده . ■

تمارين (2 - 1) .

(1) اثبت ان تعريف البيان المتصل المعطى في البند (1 - 5) يكافيء تعريفه المعطى في بداية البند (2 - 2) .

(2) لتكن C و C' دائرتين مختلفتين في بيان G . ولتكن e حافة مشتركة بين C و C' . اثبت ان هنالك دائرة في G لا تحتوي على e .

(3) اثبت ان G بيان ثنائي التجزئة اذا واذا فقط كانت كل داراته زوجية الطول .
(4) برهن على أن كل دائرة غير بسيطة يمكن تجزئتها الى دارات بسيطة لا توجد حافة مشتركة بين أية اثنتين منها .

(5) ليكن G بياناً بسيطاً . برهن على أنه اذا كان G غير متصل فان متممة \bar{G} يكون متصلاً .

(6) ليكن G بياناً بسيطاً متصلاً . برهن على أن بيان المناقلة $I(G)$ يكون متصلاً أيضاً .

(7) يعرف خصر (girth) بيان G بانه الطول لاقصر دائرة في G . جد خصر $K_{m,n}$, K_n , W_n وبيان بيترسن .

(8) اثبت النتيجة (2 - 1) .

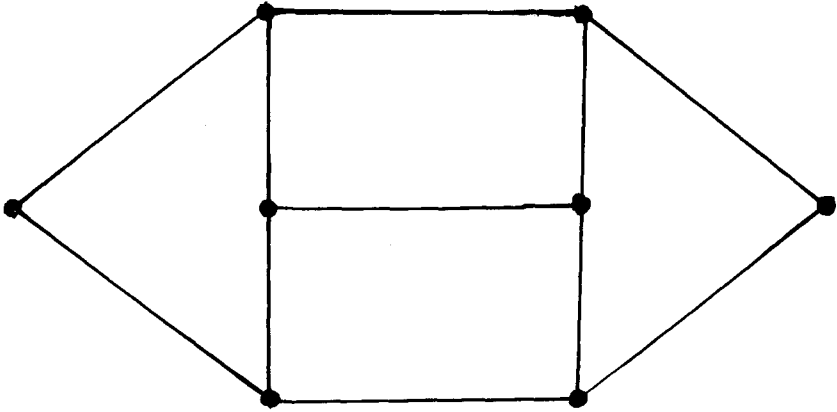
(9) اثبت ان عدد حافات بيان بسيط خالٍ من الثلاثات لايزيد على $(n^2 - n)$ عندما يكون عدد رؤوسه $(2n - 1)$.

(10*) في بيان متصل بسيط . اثبت أن أي أطول درين بسيطين يشتركان في رأس واحد على الاقل .

(11) ليكن D بياناً موجهاً بسيطاً ومتصلاً بشده . وليكن عدد رؤوسه n وعدد حافته الموجهة m اثبت أن

$$n \leq m \leq n(n - 1) .$$

- (*12) إذا كان G بياناً متصلاً عدد رؤوسه (6) ودرجة كل رأس فيه لا تقل عن 3، وطول كل دائرة لا يقل عن 4، فاثبت ان $G = K_{3,3}$.
- (13) ثبت اتجاهات لحافات البيان G المبين في الشكل (2-6) بحيث يتكون لديك بيان موجه متصل بشدة .



شكل (2-6)

(2-3) المجموعات القاطعة (The Cut - Sets)

هنالك مفهوم بياني ذو علاقة وثيقة بمفهوم الاتصال ، وهو ذو أهمية كبيرة في نظرية البيانات وتطبيقاتها ، وقد خصصنا هذه الفقرة لشرحه .

ليكن G بياناً . يقال لمجموعة S من حافات G انها مجموعة فاصلة

(disconnecting set) لـ G اذا كانت عملية ازالة (*) الحافات التي في S من G

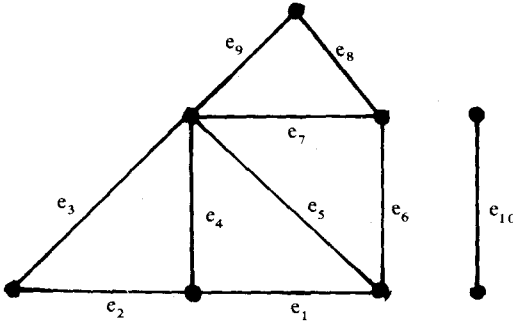
تؤدي الى بيان ، نرمز له $G - S$ ، عدد مركباته يزيد على عدد مركبات G . فمثلاً ،

مجموعة الحافات $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ من البيان المعطى في الشكل (2-6) (أ) هي

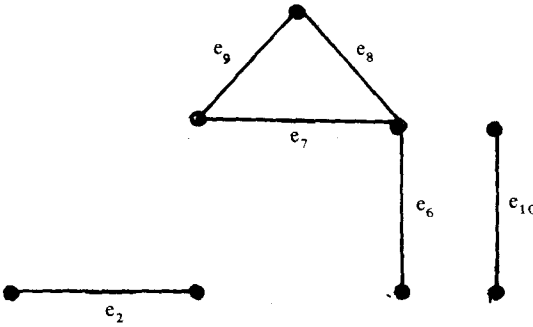
مجموعة فاصلة ، لان ازلتها يؤدي الى البيان في الشكل (2-6) (ب) الذي

عدد مركباته 3 ، في حين ان البيان في (2-6) (أ) له مركبتان فقط .

(*) بقصد ازالة (removal) حافة هو حذف تلك الحافة من البيان مع ابقاء الرأسين الواقعة عليها .



(أ) البيان G



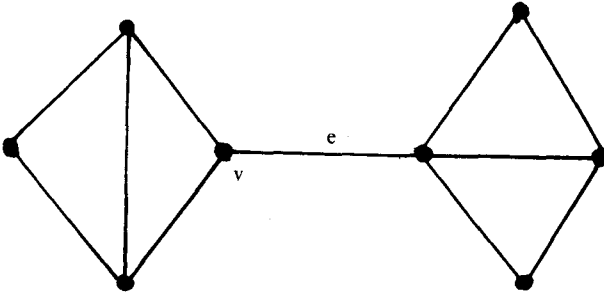
(ب) البيان G - S

شكل (2-7)

يقال لمجموعة من حافات G انها مجموعة قاطعة (cut-set) اذا كانت مجموعة فاصلة صغرى . أي أنها مجموعة فاصلة لـ G بحيث لا توجد مجموعة جزئية فعلية منها التي هي ايضاً مجموعة فاصلة لـ G . فمثلاً . في البيان G في الشكل (2 - 7) . مجموعة الحافات $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ ليست مجموعة قاطعة لـ G . لان المجموعة الجزئية الفعلية $\{e_1, e_3, e_4\}$ هي مجموعة فاصلة ايضاً . ولكن $\{e_1, e_3, e_4\}$ هي مجموعة قاطعة لـ G . لان إعادة أي من هذه الحافات الثلاث الى موضعه الاصلي في G يؤدي الى بيان له نفس عدد المركبات (اي 2) لـ G .

واضح انه اذا كان G متصلاً وكانت S مجموعة قاطعة لـ G . فان $G - S$ بيان غير متصل مكون من مركبتين فقط. كما انه اذا كانت S مجموعة قاطعة لبيان G غير متصل. فان S مجموعة قاطعة لمركبة واحدة فقط من مركبات G .

يقال لحافة e انها بُرْزُخ (isthmus) اذا كَوْنَتْ وحدها مجموعة قاطعة للبيان الذي تنتمي اليه. فمثلاً. الحافة e في البيان المبين في الشكل (2 - 8) هي بُرْزُخ.



شكل (2 - 8)

واضح انه اذا كان G بياناً متصلاً. فان مجموعة كل الحافات. عدا اللغات ان وجدت. الواقعة على رأس. مثل v . تُشكل مجموعة فاصلة. وهي اما مجموعة قاطعة او اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة عن بعضها متنى متنى. فمثلاً. في البيان المعطى في الشكل (3 - 8) الحافات الواقعة على الرأس v هي اتحاد مجموعتين قاطعتين (ما هما ؟).
المبرهنة الآتية توضح العلاقة المتينة بين الدارات والمجموعات القاطعة.

مبرهنة (2 - 8): كل دارة في بيان متصل G تشترك مع أية مجموعة قاطعة لـ G بعدد زوجي من الحافات.

البرهان: لتكن S مجموعة قاطعة للبيان المتصل G . ولتكن H و H' مركبتين $G - S$. واضح ان كل حافة في S تصل رأساً في H برأس في H' .

لتكن C دارة في G . وليكن v رأساً واقعاً على C . لنفرض ان v في H . اذا كانت كل رؤوس C في H . فان جميع حافات C هي حافات في H . وعند ذلك

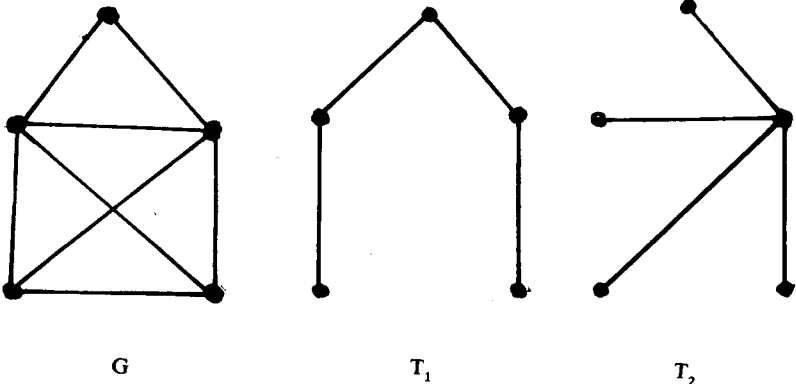
لا توجد حافات من S مشتركة مع مجموعة حافات C . أما إذا كان هنالك رأس من C في H' ، فإننا عندما نبدأ من v_0 ونمر حول C سوف نعبّر من المركبة H الى المركبة H' ، ومن ثم نعود الى H . وهكذا في كل عبور من H الى H' ثم العودة الى H ، نستخدم حافتين مختلفتين من S ؛ لأن حافات C كلها مختلفة. ولما كان علينا العودة أخيرا الى الرأس v_0 الذي هو في H ، فإن عدد الحافات المشتركة بين S و C هو عدد زوجي.

يقال لمجموعة قاطعة S لبيان متصل G انها تفصل الرأس u عن الرأس v اذا كان الرأس u يقع في مركبة لـ S والرأس v يقع في المركبة الأخرى، أي لا يوجد في $G - S$ أي درب بين u و v .

مبرهنة (2 - 9): ليكن u و v رأسين في بيان متصل G عندئذ كل درب بسيط بين u و v في G يشترك بعدد فردي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة تفصل u عن v .

البرهان مشابه لبرهان مبرهنة (2 - 8) ويترك تمرينا للطالب.

يقال لبيان جزئي T من بيان بسيط منفصل G انه شجرة (tree) اذا كان T متصلا وخاليا من الدارات. واذا احتوت الشجرة على جميع رؤوس البيان G فيقال لها شجرة مولدة (spanning tree). فمثلا، في الشكل (2 - 9)، كل من T_1 و T_2 شجرة مولدة للبيان المعطى G .



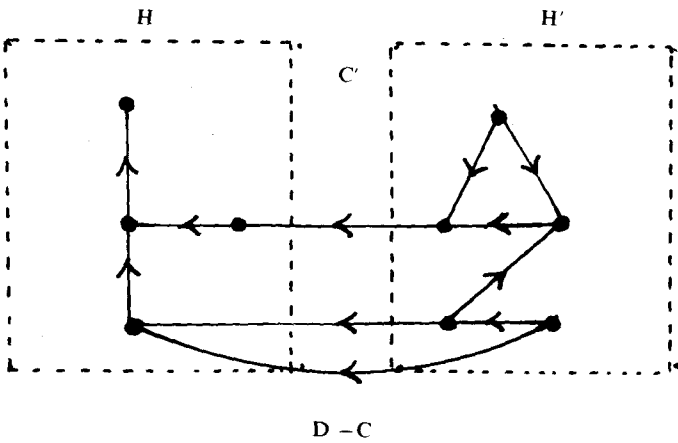
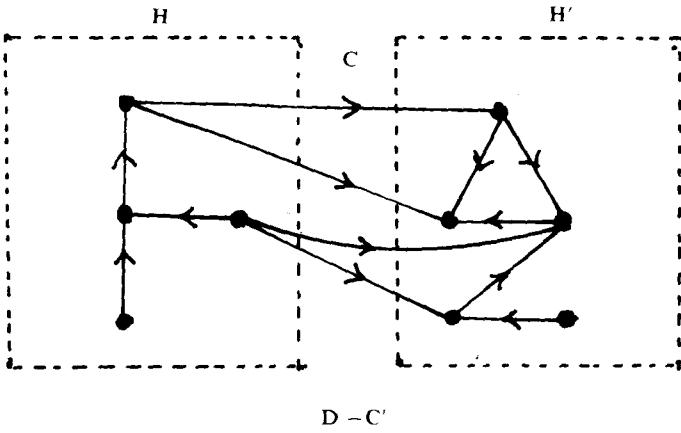
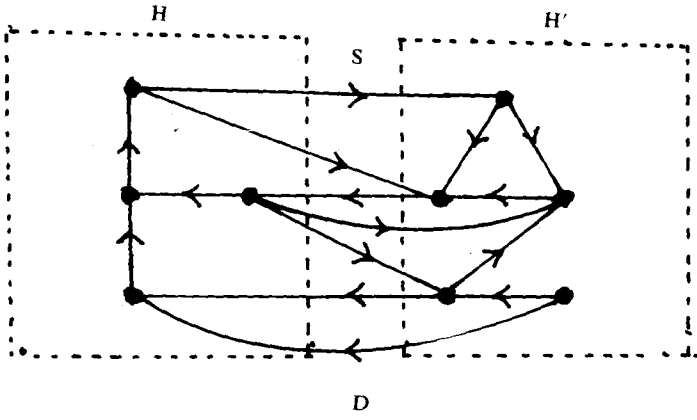
شكل (2-9)

المبرهنة الآتية تزودنا بعلاقة بين الاشجار المولدة والمجموعات القاطعة لبيان G .

مبرهنة (2 - 10). في بيان متصل بسيط . كل شجرة مولدة تشترك بحافة واحدة على الأقل مع كل مجموعة قاطعة .

البرهان : لنكن T شجرة مولدة و S مجموعة قاطعة لبيان متصل بسيط G . بما ان $G - S$ يتكون من مركبتين H و H' . فان هنالك رأسا u في H ورأسا آخر v في H' . ومن تعريف الشجرة المولدة . فان هنالك دربا وحيدا في T بين الرأسين u و v . وبذلك فان هنالك حافة واحدة على الأقل تشترك بين S و T [بموجب المبرهنة (2 - 9)] .

في تطبيق نظرية البيانات في موضوع شبكات الجريان (أو السيول) نتعامل مع مجموعات قاطعة لبيان موجه . وطبيعي . نعرف مجموعة قاطعة لبيان موجه D بأنها مجموعة قاطعة للبيان G الناتج من D باهمال اتجاهات حافته . واضح . انه اذا كان D متصلاً . وكانت S مجموعة قاطعة لـ D . فان $D - S$ يتكون من مركبتين فقط H و H' . وان حافات S تنجزاً الى مجموعتين C و C' بحيث ان C تتكون من كل حافات S الموجهة التي تصل من رأس في H الى رأس في H' . وان C' تتكون من كل حافات S الموجهة التي تصل من رأس في H' الى رأس في H . يطلق على C مجموعة قاطعة موجهة من H الى H' . ويطلق على C' مجموعة - قاطعة موجهة من H' الى H . طبيعي ان البيان الموجه $D - C$ لا يحتوي على أي درب موجه من رأس في H الى رأس في H' . كما ان $D - C'$ لا يحتوي على أي درب موجه من رأس في H' الى رأس في H . وهذه الفكرة موضحة في الشكل (2 - 10) .



شکل (10 - 2)

تمارين (2-2)

(1) إذا كان $G = (V, E)$ بياناً بسيطاً متصلاً. وأن V_1 و V_2 أية تجزئة لـ V .
 فاثبت أن مجموعة كل الحافات التي تصل رأساً من V_1 برأس من V_2 هي مجموعة
 قاطعة أو اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة متنى متنى بالنسبة للحافات.
 (2) اثبت أن حافة e في بيان G تكون برزخاً إذا وإذا فقط e لا تنتمي الى أية دائرة
 في G .

(3) اثبت مبرهنة (2-9).

(4) لنكن S_1 و S_2 مجموعتين قاطعتين مختلفتين لبيان G . ولكن e حافة موجودة
 في كل من S_1 و S_2 . اثبت أن هنالك مجموعة قاطعة لـ G لا تحوي الحافة
 e وهي محتواة في $S_1 \cup S_2$.

(5*) لنكن S مجموعة من حافات بيان متصل G . إذا اشتركت S بعدد زوجي من
 الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G . فاثبت أن S دائرة أو اتحاد دوائر منفصلة
 متنى متنى بالنسبة للحافات.

| تلميح : لكل رأس v . الحافات الواقعة عليه تشكل مجموعة قاطعة أو اتحاد
 مجموعات قاطعة منفصلة بالنسبة للحافات. وبذلك. فإن لكل رأس v
 من G . يوجد عدد زوجي من حافات S مشتركة مع مجموعة الحافات الواقعة
 على v . وعليه. فإن درجة كل رأس في البيان الجزئي الذي مجموعة حافته
 S هي درجة زوجية. |

(6*) لنكن S مجموعة من حافات بيان متصل G . إذا اشتركت S بعدد زوجي
 من الحافات مع كل دائرة في G . فاثبت ان S مجموعة - قاطعة أو اتحاد مجموعات
 قاطعة منفصلة متنى متنى بالنسبة للحافات.

(4 - 2) المسافة (The Distance)

قبل ان نبدأ بشرح هذا الموضوع نذكر القارئ باننا افترضنا ان كافة البيانات
 الموجهة وغير الموجهة والوارد ذكرها في هذا الكتاب هي بيانات منتهية

تعرف المسافة من الرأس u الى الرأس v . $u \neq v$. في بيان G بانها طول
 أقصر درب من u الى v . ويرمز للمسافة من u الى v بـ $d(u, v)$. بالتعريف
 $d(u, u) = 0$. وإذا كان الرأسان u و v غير متصلين. اي لا يوجد درب
 يصل بينهما. فيقال ان المسافة $d(u, v)$ غير معرفة. ويعبر عن ذلك بكتابة
 $d(u, v) = \infty$. ولتجنب هذه الحالة. سنفرض ان G بيان متصل.

واضح ان المسافة في البيانات المتصلة . تحقق البديهيات المترسة (metric axioms) المعروفة . وهي :

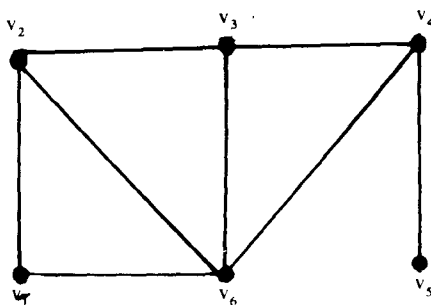
- (1) $d(u, v) \geq 0$,
- (2) $d(u, v) = 0 \Rightarrow u = v$,
- (3) $d(u, v) = d(v, u)$,
- (4) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

يطلق على البديهية الرابعة المتباينة المتثلثية .

يعرف القطر δ (the diameter) لبيان متصل بسيط $G = (V, E)$ بأنه أعظم مسافة $d(u, v)$ بين رؤوس G . أي ان :

$$\delta = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

فالقطر للبيان المعطى في الشكل (2 - 11) هو 3 . وهو المسافة بين الرأسين v_1 و v_5



شكل (2 - 11)

واضح أن قطر K_n هو 1 . وقطر W_n هو 2 . يطلق على الدرّب الذي طوله يساوي قطر البيان اسم درّب قطري . بالطبع . قد يوجد أكثر من درّب قطري واحد لنفس البيان .

كما يعرف مركز (center) بيان متصل بسيط $G = (V, E)$ بأنه رأس يتصف بالخاصية وهي أن المسافة العظمى الممكنة بينه وبين أي رأس آخري أقل ما يمكن نسبة إلى بقية الرؤوس . ويطلق على هذه المسافة نصف القطر، ويرمز لها r . وبذلك ، فإن نصف القطر r يحقق

$$r = \min_{v \in V} R(v),$$

حيث أن

$$R(v) = \max_{u \in V} d(v, u).$$

يطلق على $R(v)$ الاختلاف المركزي (eccentricity) للرأس v

مما تقدم نجد أن v_0 هو مركز للبيان المتصل الذي نصف قطره r اذا واذا فقط

$$R(v_0) = r.$$

وطبيعي أنه . قد يكون للبيان المتصل اكثر من مركز واحد . ولتوضيح هذا المفهوم نستخرج نصف القطر ومراكز البيان المعطى في الشكل (2 - 11)

$$\begin{array}{lll} d(v_1, v_2) = 1 & d(v_1, v_3) = 2 & d(v_1, v_4) = 2 \\ d(v_1, v_5) = 3 & d(v_1, v_6) = 1 & d(v_2, v_3) = 1 \\ d(v_2, v_4) = 2 & d(v_2, v_5) = 3 & d(v_2, v_6) = 1 \\ d(v_3, v_4) = 1 & d(v_3, v_5) = 2 & d(v_3, v_6) = 1 \\ d(v_4, v_5) = 1 & d(v_4, v_6) = 1 & d(v_5, v_6) = 2 \end{array}$$

ولأجل تسهيل العمل فقد وضعت هذه المسافات في الجدول الآتي الذي يتضمن أيضاً عموداً لقيم $R(v)$. والذي منه نستخرج نصف القطر .

$$r = \min_v R(v) = \min \{ 3, 3, 2, 2, 3, 2 \} = 2.$$

ونستنتج أن كلاً من الرؤوس v_3, v_4, v_6 هو مركز للبيان المعطى.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$R(v)$
v_1	0	1	2	2	3	1	3
v_2	1	0	1	2	3	1	3
v_3	2	1	0	1	2	1	2
v_4	2	2	1	0	1	1	2
v_5	3	3	2	1	0	2	3
v_6	1	1	1	1	2	0	2

من الطبيعي أن تكون هنالك علاقة بين القطر ونصف القطر . وهذا مبين في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (2-11) : إذا كان δ قطر بيان متصل بسيط منته $G = (V, E)$ وكان r نصف قطره . فإن

$$\frac{1}{2} \delta \leq r \leq \delta .$$

البرهان : لما كان $\delta = \max_{u, v \in V} d(u, v)$,

$$r = \min_{u \in V} \{ \max_{v \in V} d(u, v) \} ,$$

$$r \leq \max_{u \in V} \{ \max_{v \in V} d(u, v) \} = \delta . \quad \text{فان}$$

لتكن x و y نهائيي درب قطري . أي أن $\delta = d(x, y)$ وليكن v_0 مركزاً للبيان

$$r = R(v_0) = \max_{v \in V} d(v_0, v) . \quad \text{عندئذ يكون } G$$

$$d(v_0, x) \leq r \quad d(v_0, y) \leq r . \quad \text{إذاً}$$

$$d(x, y) \leq d(x, v_0) + d(v_0, y) . \quad \text{ولما كان}$$

$$\delta \leq r + r . \quad \text{فان}$$

$$\frac{1}{2} \delta \leq r . \quad \text{أي أن}$$

وبذلك يتم البرهان ■

✿ ليكن r نصف قطريان متصل بسيط $G = (V, E)$. ولتكن p أعلى درجة

$$p = \max_{v \in V} \Delta(v) : \quad \text{رأس في } G \text{ أي أن}$$

ولنفرض أن $p \geq 2$. ليكن u مركزاً لـ G . ولتكن A_1 مجموعة كل الرؤوس في G المتجاورة مع u . ولتكن A_2 مجموعة كل الرؤوس التي مسافة كل منها عن u تساوي 2 . وهكذا . لتكن A_i مجموعة كل الرؤوس في G التي مسافة كل منها عن u تساوي i . حيث ان $i = 1, 2, \dots, r$

واضح أن عدد الرؤوس في A_1 لا يزيد على p . وأن هنالك أقل من p من الحافات

من كل رأس في A_1 الى مجموعة الرؤوس في A_2 . وبذلك فان عدد الرؤوس في A_2

هو أقل من p^2 . وهكذا . فان عدد الرؤوس في A_i هو أقل من p^i . لكل $i = 1, 2, \dots, r$

وعليه . فان

$$n \leq 1 + p + p^2 + \dots + p^r,$$

حيث ان عدد رؤوس البيان G. ولما كان

$$1 + p + p^2 + \dots + p^r = (p^{r+1} - 1)/(p - 1),$$

فان

$$n \leq (p^{r+1} - 1)/(p - 1),$$

أي ان

$$n(p - 1) + 1 \leq p^{r+1}$$

إذا

$$\log(np - n + 1) \leq (r + 1) \log p.$$

وهكذا. نحصل على العلاقة الآتية.

$$\clubsuit \quad r \geq \frac{\log(np - n + 1)}{\log p} - 1. \quad \dots (1-2)$$

والان نشرح موضوع المسافة في البيانات الموجهة.

ليكن $D = (V, A)$ بياناً موجهاً. اذا وجد درب موجه من الرأس u الى الرأس v في D . فعندئذ نعرف المسافة الموجهة. والتي يرمز لها $\bar{d}(u, v)$ من الرأس u الى الرأس v بانها طول أقصر درب موجه من u الى v . واذا لم يكن هنالك أي درب موجه من u الى v في D . فيقال ان المسافة الموجهة $\bar{d}(u, v)$ غير معرفة. ونعبر عن ذلك بكتابة $\bar{d}(u, v) = \infty$. كما ان لكل رأس u في D نعرف $\bar{d}(u, u) = 0$ طبيعي أن المسافة الموجهة \bar{d} لا تحقق خاصية التناظر بصورة عامة. اي أن

$$\bar{d}(u, v) \neq \bar{d}(v, u).$$

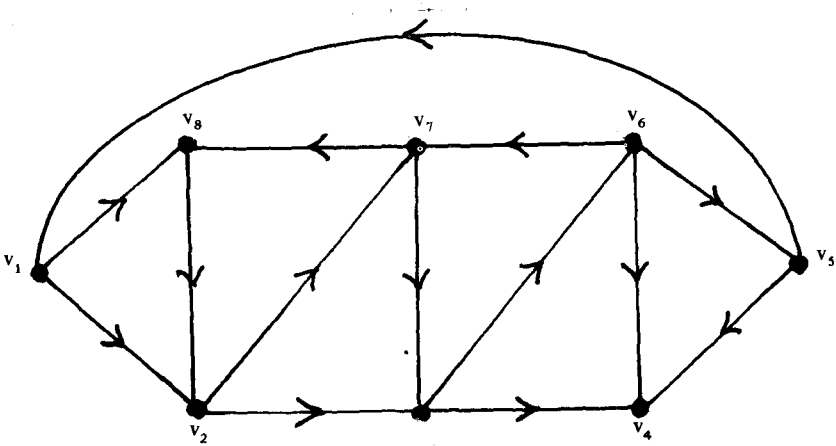
ولكن من السهولة اثبات صحة المتباينة المثلثية

$$\bar{d}(u, v) + \bar{d}(v, w) \geq \bar{d}(u, w).$$

لانه. اذا وجد درب موجه من u الى v ودرب موجه من v الى w . فان هنالك درباً موجهاً من u الى w .

مثال : تأمل البيان الموجه D المعطى في الشكل (2-12). تجد ان

$$\vec{d}(v_1, v_6) = 3, \quad \vec{d}(v_6, v_1) = 2, \quad \vec{d}(v_7, v_4) = 2, \quad \vec{d}(v_4, v_7) = \infty.$$



شكل (2-12)

يمكننا ان نعرف القطر ، نصف القطر ، والمركز لبيان موجه بطريقة مشابهة لتعريفها للبيانات غير الموجهة مع أخذ $\vec{d}(u, v)$ بدلاً من $d(u, v)$. ولأجل تجنب وجود مسافة موجهة غير معرفة بين راسين ، فسوف نفترض ، عند بحث القطر ونصف القطر ان البيان الموجه هو بيان متصل بشدة . ولتجنب الالتباس ، سوف نرمز بـ $\vec{\delta}$ للقطر و \vec{r} لنصف القطر لبيان موجه . وهكذا ، اذا كان $D = (V, A)$ بياناً موجهاً بشدة ، فاننا نعرف

$$\vec{\delta} = \max_{u, v \in V} \vec{d}(u, v),$$

$$\vec{r} = \min_{u \in V} \vec{R}(u),$$

حيث ان

$$\vec{R}(u) = \max_{v \in V} \vec{d}(u, v).$$

وإذا كان $\vec{R}(u_0) = \vec{r}$ ، فيقال ان u_0 مركز البيان الموجه D .

بما ان المسافة الموجهة \vec{d} ليست متناظرة بصورة عامة ، فاننا نتوقع عدم صحة المتباينة $\frac{1}{2}\vec{\delta} \leq r \leq \vec{\delta}$ أحياناً ، وذلك لان برهان المبرهنة (2-11) يتطلب استخدام خاصية التناظر لدالة المسافة d . ولأجل توضيح هذه

النقطة ، تأمل البيان الموجه المبين في الشكل (2-13) تجده متصلاً بشده ،
وتجد ان

$$\vec{R}(u) = \max \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} = 5 ,$$

$$\vec{R}(v) = \max \{ 1, 1, 2, 2, 2 \} = 2 ,$$

$$\vec{R}(w) = \max \{ 1, 2, 1, 1, 1 \} = 2 ,$$

$$\vec{R}(x) = \max \{ 4, 3, 4, 1, 2 \} = 4 ,$$

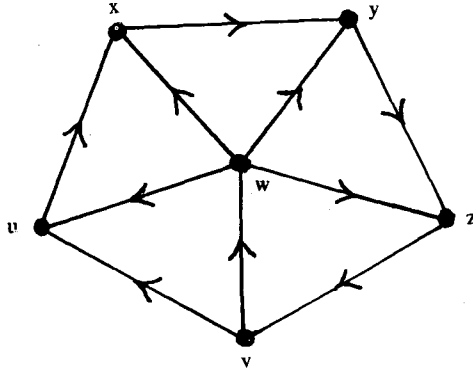
$$\vec{R}(y) = \max \{ 3, 2, 3, 4, 1 \} = 4 ,$$

$$\vec{R}(z) = \max \{ 2, 1, 2, 3, 3 \} = 3 .$$

وهكذا ، فان

$$\vec{\delta} = \max \{ 5, 2, 2, 4, 4, 3 \} = 5 ,$$

$$\vec{r} = \min \{ 5, 2, 2, 4, 4, 3 \} = 2$$



شكل (2-13)

وبذلك ، فان في هذا البيان الموجه $\vec{\delta} > 2\vec{r}$. لاحظ أن كلا من الرأسين v و w هو مركز لهذا البيان .

تمارين (2-3)

- (1) جد القطر ونصف القطر لكل من بيان بيترسن والبيان الثماني السطوح .
- (2) في بيان متصل G ، اثبت أن رأساً x يقع على أقصر درب بين الرأسين u و v إذا وإذا فقط

$$d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$$

- (3) ليكن P_n بياناً برتبة n مكوناً من درب بسيط واحد . جد القطر ونصف

القطر P_n وعين مراكزه . [تلميح : خذ الحالتين (أ) n عدد زوجي ،
(ب) n عدد فردي .]

(4) لتكن C_n دائرة بسيطة عدد رؤوسها n . جد القطر ونصف القطر C_n وعين مراكزها .

(5) اثبت ان G بيان تام اذا واذا فقط قطره يساوي 1 .

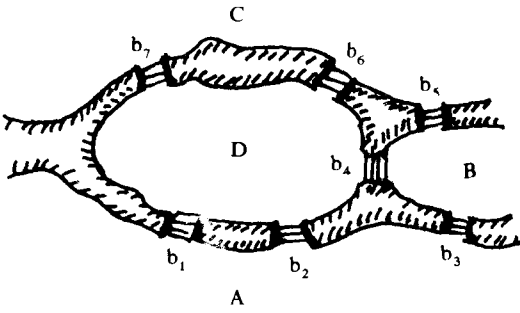
(6) اذا كانت T شجرة عدد رؤوسها $n \leq 3$. فاثبت ان قطرها δ ونصف قطرها r يحققان المتباينة $\delta > r$.

(7) جد نصف القطر \bar{r} والقطر $\bar{\delta}$ للبيان الموجه المتصل بشدة والمعطى في الشكل (2-5) . عين مراكزه .

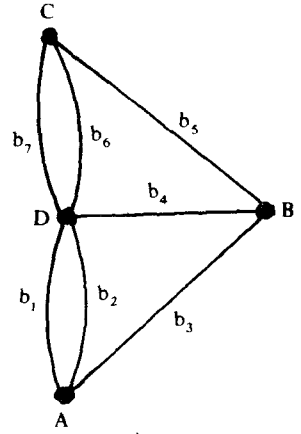
♣ (2-5) البيانات الأويلرية (Eulerian Graphs)

نقد كانت مسألة جسر كونيكسبرك (Konigsberg Bridge Problem) البداية لرياضيات نظرية البيانات . وقد كان العالم أويلر أول من أعطى جوابا لهذه المسألة في سنة 1736 . لقد كانت خارطة مدينة كونيكسبرك في المانيا كما هي مبينة في الشكل (2-14) . وهي تحتوي على سبعة جسور . وتنص المسألة على ايجاد مساريبدأ من نقطة في اليابسة . كنقطة A مثلاً . ويعبر على كل جسر من الجسور السبعة مرة واحدة فقط ثم يعود الى نفس النقطة A . لما كان المهم في هذه المسألة هو الجسور . فانه يمكن تمثيل خارطة المدينة ببيان حافته تمثل الجسور وكل جزء من الاجزاء اليابسة المنفصلة بعضها عن بعض يتمثل برأس واحد في البيان . كما هو مبين في الشكل (2-15) . وبذلك تصبح مسألة جسر كونيكسبرك بالصيغة الآتية : هل توجد دائرة تحتوي كل حافات البيان في الشكل (2-15) ؟ وقد اجاب اويلر عن ذلك بالنفي . كما سيتضح من البرهنة (2-12)

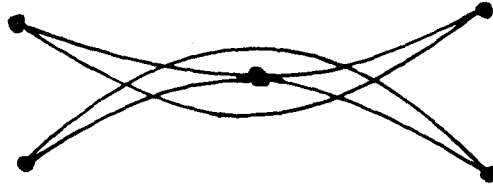
وقد ظهر أن مسائل التسلية . التي تؤدي الى ايجاد درب أو دائرة تتضمن كل الحافات . كانت قديمة جداً . فالبيان المبين في الشكل (2-16) الذي يطلق عليه حداب محمد (Mohammed's scimitars) كان قد أوجده العرب للتسلية على النحو الآتي : هل يمكن رسم هذا الشكل بدون رفع القلم عن الورقة ؟



شكل (2 - 14)



شكل (2 - 15)

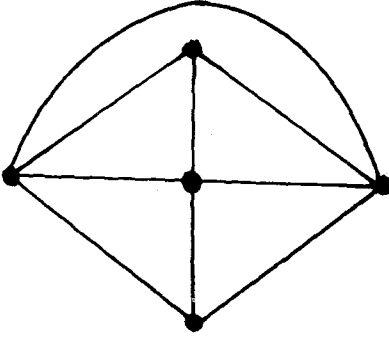


شكل (2 - 16) جداب محمد

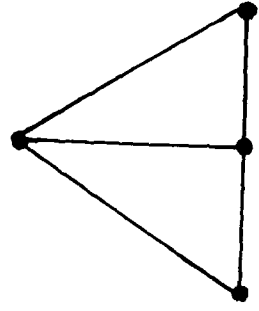
ليكن G بياناً متصلاً . اذا وجد في G درب مغلق يمر بكل حافات G ، فانه يطلق على ذلك الدرب اسم درب اويلري (Eulerian chain) . ويقال عندئذ لـ G انه بيان اويلري . واضح ان أي درب اويلري هو في الحقيقة دائرة محتوية على كل حافات البيان . ولذلك فالاجدر ان يطلق عليها دائرة اويلرية . ولكن اويلر سماها درباً مغلقاً . واصبحت التسمية « درب اويلري » معروفة في كل الكتب والمقالات في موضوع نظرية البيانات .

البيان جداب محمد هويان اويلري . ولكن البيان في الشكل (2 - 17) ليس كذلك . حيث لا يمكن ايجاد درب اويلري فيه .

يقال لبيان متصل منته G انه بيان شبه أوليري (semi-Eulerian) إذا وجد فيه درب (مفتوح أو مغلق) يمر مرة واحدة فقط في كل حافة من حافات G . فالبيان في الشكل (2-18) هو بيان شبه أوليري. لاحظ أن كل بيان أوليري هو شبه أوليري، ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.



شكلا. (2-18)



شكل (2-17)

السؤال الذي يتبادر الى الذهن هو : ماهي الشروط الضرورية والكافية التي تتوفر في البيانات لكي تكون أوليرية ؟ لقد أجاب أولير عن هذا السؤال في المبرهنة الآتية.

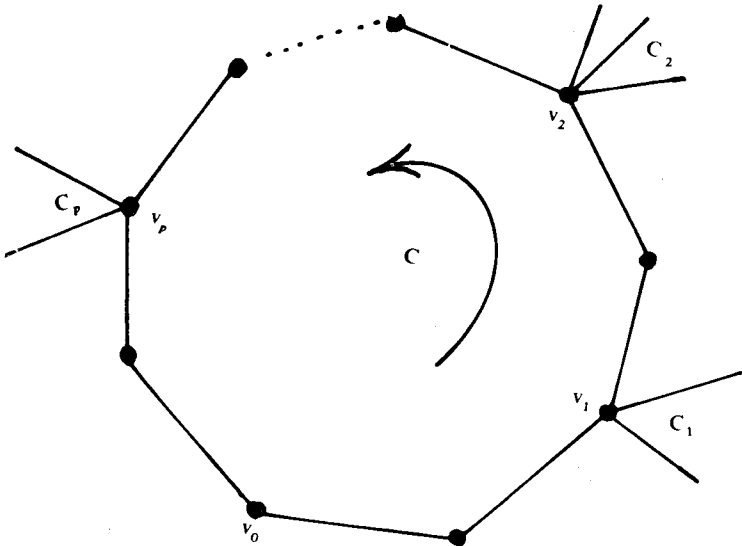
مبرهنة (2-12) : يكون البيان المتصل G بياناً أوليرياً إذا وإذا فقط كانت درجة كل رأس في \bar{G} عدداً زوجياً.

البرهان : إذا كان G بياناً أوليرياً . فإنه يوجد درب أوليري يمر بكل الحافات . وفي كل مرة نمر برأس نستعمل حافتين مختلفتين واقعتين عليه . وبذلك فإن درجة كل رأس في G هي عدد زوجي . وعليه . فإن هذا الشرط ضروري لكي يكون البيان المتصل أوليرياً.

والآن نبرهن على أن هذا الشرط كاف . ولأجل ذلك نفرض أن درجة كل رأس في G هي درجة زوجية . ونبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الحافات أن G بيان أوليري . واضح أنه إذا كان G مكوناً من حافة واحدة فقط . فعندئذ يكون G لفة واحدة وهو بذلك بيان أوليري .

يمكن أن نثبت بسهولة أن البيان الذي درجة كل رأس فيه لا تقل عن اثنين يحتوي على دائرة . [انظر تمرين (4) من مجموعة تمارين (2-4)] . وهكذا ، فإن هنالك دائرة C في G . لما كانت درجة كل رأس في C هي درجة زوجية ، فإن درجة كل رأس في البيان الجزئي المتمم \bar{C} ، أي $G - C$ ، هي أيضاً درجة زوجية . إضافة الى ذلك ، فإن كل مركبة لـ \bar{C} تحقق هذا الشرط . اذا ، بموجب فرض الاستقراء الرياضي ، كل مركبة لـ \bar{C} ، ماعدا الرؤوس المنعزلة التي وجودها في \bar{C} لا يؤثر على خطوات البرهان الآتية ، هي بيان أوليري .

لما كان G متصلاً . فإن كل مركبة لـ \bar{C} تشترك مع C برأس واحد على الاقل . ليكن v_0 أي رأس واقع على C . لنبدأ من v_0 وندور حول C باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة [انظر شكل (2-19)] ونرمز بـ v_1 لأول رأس من C يشترك مع مركبة لـ \bar{C} . والتي سنرمز لها C_1 وهي درب أوليري . ونرمز بـ v_2 للرأس الذي يأتي بعد v_1 ويشترك مع مركبة اخرى . والتي سنرمز لها بـ C_2 . وهكذا نرمز بـ v_p لآخر رأس من C يشترك مع آخر مركبة C_p .



شكل (2-19)

إذا رمزنا بـ $P(x,y)$ للدرب المفتوح من x الى y (باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة) في الدارة C ، فان

$$P(v_0, v_1), C_1, P(v_1, v_2), C_2, \dots, C_p, P(v_p, v_0)$$

هي دارة في G تمرمرة واحدة فقط في كل حافة من حافات G ؛ وبذلك فهي درب أوليري في G . إذاً ، G هويان أوليري . ■

نتيجته (2-2) : يكون البيان المتصل G بياناً شبه أوليرياً اذا واذا فقط لا يوجد فيه اكثر من رأسين فرديين الدرجة .

يترك البرهان تمريناً للقارئ .

اذا كان G بياناً أوليرياً ، فانه يمكن الحصول على درب أوليري لـ G باتباع الطريقة الآتية التي تسمى خوارزمية فلوري (Fleury's algorithm) :

نبدأ بأي رأس ، مثل u ، ونمر على الحافات بترتيب كيفي حسب القواعد :-

- (1) نزيل كل حافة نمر عليها ؛ (2) نزيل كل رأس معزول ينتج بتطبيق خطوات الطريقة ؛
- (3) في كل مرحلة ، لانستعمل برزخاً الا في حالة عدم وجود حافة اخرى تقع على الرأس الذي وصلنا عنده .

يمكن أن نبرهن على أن خوارزمية فلوري تمكنا دائماً من ايجاد درب أوليري في بيان أوليري . فاذا فرضنا أننا وصلنا الى رأس v وكان $v \neq u$ ، فان البيان الباقي H هو بيان متصل ويحتوي على رأسين فقط بدرجة فردية وهما u و v . وبذلك بموجب نتيجة (2-2) نستطيع ايجاد درب شبه أوليري من v الى u ، أي نستطيع الاستمرار بخطوات الخوارزمية . اما اذا كان $v = u$ ولا يزال هنالك حافات باقية واقعة على u ، فاننا نستطيع أيضاً الاستمرار بخطوات الخوارزمية . واخيراً ، اذا كان $u = v$ ولم تبق هنالك حافات واقعة على u ، فانه لن تبقى أية حافة اخرى في G ، وذلك بموجب القاعدة (3) ولان لكل رأس v ، فان آخر حافة تستعمل ، من الحافات الواقعة على v ، هي في الحقيقة برزخ

أن موضوع التغطية الصغرى (minimal covering) هو تعميم لمسألة أولير . ويقصد بالتغطية الصغرى لبيان متصل G تجزئة حافته الى أقل عدد من الدروب والدارات المنفصلة بعضها عن بعض بالنسبة للحافات ، أي التي لا توجد حافات مشتركة بين أي

اثنين منها وبحيث انها تتضمن سوية كل حافات G ، أي تغطي G . البرهنة الآتية تعطينا عدد الدروب والدارات في تغطية صغرى لبيان متصل .

مبرهنة (2-13): ليكن G بياناً متصلاً محتويماً على $2k$ ، $k \geq 1$ ، من الرؤوس الفردية الدرجة . عندئذ ، كل تغطية صغرى لـ G تتكون من k من الدروب المنفصلة بالنسبة للحافات .

البرهان : واضح أن كل رأس فردي الدرجة يجب أن يكون نهاية لـ k رب واحد على الأقل في كل تغطية لـ G . وعليه ، فإن عدد الدروب في أية تغطية (صغرى أو غير صغرى) لـ G لا يقل عن k . والآن نبين أنه يمكن تغطية G بـ k من الدروب المنفصلة بالنسبة للحافات بحيث أن نهائي كل من هذه الدروب رأسان كل منهما فردي الدرجة .

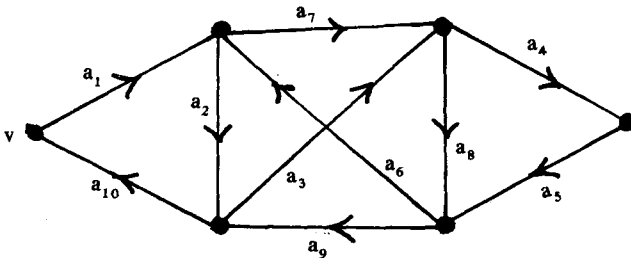
ليكن G البيان الناتج من G بإضافة k من الحافات e'_1, e'_2, \dots, e'_k بحيث إن كل حافة تصل رأسين كل منهما فردي الدرجة ، وبحيث إن كل رأس فردي الدرجة يقع على واحدة فقط من هذه الحافات المضافة . بموجب البرهنة (2-12) فإن G' هو بيان أولري . وعليه ، فإن هنالك في G' درياً أولرياً ، P' . عندما نزيل الحافات لمضافة e'_1, e'_2, \dots, e'_k من P' ، فإن الحافات الباقية ، وهي كل حافات G ، تنجزاً إلى k من الدروب التي تغطي G .

يمكن تعميم المفاهيم والناتج التي تقدم ذكرها في هذا المجال لتشمل البيانات الموجهة ، ونشرح فيما يأتي بعضاً منها .

يقال لبيان موجه $D = (V, A)$ انه بيان أولري موجه (directed Euler graph) إذا وجدت فيه دائرة موجهة مكونة من كل حافته الموجهة . فثلاً ، البيان الموجه

المبين في الشكل (2-20) هو بيان أولري موجه ، وذلك لأن المتابعه

$$(a_1, a_2, \dots, a_{10})$$



شكل (2-20)

هي دائرة موجهة تبدأ من v وتنتهي في v .

المبرهنة الآتية تعين لنا الشرط الضروري والكافي لكي يكون D بيانا أوليريا موجهاً.

مبرهنة (2-14): ليكن $D = (V, A)$ بيانا موجهها متصلا . عندئذ ، يكون D بيانا أوليريا موجهها اذا واذا فقط

$$\rho^+(v) = \rho^-(v) ,$$

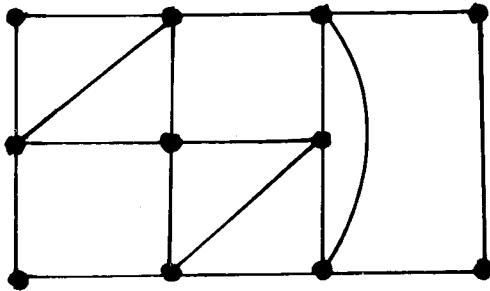
لكل رأس v في D .

البرهان مشابه لبرهان مبرهنة (2-12) ، وقد ترك كتسرين للقارئ .

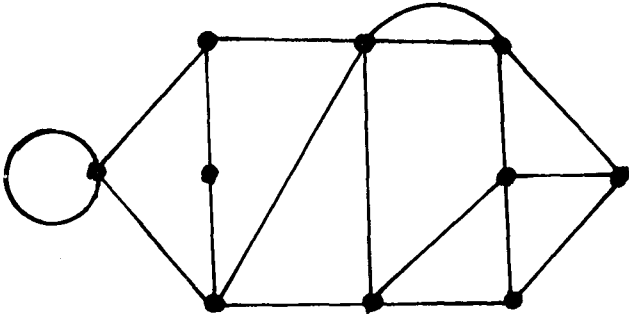
[أنظر التمرينين (10) و (11) من مجموعة تمارين (2-4) .]

تمارين (2-4)

- (1) ماهي قيم m و n بحيث يكون $K_{m,n}$ بيانا أوليريا؟ هل يمكن ان يكون W_n بيانا أوليريا؟ ولماذا؟
- (2) اثبت النتيجة (2-2).
- (3) برهن على أن بيانا متصلا G يكون أوليريا اذا واذا فقط أمكن تجزئة عائلة حافته الى دوائر منفصلة بالنسبة للحافات متنى متنى .
- (4) اذا كان G بيانا فيه درجة كل رأس لا تقل عن 2 . فاثبت أن G يحوي دائرة .
- (5) اتبع خوارزمية فلوري لايجاد درب أوليري للبيان المعطى في الشكل (2-21) .
- (6) جد تغطية صغرى للبيان المعطى في الشكل (2-22) .



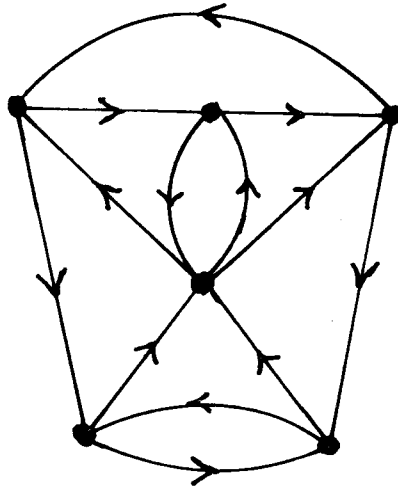
شكل (2-21)



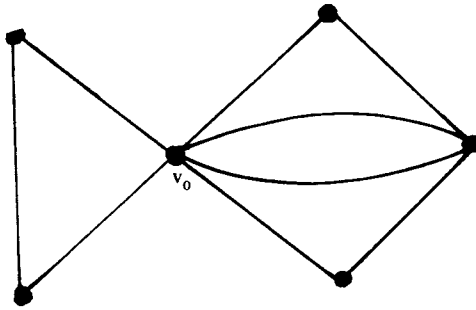
شكل (2 - 22)

- (7) اذا كان G بياناً أولورياً بسيطاً . فاثبت أن بيان المناقلة $I(G)$ هو بيان أولوري . وهل ان العكس صحيح أيضاً ؟ ولماذا ؟
- (8) اذا كان G بياناً متصلًا ومحتويًا على k ، $k \geq 4$ ، من الرؤوس الفردية الدرجة . فاثبت ان G تغطيتين صغيرين مختلفتين على الأقل .
- (9) اثبت ان كل مجموعة قاطعة لبيان أولوري تتكون من عدد زوجي من الحافات
- (10) اذا كان D بياناً موجهاً بحيث ان $\rho^+(v) \geq 1$ ، $\rho^-(v) \geq 1$ لكل رأس v في D . فاثبت ان D يحتوي على دائرة موجهة .
- (11) برهن على المبرهنة (2-14) باستعمال التمرين (10) واتباع طريقة مماثلة لطريقة اثبات المبرهنة (2-12) .
- (12) اثبت ان البيان الموجه D المعطى في الشكل (2-23) هو بيان أولوري موجه . ثم جد دار موجهة تحتوي على كل الحافات الموجهة في D .

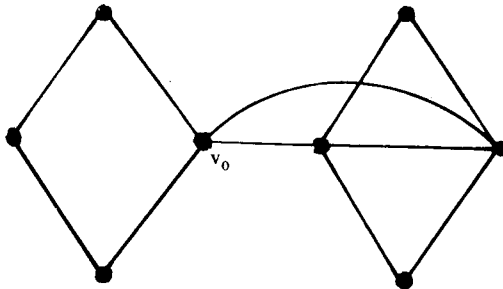
- (13) يقال لبيان أولوري انه قابل الاجتياز كيفياً (arbitrary traversable) من الرأس v_0 اذا أعطت الطريقة الآتية دائماً درياً أولورياً : ابدأ من v_0 ومر على حافة واقعة عليه . وعند الوصول الى رأس u مر بشكل كيفي على أية حافة لم يسبق ان مررت عليها . واستمر هكذا الى ان تمر على كل حافة وتعود الى v_0 . اثبت ان البيان المعطى في شكل (2-24) قابل الاجتياز كيفياً من v_0 . هل ان البيان المعطى في شكل (2-25) قابل الاجتياز كيفياً من الرأس v_0 ؟ أو من أي رأس آخر ؟



شکل (2 - 23)



شکل (2 - 24)



شکل (2 - 25)

(*14) برهن على ان بيانا أولبريا G هو بيان قابل الاجتياز كيفيا من الرأس v_0 اذا واذا فقط كل دائرة في G تحوي v_0 .

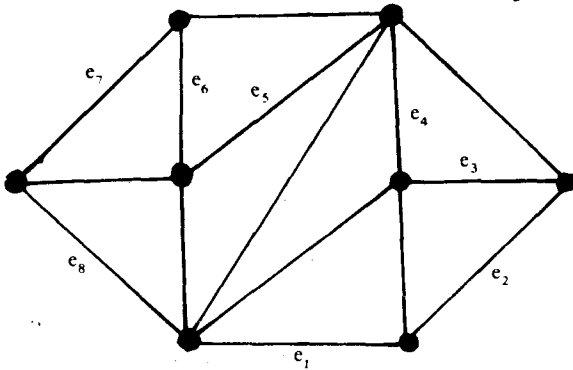
❀ (6 - 2) البيانات الهملتونية (Hamiltonian Graps)

تميز البيانات الاويلرية باحتوائها على دائرة تمر بكل حافة مرة واحدة فقط . والمسألة التي تتبادر الى الذهن . والتي تشابه مسألة أولبر . هي استبدال كلمة حافة بكلمة رأس . أي دراسة البيانات التي تحتوي على دائرة تمر بكل رأس مرة واحدة فقط . يطلق على مثل هذه البيانات بيانات هملتونية . كل البيانات التي سنذكرها في هذا المجال هي بيانات منتهية .

ليكن G بيانا بسيطاً متصلاً . يقال لداره بسيطة في G انها دائرة هملتونية اذا كانت محتوية على كل رأس من رؤوس G . ويقال لـ G انه بيان هملتوني اذا وجدت فيه دائرة هملتونية . فالبيان في الشكل (26 - 2) هو بيان هملتوني . لان

$$(e_1, e_2, \dots, e_8)$$

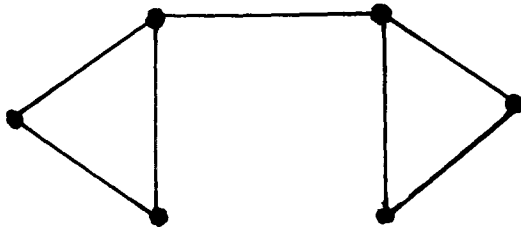
هي دائرة هملتونية لهذا البيان .



شكل (26 - 2)

يطلق على بيان بسيط G الذي يحتوي على درب بسيط يمر مرة واحدة فقط في كل رأس في G بيانا شبه هملتوني (semi Hamiltonian) . فالبيان في شكل (27 - 2) هو بيان شبه هملتوني ولكنه ليس هملتونياً . ويطلق على أي درب بسيط

بمرمرة واحدة فقط بكل رأس من رؤوس البيان درباً هملتونياً. واضح أن كل بيان هملتوني هو بيان شبه هملتوني ، لان البيان الهملتوني يجب ان يحتوي على دائرة هملتونية ، أما البيان شبه الهملتوني فيجب ان يحتوي على درب هملتوني ، وطبيعي أن الدارة الهملتونية تحتوي على درب هملتوني .



شكل (2 - 27)

لقد لاحظنا في البند السابق ان هنالك شرطاً ضرورياً وكافياً لبيان متصل لكي يكون بياناً أولبرياً . لكن ايجاد شروط ضرورية وكافية لبيان متصل لكي يكون بياناً هملتونياً مسألة لاتزال غير محلولة بشكل كامل ، وكل ما هو معروف لحد الان هو وجود شروط كافية خاصة (اي ليست كلها ضرورية) او شروط ضرورية غير كافية بصورة عامة . ونقدم فيما يأتي بعض المبرهنات المهمة في هذا الموضوع .

لنفرض ان G بيان متصل بسيط برتبة n ، $n \geq 3$ ، وليكن $P(v_0, v_k)$ درباً بسيطاً في G من v_0 الى v_k طوله k . ولنفرض ان رؤوس $P(v_0, u_k)$ هي بالترتيب

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k).$$

لنرمز بـ H للبيان المقطعي على مجموعة الرؤوس $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$

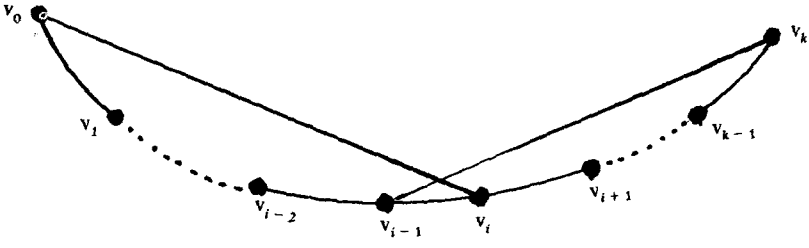
اذا كانت درجة الرأس v_0 في H هي $\rho'(v_0)$ ودرجة الرأس v_k في H هي $\rho'(v_k)$ ، وكان

$$\rho'(v_0) + \rho'(v_k) > k,$$

فان هنالك على الاقل حافة واحدة $[v_0, v_i]$ بحيث تقابلها حافة $[v_{i-1}, v_k]$. وهكذا ، نستنتج وجود دائرة بسيطة رؤوسها بالترتيب هي

$$(v_0, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_0)$$

كما موضح في الشكل (2 - 28) .



شكل (28-2)

وهكذا، إذا كان $\rho'(v_0) + \rho'(v_k) > k$ فإن H هوبان هملتوني .
 إذا كان الدررب البسيط $P(v_0, v_k)$ أطول دررب بسيط في G ، فإن
 $\rho(v_0), \rho(v_k)$ حيث أن $\rho(v_k) = \rho'(v_k), \rho(v_0) = \rho'(v_0)$ هما بالترتيب درجتا
 v_0, v_k في البيان G . وعندئذ نحصل على المبرهنة :

مبرهنة (2-15) : إذا كان $P(v_0, v_k)$ أطول دررب بسيط في بيان متصل
 بسيط، وكان طوله k يحقق المتباينة .
 $\rho(v_0) + \rho(v_k) > k$

فإن البيان المقطعي على مجموعة رؤوس $P(v_0, v_k)$ هوبان هملتوني .

مبرهنة (2-16) : البيان المقطعي على مجموعة رؤوس أطول دررب بسيط لبيان
 متصل بسيط G يكون هملتونياً فقط عندما يكون G بياناً هملتونياً .

البرهان : ليكن البيان المقطعي H على مجموعة رؤوس أطول دررب بسيط $P(v_0, v_k)$
 في G هملتونياً، بما أن G بيان متصل فإنه إذا لم يكن H كل البيان G فيجب
 أن تكون هنالك حافة $[v_i, w]$ ، حيث v_i رأس في H و w رأس ليس في H .
 وجود هذه الحافة يؤدي الى وجود دررب بسيط احدى نهايتيه w وطوله اكثر من طول
 $P(v_0, v_k)$ بواحد، وهذا يناقض كون $P(v_0, v_k)$ أطول دررب بسيط في G .
 لذلك، فإن $H = G$

مبرهنة (2-17) : أي بيان بسيط G اما أن يكون هملتونياً أو يكون الطول k
 لا طول دررب بسيط في G يحقق

$$\rho_1 + \rho_2 \leq k,$$

حيث أن ρ_1 و ρ_2 هما الدرجتان الصغيرتان من بين درجات رؤوس G .
البرهان: من المبرهنتين (2 - 15) و (2 - 16) اما أن يكون G هملتونياً أو يكون

$$\rho(v_0) + \rho(v_k) \leq k, \quad \dots \dots (1)$$

حيث ان v_0 و v_k نهايتي أطول درب بسيط. ولكن (1) تؤدي الى

$$\min \{ \rho(v_i) + \rho(v_j) \} \leq k$$

لكل $v_i, v_j \in V(G)$ إذاً

$$\rho_1 + \rho_2 \leq k$$

من المبرهنة السابقة نحصل على المبرهنة الآتية التي تعود الى اور (O.Ore, 1960):

مبرهنة (2 - 18): ليكن G بياناً متصلاً بسيطاً برتبة $n \geq 3$ ،
 (أ) إذا كان

$$\rho(v) + \rho(u) \geq n - 1,$$

لكل رأسين u و v في G ، فان G يحتوي على درب هملتوني.

(ب) إذا كان

$$\rho(v) + \rho(u) \geq n$$

لكل رأسين u و v في G ، فان G بيان هملتوني.

تعود المبرهنة الآتية الى العالم المشهور ديراك (G.A. Dirac, 1952).
 وهي حالة خاصة من مبرهنة أور.

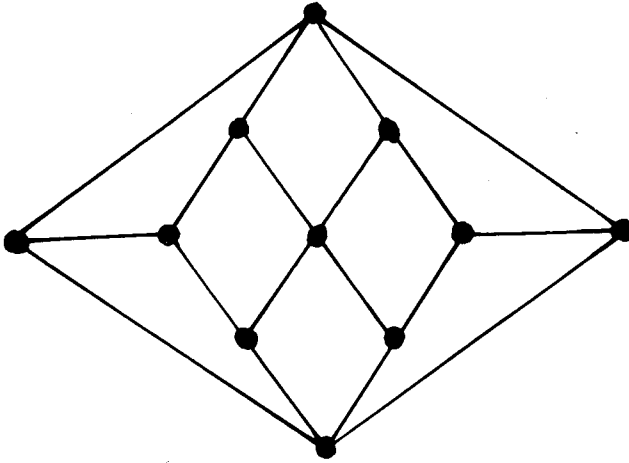
مبرهنة (2 - 19): إذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً برتبة $n \geq 3$ ،
 وكان $\rho(v) \geq \frac{1}{2}n$ لكل رأس v في G ، فان G بيان هملتوني.

في العشرين سنة الأخيرة وجد علماء نظرية البيانات العديد من المبرهنات على البيانات
 الهملتونية. سواء كانت موجهة أو غير موجهة. ويمكن للقاريء الاطلاع على بعضها في

المصدر [3]

تمارين (2-5)

- (1) اثبت ان W_n هوبان هملتوني لكل قيم n . هل أن بيان بيترسن شبه هملتوني؟ ولماذا
- (2) برهن على أنه اذا كان G بيانا ثنائي التجزئة برتبة فردية ، فان G غير هملتوني .
- (3) يطلق على البيان المعطى في الشكل (2 - 29) بيان هيرشيل (Herschel) .
اثبت ان هذا البيان ثنائي التجزئة ، ثم اثبت انه غير هملتوني .



شكل (2 - 29) بيان هيرشيل

- (4) عين قيم m و n بحيث ان $K_{m,n}$ بيان هملتوني .
- (5) جد بيانا أولبريا غير هملتوني ، وجد بيانا هملتونيا غير أولبري . ماذا يمكن ان نقول عن البيانات التي هي أولبرية وهملتونية في نفس الوقت ؟
- (6) بين انه لا يمكن استبدال الشرط $\left[\rho(v) \geq \frac{1}{2}n \right]$ في مبرهنة ديراك بالشرط $\left[\rho(v) \geq \frac{1}{2}(n-1) \right]$ وذلك بايجاد بيان يحقق الشرط الاخير لكل رأس v ولكنه غير هملتوني .
- (*7) هل يمكن للحصان في الشطرنج أن يمر مرة واحدة فقط على كل مربع في لوحة الشطرنج ، التي هي 8×8 ، ويعود الى المربع الذي بدأ منه ؟ [تلميح : مثل كل مربع برأس ؛ يكون رأسان متجاورين اذا واذا فقط أمكن للحصان الانتقال من

أحدهما الى الآخر وفق قواعد لعبة الشطرنج] .

(8) يقال لبيان متصل بسيط انه بيان ثيتا (theta graph) اذا كان فيه رأسان غير متجاورين كل منهما بدرجة 3 . وكل من رؤوسه الباقية بدرجة 2 . اثبت ان كل بيان ثيتا هو غير هملتوني . هل هو شبه هملتوني ؟

(9) يقال لبيان بسيط انه بيان متصل -2 (2 - connected graph) اذا واذافقط كل رأسين مختلفين فيه يقعان على دائرة . برهن على أن كل بيان هملتوني هو متصل - 2 . هل يوجد بيان متصل - 2 غير هملتوني ؟

(*10) برهن على ان كل بيان متصل - 2 غير هملتوني يحتوي على بيان ثيتا كبيان جزئي منه .

الفصل الثالث

The Trees الأشجار

هنالك نوع من البيانات البسيطة والمهمة جدا بحد ذاتها في نظرية البيانات وفي تطبيقاتها : تلك البيانات هي الأشجار . فهي مهمة في نظرية البيانات لأن بساطتها الكبيرة تمكننا من دراسة بعض التحزرات في نظرية البيانات على الأشجار أولاً ثم الحصول على الجواب عن مدى صحة هذه التحزرات على البيانات الأخرى بصورة عامة

سيتضمن هذا الفصل بعض التعاريف لمفاهيم ذات صلة بالأشجار . مع بعض خواص ومميزات الأشجار . ثم نشرح مسألة حساب عدد الأشجار المولدة لبيان متصل ، وطريقة إيجاد تلك الأشجار . وأخيراً . نشرح اشجار القياس الكلي الأصغر وكيفية الحصول عليها مع الإشارة الى بعض استخداماتها .

(3-1) بعض مميزات الأشجار

لقد سبق ان عرفنا مفهومي الشجرة والشجرة المولدة لبيان متصل وكان ذلك في البند (2-3) . فعرفنا الشجرة بأنها بيان متصل لا يحتوي على أية دارة . بالطبع ، بموجب هذا التعريف الشجرة بيان بسيط . كما يقال لأي بيان لا يحتوي على دارات بأنه غابة (forest) واضح ان مركبات أية غابة هي أشجار .

وهكذا . فان الشجرة هي غابة مكونة من مركبة واحدة . ففي الشكل (3-1) أعطيت غابة مكونة من ثلاث مركبات وهي الأشجار T_1, T_2, T_3 .

تعريف الشجرة ليس وحيداً . فهناك العديد من التعاريف المتكافئة بعضها مع بعض . كما منصوص عليها في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (3-1) : ليكن T بياناً عدد رؤوسه n . العبارات الآتية متكافئة :

(1) T هي شجرة .

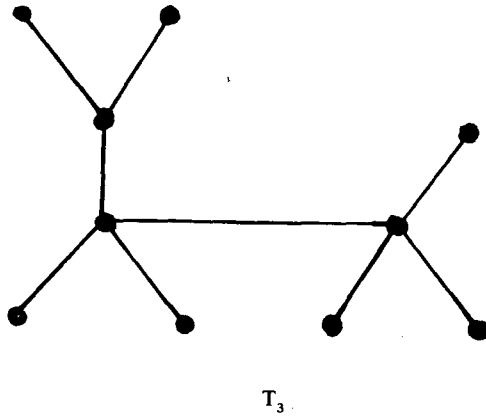
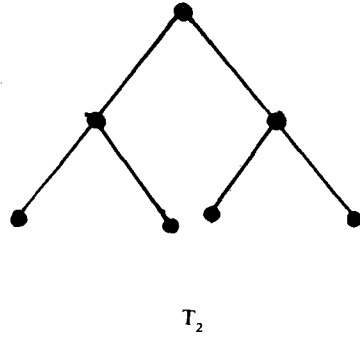
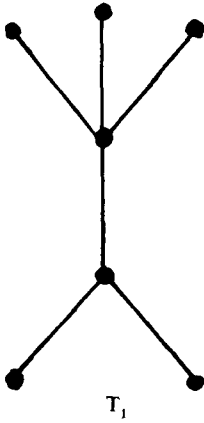
(2) يوجد بين كل رأسين في T درب وحيد .

(3) T متصل وكل حافة فيه هي برزخ.

(4) T متصل وعدد حافته $(n - 1)$

(5) عدد حافات T هو $(n - 1)$ ولا يحتوي على دارات.

(6) لا يحتوي T على دارات، ولكن اذا وصلنا أي رأسين غير متجاورين فيه نحصل على بيان يحتوي على دائرة واحدة فقط.



شكل (3-1)

$$(1) \Rightarrow (2)$$

ليكن u و v أي رأسين في T . لما كان T متصلاً . فانه يوجد درب واحد على الاقل بين u و v . لنفرض أن P_1 و P_2 دربان مختلفان بين u و v . اذاً . توجد حافة في أحدهما لاتنتهي الى الاخر . ولنفرض ان الحافة $[x, y]$ في P_1 وليست في P_2 . ان هذا الفرض يؤدي الى وجود درب P بين الرأسين x و y لا يحتوي على الحافة $[x, y]$. وعليه . فان P يكون مع الحافة $[x, y]$ دائرة في T . مما يناقض كون T شجرة . وبذلك فان $P_1 = P_2$. وهكذا يوجد بين كل رأسين في T درب وحيد .

$$(2) \Rightarrow (3)$$

واضح أن \bar{T} متصل لتكن $e = [u, v]$ أية حافة في T . البيان T' الناتج من T بازالة e هو غير متصل . لانه اذا كان متصلاً فان ذلك يؤدي الى وجود درب بين u و v في T' . وهذا بدوره يؤدي الى وجود دربين مختلفين بين u و v في T . مما يناقض وجود درب وحيد بين كل رأسين في T . وعليه . فان e برزخ .

$$(3) \Rightarrow (4)$$

سنبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على n ان عدد حافات T هو $(n - 1)$

واضح انه اذا كان $n=1$ فان عدد حافات T هو 0 . واذا كان $n=2$ فان عدد حافات T هو 1 . والآن . نفرض أن (3) تؤدي الى (4) عندما يكون عدد رؤوس T أقل من n . ولناخذ الحالة عندما يكون عدد رؤوس T هو n . بما أن كل حافة في T هي برزخ . فان ازالة حافة e من T تؤدي الى مركبتين T_1 و T_2 . بما ان كلاً من T_1 و T_2 متصل . وان كل حافة في أي منهما هي برزخ . فانه بموجب فرض الاستقراء الرياضي يكون عدد حافات T_1 هو $(n_1 - 1)$ وعدد حافات T_2 هو $(n_2 - 1)$. حيث أن $n_1 \cdot n_2$ عدد رؤوس T_1, T_2 . على الترتيب . اذاً . عدد حافات T هو

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1$$

$$(4) \Rightarrow (5)$$

نحتاج الى أن نبرهن على أن T لا يحتوي على دارات . فاذا احتوى T على دائرة . فان ازالة أية حافة من هذه الدارة يؤدي الى بيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافته $n-2$.

ولكن هذا يناقض المبرهنة (2-5) . لذلك . فان T لا يحتوي على دارات .

(6) \Rightarrow (5)

نبرهن أولاً على ان T متصل . اذا كانت T_1, T_2, \dots, T_k مركبات T . فان كلاً من هذه المركبات خال من الدارات ومتصل . وبذلك فانه شجرة . ولما كان (4) \Rightarrow (1) . فان عدد حافات T_i هو $(n_i - 1)$. حيث إن n_i عدد رؤوس T_i . لكل $i = 1, 2, \dots, k$ وعليه . فان عدد حافات T هو $(n - k)$. ومنها نستنتج ان $k = 1$. اذاً . T بيان متصل . وهو بذلك شجرة . ولما كان (2) \Rightarrow (1) . فان هنالك درجاً وحيداً بين كل رأسين في T . فاذا كان u و v رأسين غير متجاورين في T . فان اضافة حافة $[u, v]$ الى T يؤدي الى تكوين دائرة واحدة فقط بسبب وجود درب وحيد بين الرأسين u و v .

(1) \Rightarrow (6)

اذا لم يكن T متصلاً . فان اضافة حافة تصل بين رأسين في مركبتين مختلفتين لا يؤدي الى تكوين دائرة في T . مما يناقض (6) . ولذلك . فان (6) تؤدي الى كون T متصلاً . أي ان T شجرة . وبهذا يتم اثبات المبرهنة .

من المبرهنتين (1-3) و (1-1) نحصل على النتيجة الآتيتين .

نتيجة (1-3) : عدد حافات الغابة المكونة من n من الرؤوس و k من المركبات هو $(n - k)$.

نتيجة (2-3) : يوجد رأسان على الاقل بدرجة 1 في كل شجرة عدد رؤوسها لا يقل عن 2 .

سنطلق على كل رأس بدرجة 1 في شجرة نهاية (end) .

مبرهنة (2-3) : كل شجرة لها مركز واحد أو مركزان متجاوران .

البرهان : المبرهنة صحيحة عندما تكون الشجرة K_1 أو K_2 . لتكن T أية شجرة عدد رؤوسها n ، $n \geq 3$. واضح أن الاختلاف المركزي $R(v)$ للرأس v في T هو المسافة بين v ونهاية T . كما أن أية نهاية لـ T لا يمكن أن تكون مركزاً . فاذا كانت T' الشجرة الناتجة من T بحذف كل نهاية مع الحافة الواقعة عليها . فان الاختلاف المركزي $R'(v)$ في T' لرأس v في T يقل بواحد عن الاختلاف المركزي $R(v)$ في T لنفس الرأس v .

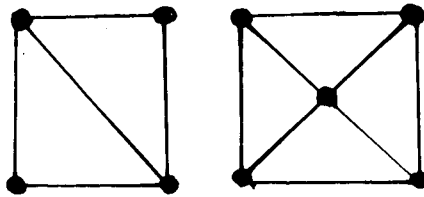
وعليه . اذا كان v_0 مركزاً لـ T . فان v_0 نفسه مركز لـ T' .

اذا كررنا تطبيق حذف نهايات الشجرة . عندما لا تكون K_1 او K_2 . فاننا سوف نحصل على تتابع من أشجار لها نفس المراكز . ولما كانت T منتهية . فاننا سوف نتوصل اخيراً الى K_1 أو K_2 . فاذا حصلنا على K_1 . فان الرأس الوحيد في K_1 هو المركز الوحيد لـ T . واذا حصلنا على K_2 . فان رأسي K_2 هما مركزاه . وهما في الوقت نفسه مركزا T . ■

وقد سبق أن عرفنا الشجرة المولدة لبيان متصل G على أنها شجرة لـ G تحتوي على كل رؤوسه . بالطبع لكل بيان متصل توجد على الاقل شجرة مولدة واحدة . فاذا كان G متصلاً ومحتويًا على دائرة . فيمكن ازالة حافة من تلك الدائرة . فان كان هنالك دائرة اخرى نزيل منها احدى حافاتها . وهكذا حتى لا تبقى في G أية دائرة . وعندئذ يكون البيان الجزئي الناتج شجرة مولدة لـ G .

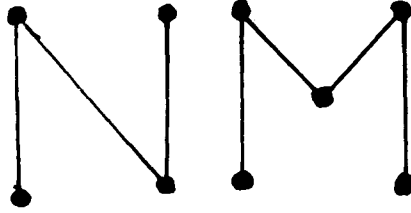
وتعرف الغابة المولدة لبيان غير متصل G . بانها غابة لـ G محتوية على كل رؤوس G . واضح انه اذا كان G مكونا من K من المركبات . فان اية غابة F لـ G تتكون من K من المركبات . كل منها شجرة مولدة لاحدى مركبات G . فمثلاً . البيان الجزئي المبين في الشكل (3 3) هو غابة للبيان المعطى في

الشكل (3 2)



G

شكل (3 2)



F

شكل (3-3)

ليكن G بياناً عدد رؤوسه n وعدد حافته m وعدد مركباته k . يطلق على العدد

$$\gamma(G) = m - n + k$$

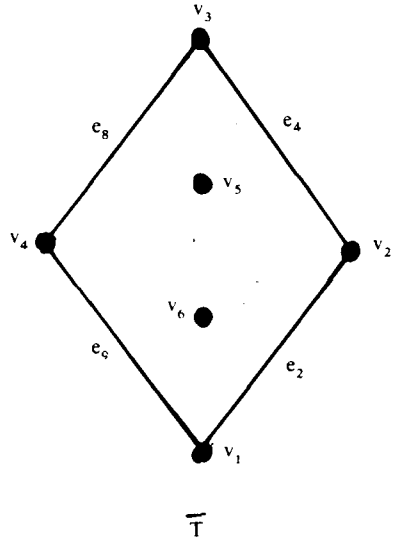
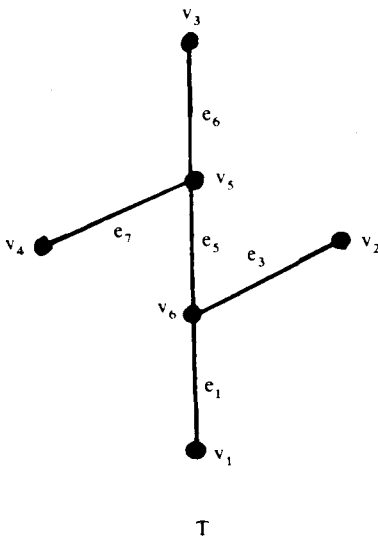
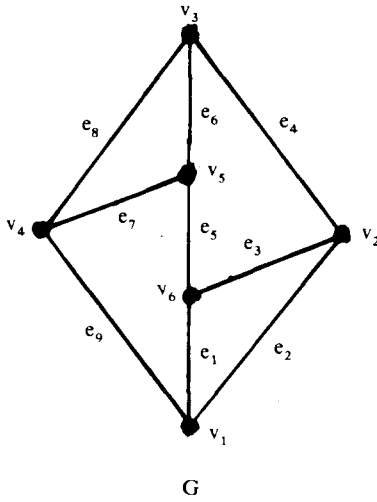
الرقم الدوراني (cyclomatic number) أو مرتبة الدارات (the circuit rank) للبيان G . فإذا كان G متصلاً، فإن

$$\gamma(G) = m - n + 1$$

وعندما يكون البيان شجرة T . فإن $\gamma(T) = 0$. وذلك بموجب (4) من البرهنة (1-3). بالطبع $\gamma(G)$ لأي بيان G هو عدد غير سالب بموجب نتيجة (1-2).

إذا كانت T شجرة مولدة لبيان متصل G . فإنه يطلق على $\bar{T} = G - T$ تنمة الشجرة (cotree) للبيان G . واضح ان عدد حافات تنمة الشجرة لبيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافته m هو $(m - n + 1)$. وهو الرقم الدوراني للبيان. يطلق عادة على كل حافة في الشجرة المولدة T غصناً (branch). كما يطلق على كل حافة في تنمة الشجرة \bar{T} وتر (chord) الشجرة T .

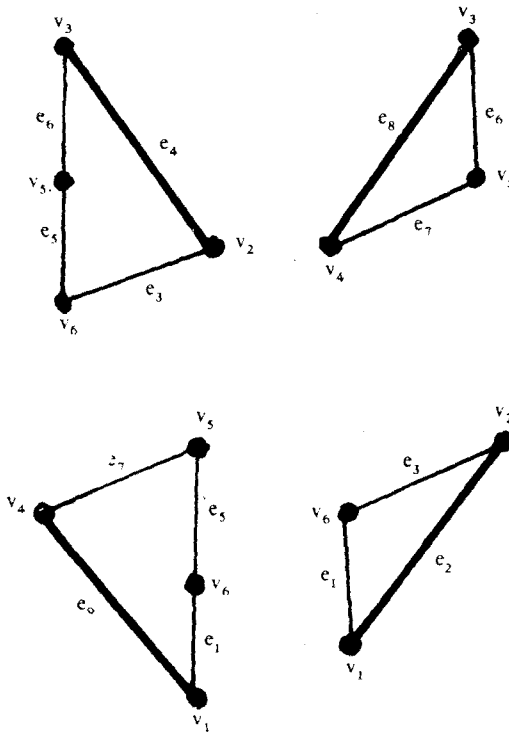
الشكل (3-4) يبين شجرة مولدة T مع تنمة الشجرة \bar{T} للبيان المعطى G



شكل (3 - 4)

وبالمثل . نعرف تمة الغابة لبيان غير متصل G . فاذا كانت F غابة مولدة للبيان G . فان تمة الغابة (coforest) هي البيان الجزئي المتمم F . وهو الذي ينتج من G بازالة كل حافات F .

إذا كانت F غابة لبيان G . فإن إضافة إحدى حافات \bar{F} إلى F يكون دائرة بسيطة واحدة فقط . و ذلك بموجب (6) من المبرهنة (3-1) . وبذلك فإن حافات \bar{F} . عندما تضاف إلى F واحدة في كل مرة . تكون $(m - n + k)$ من الدوائر البسيطة المختلفة . حيث إن n عدد رؤوس G و m عدد حافته و k عدد مركباته . يطلق على مجموعة هذه الدوائر اسم النظام الأساس للدوائر المشاركة مع F . ولهذا النظام من الدوائر أهمية كبيرة في استخدامات نظرية البيانات في تحليل الشبكات الكهربائية . ولتوضيح هذا النظام من الدوائر رسمنا في الشكل (3-5) الدوائر الأساسية المشاركة مع الشجرة المولدة T المبينة في الشكل (3-4) . وقد أُشير إلى الوتر المضاف بخط سميك .



شكل (3-5)

واضح . ان عدد العناصر في اي نظام أساسي للدارات يساوي الرقم الدوراني لذلك البيان .

كما ان هنالك علاقة وثيقة بين تتمات الغابات مع الدارات [انظر تمرين (6) من مجموعة تمارين (3 - 1)] . فان هنالك علاقة مشابهة بين الغابات المولدة مع المجموعات القاطعة [انظر تمرين (5) من مجموعة تمارين (3-1)] . لذلك . فانه من المناسب تعريف مرتبة المجموعات القاطعة . فاذا كان G بياناً وكانت F غابة مولدة لـ G . فاننا نعرف مرتبة المجموعات القاطعة (the cut-set rank) للبيان G بانها عدد حافات F . ونرمز لهذه المرتبة بـ $\delta(G)$. اذاً $\delta(G) = n - k$. حيث ان n هو عدد رؤوس G و k عدد مركباته .

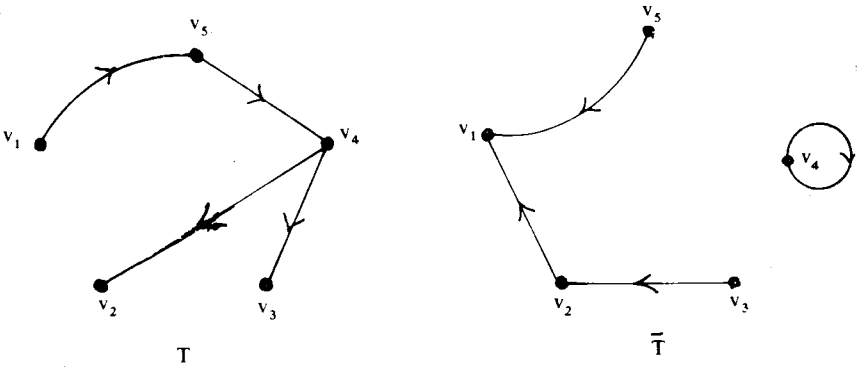
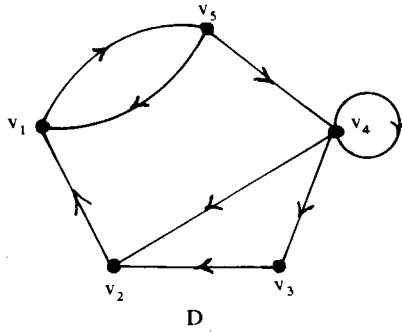
بموجب (3) من المبرهنة (3 - 1) . فان عملية ازالة أية حافة e من غابة مولدة F لبيان G تؤدي الى زيادة عدد مركبات F بواحد فقط . في الواقع ان ازالة e من F يؤدي الى تجزئة مجموعة الرؤوس لاحدى الاشجار في F ولتكن الشجرة T . الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 . واضح ان T هي شجرة مولدة لاحدى مركبات البيان G . ولتكن المركبة H بالطبع . هي حافة في T . وعليه . فان مجموعة كل حافات H التي تصل رأساً من V_1 برأس من V_2 هي مجموعة قاطعة لـ H . وهي بذلك مجموعة قاطعة لـ G . هذه المجموعة القاطعة تحتوي على غصن واحد فقط . وهو e . من الغابة F . ولما كان لدينا $n - k$ من الاغصان في F . فانه يمكننا الحصول على $n - k$ من المجموعات القاطعة المختلفة . كل منها تحتوي على غصن واحد فقط من F . علماً بان عدد رؤوس G و k عدد مركباته . يطلق على هذه المجموعات القاطعة النظام الاساسي للمجموعات القاطعة المشاركة مع F . وتوضيحا لذلك . فان النظام الاساسي للمجموعات القاطعة المشاركة مع الشجرة المولدة T للبيان G المعطى . في الشكل (3 - 4) هو :

$$\{ e_1, e_2, e_6 \} , \{ e_3, e_2, e_4 \} , \{ e_5, e_4, e_6 \} , \{ e_6, e_4, e_8 \} , \{ e_7, e_8, e_6 \}$$

نتعامل في كثير من التطبيقات مع الغابات لبيانات موجهة ولذلك نجد من الضروري الاشارة اليها هنا . تعرف الغابة (تنمة الغابة) لبيان موجه D على انها الغابة (تنمة الغابة)

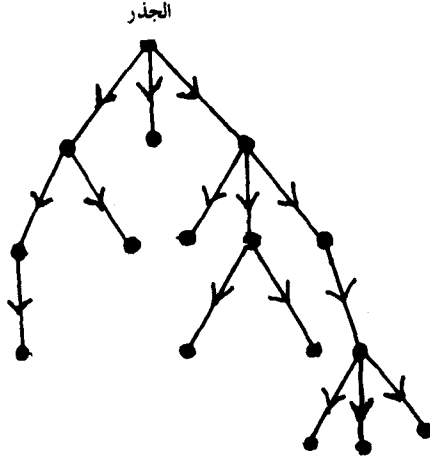
لبيان الناتج من D باهمال اتجاهات الحافات الموجهة. فمثلاً. الشكل (3 - 6) يوضح بياناً موجهاً D مع شجرة T وتممة الشجرة \bar{T} .

وهكذا. نعمم بقية المفاهيم المارة الذكر في هذه الفقرة على البيانات الموجهة. ولكن في بعض التطبيقات نحتاج الى ان نأخذ بنظر الاعتبار اتجاه الحافات في شجرة ما. وعندئذ نحتاج الى تعريف المزيد من المفاهيم. فاذا كان D بياناً موجهاً. فاننا نقول لرأس انه جذر (root) لـ D اذا كان هنالك درب موجه من v الى كل رأس آخر في D . ففي البيان الموجه D المبين في الشكل (3 - 6). كل رأس هو جذر لـ D . لان D بيان متصل بشدة.



شكل (3 - 6)

وبهذا الخصوص تعرف الشجرانية (the arborescence) على أنها شجرة للبيان
 الموجه تحتوي على جذر، ولذلك يقال لها أحياناً شجرة جذرية (rooted tree).
 فمثلاً، الشجرة T المبينة في الشكل (3-6) هي شجرانية لـ D ، لأن الرأس v_1
 هو جذر T . ومعروف أن شجرة العائلة (family tree) هي شجرانية. [انظر الشكل
 .[(7-3)



شكل (3-7) شجرة العائلة

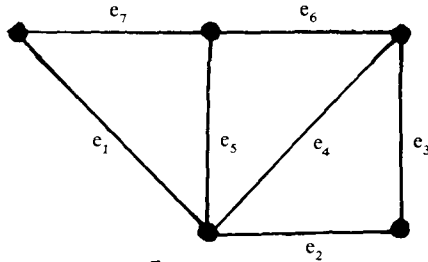
تمارين (3-1)

- (1) جد كل الأشجار غير المتشاكلة مثنى مثنى التي لها 5 رؤوس .
- (2) ارمز لرؤوس K_4 بـ v_1, v_2, v_3, v_4 وارمز لحافاته بـ e_1, e_2, \dots, e_6
- ثم جد الأشجار المولدة للبيان التام K_4 . ماهي العلاقة بين عدد رؤوس K_4
 وعدد أشجاره هذه ؟
- (3) برهن النتيجةين (3-1) و (3-2).
- (4) اثبت ان كل شجرة هي بيان ثنائي التجزئة.
- (5) برهن على أن كل دائرة في بيان G تشترك بحافة واحدة على الأقل مع كل تنمه
 غابة لـ G .
- (6) احسب مرتبة الدارات ومرتبة المجموعات القاطعة لكل من بيان بيترسن، $K_n, W_n, K_{m,n}$.

(7) جد مراكز كل من الأشجار في الغابة المبينة في الشكل (3-1) . وجد نصف قطر وقطر كل منها .

(8) يعرف التحويل الشجري بالعملية الآتية : إذا كانت T شجرة مولدة لبيان متصل G . وكانت e حافة في T . فيمكن الحصول من T على شجرة T تحتوي على e وذلك بإضافة e إلى T وإزالة حافة تنتمي إلى T من الدارة الوحيدة المتكونة . بين كيفية الحصول على شجرة مولدة T_2 من شجرة معطاة T_1 بما لا يزيد على $(n-1)$ من التحويلات الشجرية المتتالية . حيث أن n عدد رؤوس G .

(9) ليكن G بياناً متصلاً رتبته n وحافته e_1, e_2, \dots, e_m . تعرف مصفوفة الدارات (the cycle matrix) $B = [b_{ij}]$ بأنها المصفوفة بسعة $l \times m$ بحيث أن $b_{ij} = 1$ إذا كانت e_j حافة في الدارة البسيطة C_i . و $b_{ij} = 0$ إذا لم تكن e_j حافة في الدارة البسيطة C_i . حيث أن C_1, C_2, \dots, C_l هي الدارات البسيطة في G . جد مصفوفة الدارات للبيان المعطى في الشكل (3-8) .

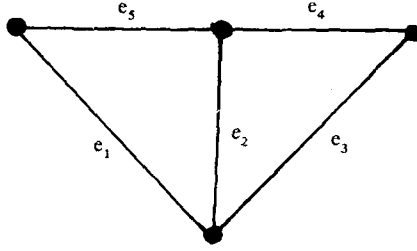


شكل (3 - 8)

(10*) في حقل الأعداد الصحيحة بمعيار 2 . إثبت أن مرتبة مصفوفة الدارات B لبيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافته m لا تقل عن $m - n + 1$.

(11) ليكن G بياناً متصلاً بسيطاً رتبته n وحافته e_1, e_2, \dots, e_m . تعرف مصفوفة المجموعات القاطعة (the cut-set matrix) $Q = [q_{ij}]$ بأنها المصفوفة بسعة $h \times m$ بحيث أن $q_{ij} = 1$ إذا كانت e_j حافة في المجموعة القاطعة Q_i ،

و $q_{ij} = 0$ إذا لم تكن e_j حافة في المجموعة القاطعة Q_i . حيث أن



شكل (3 - 9)

المجموعات القاطعة للبيان G هي كافة المجموعات القاطعة للبيان G . جد مصفوفة المجموعات القاطعة للبيان في الشكل (3 - 9).

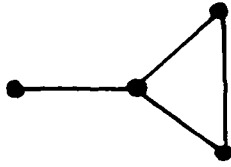
(12*) في حقل الاعداد الصحيحة بمعيار 2. إثبت أن مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان متصل بسيط عدد رؤوسه n لا تقل عن $(n - 1)$.

❖ (2 - 3) تعداد الاشجار :

سيتنصر شرحنا في هذا البند على البيانات البسيطة. إن موضوع تعداد البيانات يهتم بمسألة حساب عدد البيانات البسيطة التي لها خواص معينة ومحددة.

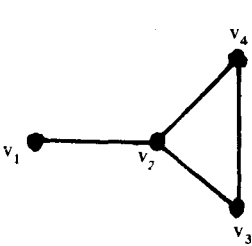
والبيانات التي سوف تكون مدار شرحنا في هذا البند هي البيانات الموسومة (labelled graphs). ويقصد بالبيان الموسوم على أنه بيان G مع تطبيق متباين وشامل (معطى ومعين) من مجموعة الرؤوس $V(G)$ الى مجموعة الاعداد الطبيعية $\{1, 2, \dots, n\}$ ، حيث أن n عدد رؤوس G .

وعلى هذا الاساس، سنرمز لرؤوس بيان موسوم بـ v_1, v_2, \dots, v_n وبطبيعة الحال، يمكن أن نحصل من بيان غير موسوم على العديد من البيانات الموسومة. فالبيان G في الشكل (3 - 10) غير موسوم، اما البيانات في الشكل (3 - 11) فهي بيانات موسومة لنفس البيان G .

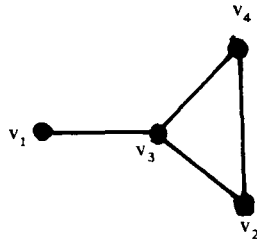


G

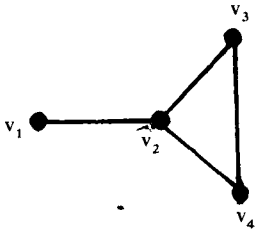
شكل (3 - 10)



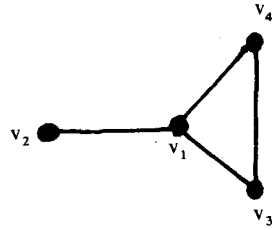
G₁



G₂



G₃



G₄

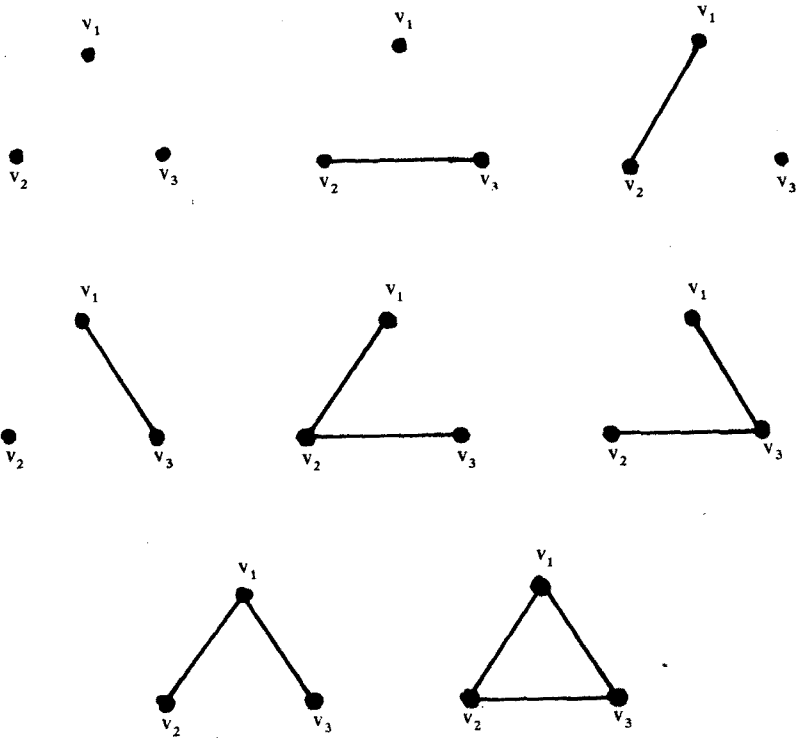
شكل (3 - 11)

وسوف نقول لبيانين موسومين G و G' أنهما متشاكلان إذا وجد تشاكل بين G و G' بحيث يحفظ تسميات الرؤوس ، اي ، عندما نمثل كل حافة بزوج غير مرتب لرأسيه (بالتسميات المعطاة) يكون لدينا $E(G') = E(G)$. ففي الشكل (3 - 11) ، البيان الموسوم G_1 غير متشاكل مع G_2 ، ولكن G_1 متشاكل مع G_3 ، لان

$$E(G_1) = E(G_3) = \{ [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4] \}$$

$$\neq \{ [v_1, v_3], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4] \} = E(G_2).$$

وعند حساب البيانات الموسومة سنحسب البيانات الموسومة المختلفة (اي غير المتشكلة مع بعضها) فقط . ففي الشكل (3 - 12) ، ذكرنا كل البيانات الموسومة المختلفة التي يمكن تكوينها من ثلاثة رؤوس ، ونلاحظ أن عددها هو $2^3 = 8$. ونلاحظ هنا أن هنالك ثلاث أشجار مختلفة رؤوسها v_1, v_2, v_3 ، اي أن K_3 له ثلاث أشجار مولدة



شكل (3 - 12)

لنفرض ان لدينا n من الرؤوس واننا نريد معرفة عدد البيانات الموسومة المختلفة التي يمكن تكوينها والتي لها هذه الرؤوس . اذا كان G ايأ من هذه البيانات ، فان اية حافة اما أن تكون موجودة في G او غير موجودة فيه . ولما كان

لدينا $n(n-1)/2$ من الحافات على n من الرؤوس وان لكل حافة حالتين ،
فانه يمكن تكوين $2^{n(n-1)/2}$ من البيانات الموسومة .وعليه .فان لدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (3-3) : عدد البيانات الموسومة بـ n من الرؤوس هو $2^{n(n-1)/2}$
أي . ان عدد البيانات الجزئية الموسومة من البيان التام K_n هو $2^{n(n-1)/2}$

من طريقة اثبات هذه المبرهنة . نستنتج النتيجة الآتية :

نتيجة (3-3) : عدد البيانات الموسومة بـ n من الرؤوس و m من الحافات هو

$$\binom{n(n-1)/2}{m} .$$

والكي نجد بعض الصيغ لتعداد الاشجار الموسومة المختلفة نحتاج الى بعض المفاهيم
والخواص المعروفة في مبرهنة ذات الحدود . التي نذكرها في ادناه كماخوذات
تاركين براهينها للطالب كتمارين .

مأخوذة (1-3) : لتكن X مجموعة من n من الاشياء المختلفة . ولتكن

n_1, n_2, \dots, n_p اعدادا صحيحة غير سالبة بحيث ان

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n .$$

فان عدد الطرق المختلفة لوضع هذه الاشياء في p من الصناديق X_1, X_2, \dots, X_p
بحيث نضع n_i من الاشياء في الصندوق X_i لكل $i = 1, 2, \dots, p$ هو

$$\frac{n!}{(n_1)! (n_2)! \dots (n_p)!} .$$

يرمز لهذا العدد بالرمز ،

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$$

يطلق على المأخوذة الآتية « مبرهنة ذات الحدود » ، ومنها يتبين أن

معامل الحد $(a_1)^{n_1} (a_2)^{n_2} \dots (a_p)^{n_p}$ في مفكوك ذات الحدود هو $(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$$

مأخوذة (2-3) : إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_p اعدادا حقيقية وكان n عددا صحيحاً موجبا . فإن

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p \geq 0} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} (a_1)^{n_1} (a_2)^{n_2} \dots (a_p)^{n_p}$$

لاحظ ان المعامل

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$$

يكون صفرا بالتعريف إلا اذا كان

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n, \quad n_1, n_2, \dots, n_p \geq 0.$$

وسوف نحتاج الى المأخوذة الآتية لاجل اثبات المبرهنة (3-4) .

مأخوذة (3-3) : اذا كان n عددا صحيحاً موجبا ، فإن

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} = \sum_{i: n_i \geq 1} \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_p}$$

نحن الآن مهيمون لتعداد الاشجار الموسومة المختلفة بـ n من الرؤوس ولجل ذلك نثبت المبرهنة الأساسية الآتية .

مبرهنة (3-4) : ليكن $N(n; d_1, d_2, \dots, d_n)$ عدد الاشجار المختلفة T

بالرؤوس v_1, v_2, \dots, v_n التي درجاتها ، بالترتيب ، هي d_1, d_2, \dots, d_n .
عندئذ

$$N(n; d_1, d_2, \dots, d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$$

البرهان : من الواضح أن مجموع درجات رؤوس T هو ضعف عدد الحافات ، اي
انه $2(n-1)$. وعليه

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 1) = 2(n-1) - n = n-2. \quad \dots (1)$$

وهكذا ، فان $N \neq 0$ عندما تحقق الاعداد الصحيحة غير السالبة
 d_1, d_2, \dots, d_n العلاقة (1) . وفيما عدا ذلك يكون $N = 0$.

بدون المساس بعمومية المسألة . يمكننا أن نفرض

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$$

ومنها نستنتج أن $d_{n-1} = d_n = 1$ ، لان كل شجرة تحتوي على نهايتين على الاقل .

عدد الاشجار التي رؤوسها v_1, v_2, \dots, v_n ودرجاتها ، بالترتيب ، هي
 d_1, d_2, \dots, d_n والتي يكون فيها الرأس v_n متجاوراً مع الرأس v_i الذي درجته
 $d_i \geq 2$ ، هو

$$N(n-1; d_1, d_2, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1}).$$

وبذلك ، فان

$$N(n; d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{i: d_i \geq 2} N(n-1; d_1, d_2, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1})$$

ان اكمال البرهان يتم بالاستقراء الرياضي على n . المبرهنة صحيحة عندما $n=2$
والآن نفرض أن $n \geq 3$ وأن المبرهنة صحيحة لأجل $(n-1)$. عندئذ

$$\begin{aligned}
N(n; d_1, d_2, \dots, d_n) &= \sum_{i: d_i \geq 2} N(n-1; d_1, d_2, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1}) \\
&= \sum_{i: d_i \geq 2} \binom{n-3}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_i-2, \dots, d_{n-1}-1} \\
&\quad [\text{بموجب فرض الاستقراء الرياضي}] \\
&= \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1} \\
&\quad [\text{بموجب المأخوذة (3-3)}] \\
&= \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}
\end{aligned}$$

لان $d_n = 1$ وأن $0! = 1$. وبهذا يتم البرهان . ■

من هذه المبرهنة نستنتج العديد من النتائج المفيدة .

نتيجة (3-4) : تعود الى كيلي (1889) - عدد الاشجار المختلفة T

بالرؤوس v_1, v_2, \dots, v_n هو n^{n-2}

البرهان : من المبرهنة (3-4) وباستعمال المأخوذة (3-2) مع وضع

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. يكون عدد الاشجار المختلفة مساوياً لـ

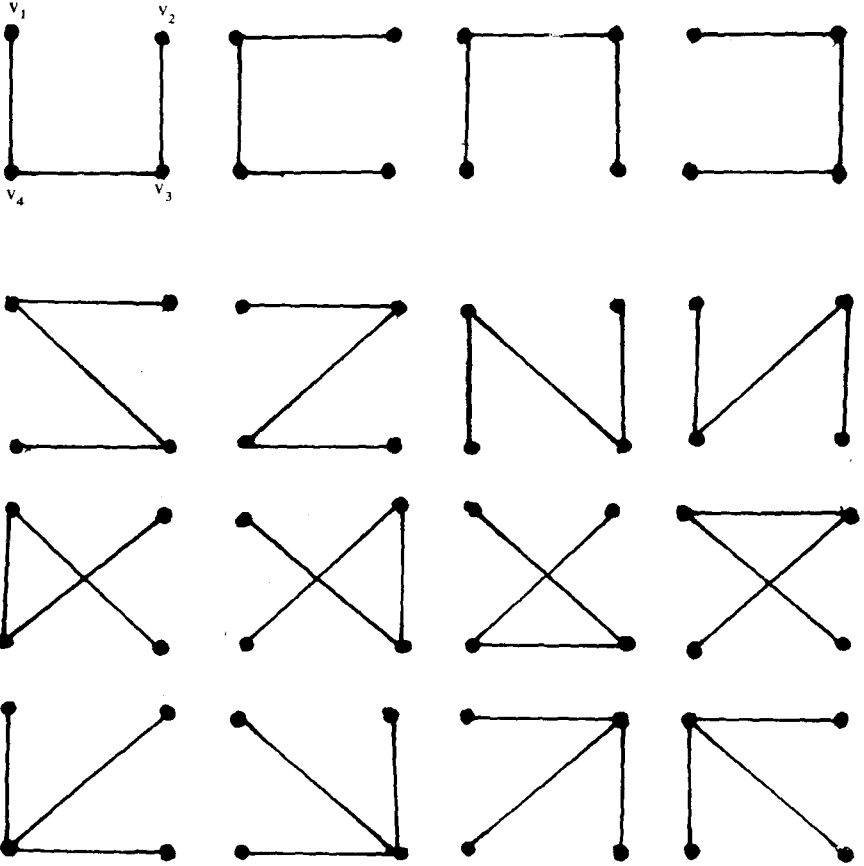
$$\begin{aligned}
\sum_{d_1, \dots, d_n \geq 1} \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} &= (1+1+\dots+1)^{n-2} \\
&= n^{n-2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

بما أن كل شجرة موسومة بـ n من الرؤوس تقابل شجرة مولدة وحيدة للبيان الموسوم

K_n . وبالعكس . كل شجرة مولدة لـ K_n تؤدي الى شجرة موسومة وحيدة بـ n من الرؤوس . فان النتيجة (3-4) تكافيء النتيجة الآتية :

نتيجة (3-5) : عدد الاشجار المولدة لـ K_n هو n^{n-2}

في الشكل (3 - 13) ذكرت جميع الاشجار المولدة للبيان التام K_4 . ونلاحظ أن عددها هو $4^{4-2} = 16$. كما نلاحظ ان بين هذه الاشجار 12 شجرة كل منها متشاكله مع درج بسيط طوله 3 . أما الاشجار الاربعة الباقية فهي متشاكله مع البيان الثنائي التجزئة التام $K_{1,3}$.



شكل (3 - 13) الاشجار المولدة لـ K_4

نتيجة (3 - 6) : - تعود الى كلارك (Clarke . 1958) - عدد الاشجار المختلفة T التي رؤوسها v_1, v_2, \dots, v_n والتي فيها $p(v_1) = k$ اعلى درجة للرؤوس . هو

$$\binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

البرهان : بموجب المبرهنة (3-4) . يكون عدد الاشجار الموصوفة في نص النتيجة هو

$$\begin{aligned} & \sum_{d_2, \dots, d_n \geq 1} \binom{n-2}{k-1, d_2-1, \dots, d_n-1} \\ = & \sum_{d_2, \dots, d_n \geq 1} \frac{(n-2)!}{(k-1)! (d_2-1)! \dots (d_n-1)!} \\ = & \frac{(n-2)!}{(k-1)! (n-k-1)!} \sum_{d_2, \dots, d_n \geq 1} \binom{n-k-1}{d_2-1, d_3-1, \dots, d_n-1} \\ = & \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} \end{aligned}$$

وذلك باستعمال المأخوذة (3-2) وبوضع كل من الاعداد الحقيقية a_i مساوياً لـ 1 في الطرفين . ■
هنالك نتائج أخرى للمبرهنة (3-4) . ونكتفي بما ذكرناه هنا .

ونعود الآن الى حساب عدد الاشجار المولدة في أي بيان موسوم .
لنفرض أن G بياناً موسوماً متصلًا خالياً من اللفات . وليكن D أي بيان موجه نحصل عليه من G باعطاء اتجاهه كيفي لكل حافة في G . تكون T شجرة للبيان G اذا واذا فقط T شجرة للبيان الموجه D .

والآن نجد عدد الأشجار في D . لتكن B مصفوفة الوقوع للبيان D . لقد سبق أن بينا [انظر نتيجة (1-2)] أن مرتبة \bar{B} هي $(n-1)$. ولذلك . سنفرض أن B_1 هي مصفوفة ناتجة من B بحذف أي سطر . وليكن السطر الاخير . يطلق على B_1 مصفوفة الوقوع المختصرة (reduced incidence matrix) . بالطبع . مرتبة B_1 هي $(n-1)$. لان كل $(n-1)$ من أسطر B تكون مستقلة خطياً . اذا كان v_n هو

رأس D الذي يقابل السطر الاخير في \bar{B} ، فاننا سنطلق على v_n مصدراً (reference) لمصفوفة الوقوع المختصرة .

مبرهنة (3 - 5) : محدد أية مصفوفة جزئية مربعة بسعة $(n - 1)$ من المصفوفة \bar{B}_1 يكون 0 ، $+ 1$ ، أو $- 1$.

البرهان : لنفرض ان M مصفوفة جزئية مربعة بسعة $(n - 1)$ من المصفوفة \bar{B}_1 ولنفرض ان M غير انفرادية . اذاً $\det M \neq 0$ سوف نبرهن على أن $\det M = \pm 1$

لما كان كل عمود في \bar{B}_1 يحتوي على عنصر أو عنصرين غير صفريين $+ 1$ ، $- 1$. وان M غير انفرادية . فان هنالك في M على الأقل عموداً واحداً فيه عنصر غير صفري واحد فقط . وان قيمته $+ 1$ أو $- 1$. وليكن ذلك في السطر والعمود j . وهكذا . بنشر $\det M$ باستعمال العمود j . نحصل على

$$\det M = \pm \det M_{ij}$$

حيث أن M_{ij} هي المصفوفة المربعة الناتجة من M بحذف السطر i والعمود j . وبتكرار تطبيق هذه الخطوة على M_{ij} . ثم الاستمرار على هذا المنوال . نتوصل أخيراً الى أن $\det M = \pm 1$ وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (3 - 6) : لتكن M مصفوفة جزئية مربعة من مصفوفة الوقوع \bar{B} للبيان الموجه D . اذا كانت أعمدة واسطر M تقابل . بالترتيب . حافات ورؤوس دائرة بسيطة C . فان $\det M = 0$.

البرهان : بما أن كل عمود في M يحتوي على عنصرين فقط غير صفريين أحدهما $+ 1$ والاخر $- 1$. فان M انفرادية . وبذلك فان محدد لها يساوي صفراً . ■

مبرهنة (3 - 7) : لتكن \bar{B}_1 مصفوفة الوقوع المختصرة للبيان الموجه المتصل الخالي من اللغات D . مصفوفة جزئية مربعة سعتها $(n - 1)$. من المصفوفة \bar{B}_1 . تكون غير انفرادية اذا واذا فقط كانت الحافات الموجهة التي تقابل أعمدتها تشكل شجرة مولدة

البرهان : اذا كانت T اية شجرة مولدة لـ D . وأن M هي مصفوفة الوقوع المختصرة لـ T بالنسبة لنفس مصدر \bar{B}_1 . فان M مربعة وسعتها (n - 1) . كما أن M مصفوفة جزئية من \bar{B}_1 . ولما كانت رتبة M هي (n - 1) . فان M غير انفردية . اذاً $\det M = \pm 1$ بموجب المبرهنة (3 - 5) .

والآن . نفرض ان P مصفوفة جزئية . مربعة سعتها (n - 1) . من المصفوفة \bar{B}_1 . وأن P غير انفرادية . اذاً . P مصفوفة جزئية من مصفوفة الوقوع \bar{B} ، وأن أعمدتها مستقلة خطياً . وهكذا . بموجب المبرهنة (3 - 6) . فان الحافات التي تقابل أعمدة P لا تشكل كلها أوبعضاً منها دائرة بسيطة في البيان الموجه D وعليه . فان الحافات التي تقابل أعمدة P تشكل بياناً جزئياً H من البيان D . وبنفس رؤوس D وخالياً من الدارات . ولما كان عدد هذه الحافات هو (n - 1) . فانه بموجب (5) من المبرهنة (3 - 1) تكون H شجرة مولدة لـ D . ■

ثبتت المبرهنة الاخيرة وجود تقابل متباين بين الاشجار المولدة للبيان الموجه المتصل D والمصفوفات الجزئية المربعة غير الانفرادية بسعة (n - 1) لمصفوفة الوقوع المختصرة \bar{B}_1 لنفس البيان D . ولهذا أهمية كبيرة في تعداد الاشجار المولدة . كما هو مبين في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (3 - 8) : عدد الاشجار المولدة للبيان الموجه المتصل الخالي من اللقات D يساوي محدد المصفوفة $\bar{B}_1 \bar{B}'_1$. حيث أن \bar{B}_1 هي مصفوفة الوقوع المختصرة لـ D . وأن \bar{B}'_1 هي منقولة \bar{B}_1 .

البرهان : بموجب مبرهنة بنيت - كوشي (Binet - Cauchy)

$$\det (\bar{B}_1 \bar{B}'_1) = \sum_j (\det M_j) (\det M'_j) . \quad \dots (1)$$

حيث إن M_j هي مصفوفة جزئية مربعة بسعة (n - 1) من المصفوفة \bar{B}_1 . وأن M'_j هي المصفوفة الجزئية المربعة من \bar{B}'_1 المقابلة لـ M_j وعليه . فان أسطر M_j هي أسطر \bar{B}'_1 المقابلة لأعمدة M_j . ولذلك فان $M'_j = M_j$. وهكذا فان $M_j = \det M_j$.

بموجب البرهنتين (3-5) و (3-7) . فإن $\det M_i = \pm 1$ اذا واذا فقط كانت
 أعمدة M_i تقابل حافات شجرة مولدة لـ D أي أن قيمة كل من الحدود غير الصفرية
 في المجموع (1) هي 1 وأن كلاً منها يقابل شجرة مولدة واحدة للبيان الموجه D وبذلك
 يتم البرهان . ■

لنفرض أن G بيان متصل بسيط . وأن D بيان موجه ناتج من G باعطاء اتجاه كيفية
 لكل حافة في G . لتكن

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] .$$

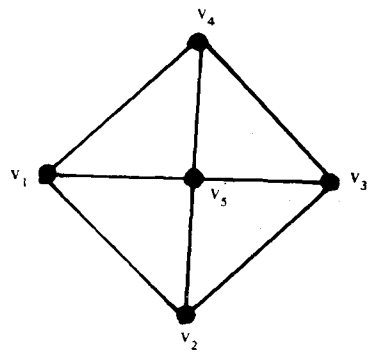
مصفوفة بسعة $n \times n$ فيها $\lambda_{ij} = -1$ اذا كان $i \neq j$ وكان الرأسان v_i و v_j متجاورين .
 و $\lambda_{ij} = 0$ اذا كان $i \neq j$ وكان الرأسان v_i و v_j غير متجاورين . و $\lambda_{ii} = \rho(v_i)$ في
 G . عندئذ يمكننا أن نبرهن على أن

$$\Lambda = \bar{B} \bar{B}'$$

حيث أن \bar{B} هي مصفوفة الوقوع للبيان الموجه D [أنظر التمرين (6) من مجموعة
 تمارين (1-5)] . يطلق على Λ مصفوفة الأشجار . وهكذا . من تعريف مصفوفة
 الوقوع المختصرة \bar{B}_1 ، وباستعمال البرهنة (3-8) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (3-7) : عدد الأشجار المولدة للبيان البسيط المتصل G يساوي قيمة المحدد
 $\det \Lambda_i$. لأي عنصر قطري λ_{ii} في Λ .

مثال : جد عدد الأشجار المولدة للبيان الموسوم المعطى في الشكل (3-14) .



شكل (3-14)

الحل : نكتب مصفوفة الاشجار Λ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ويأخذ المحيد للعنصر في السطر الخامس والعمود الخامس . نحصل على

$$\det \Lambda_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45$$

ملاحظة : يمكننا أن نعتبر أحد رؤوس البيان المعطى مصدراً . ثم نكتب المحيد مباشرة آخذين جميع رؤوس البيان ما عدا المصدر .

تمارين (3 - 2)

- (1) اثبت النتيجة (3 3) .
- (2) اثبت المأخوذات (1 3) ، (2 3) ، (3 3) .
- (3) اثبت انه اذا كانت d_1, d_2, \dots, d_n أعداداً صحيحة موجبة . فان هنالك شجرة موسومة رؤوسها هي v_1, v_2, \dots, v_n بحيث ان $\rho(v_i) = d_i$

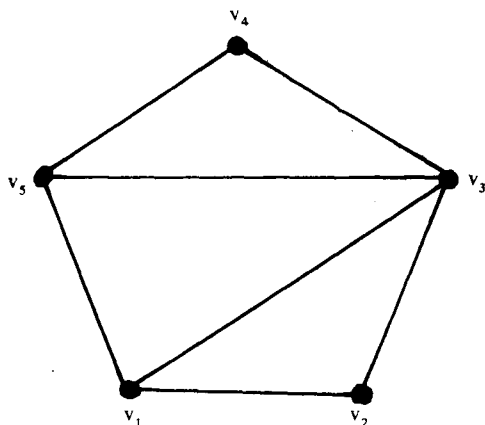
لكل $i = 1, 2, \dots, n$ اذا واذا فقط

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1).$$

[تلميح : اثبت ان احد الاعداد d_1, d_2, \dots, d_n يجب أن يكون العدد 1. ثم

استخدم الاستقراء الرياضي على n .

(4) جد عدد الاشجار المولدة للبيان المعطى في الشكل (3-15).



شكل (3-15)

(5) استخدم النتيجة (3-7) لاعطاء برهان ثانٍ للنتيجة (3-5).

(*6) ليكن $G = (V, E)$ بياناً بسيطاً. يقال ان ϕ تشاكل ذاتي

(automorphism) للبيان G اذا وجد تطبيق متباين وشامل على مجموعة

الرؤوس V بحيث ان $\phi(u), \phi(v)$ متجاورين اذا واذا فقط كان الرأسان

u و v متجاورين.

برهن على أن مجموعة جميع التشاكلات الذاتية للبيان G مع عملية تركيب

التشاكلات تكون زمرة. يطلق على هذه الزمرة زمرة البيان G ويرمز لها $\Gamma(G)$.

برهن على أن الزمرتين $\Gamma(G)$ و $\Gamma(\bar{G})$ متشاكلتان.

(*7) ليكن G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n . اثبت أن عدد البيانات الموسومة غير

المتشاكلية التي يمكن الحصول عليها من G . باعطاء الرموز v_1, v_2, \dots, v_n

لرؤوسه. هو $| \Gamma(G) | / (n!) .$ حيث أن $| \Gamma(G) |$ عدد عناصر الزمرة

$\Gamma(G)$.

[تلميح : لاحظ أنه اذا كان G_1 أي بيان موسوم ل G ، فإن لكل ϕ ، $\phi \in \Gamma(G)$ ،
 يكون البيان الموسوم G_2 الناتج من G_1 بتطبيق ϕ متشاكلاً مع G_1 .]

(3 - 3) أشجار القياس الكلي الاصغر

ان لنظرية البيانات تطبيقات كثيرة جداً وفي مواضيع عديدة ومتنوعة ، وسوف نأتي الى شرح بعض تلك التطبيقات في الفصل السادس . وقد لانكون مبالغين اذا قلنا ان في معظم تلك التطبيقات تلعب الاشجار دوراً أساسياً . ولقد وجدنا من الضروري الإشارة في هذا البند الى بعض الاستعمالات المباشرة للأشجار ، ونذكر فيما يلي شرحاً موجزاً لاستعمالين فقط .

(أ) لنفرض أن المطلوب انشاء شبكه طرق تصل بين مجموعة من المدن بحيث أن هنالك درب واحد فقط يصل بين كل مدينتين ، علماً بان لدينا طول المسافة بين كل مدينتين . ومن ناحيه اقتصادية . نحتاج الى أن نبحث عن تلك الشبكة من الطرق بحيث يكون مجموع المسافات . اي مجموع أطوال تلك الطرق ، أقصر مايمكن . لما كانت شبكة الطرق متصلة ويوجد فيها درب واحد فقط بين كل مدينتين ، فيجب ان تكون على هيئة شجرة [بموجب (2) من البرهنة (3 - 1)]

تعرف دالة قياس (measure) حافات بيان G على انها دالة μ من مجموعة حافات G الى مجموعة من اعداد حقيقية غير سالبة . فاذا كانت e_i حافة في G ، فإن $\mu(e_i)$ هو قياس e_i .

باستعمال مفهوم دالة القياس يمكننا ان نصوغ المسائل من النوع المذكور فيما تقدم بصيغة اكثر شمولية كالآتي :

« يطلب ايجاد شجرة مولدة لبيان متصل موسوم علمت قياسات حافته بحيث ان مجموع قياسات الحافات في تلك الشجرة اصغر مايمكن . »

يمكن أن يفسر قياس الحافة بأنه طول الطريق الذي تمثله ، أو الزمن لانجاز عمل من مرحلة الى اخرى (المراحل هنا تمثل بالرووس) . وقد يفسر القياس بانه كلفة انشاء الطريق ، او كلفة قطع المسافة بين مدينتين . ولذلك ، فإن استخدام كلمة « القياس » يعطي لهذه المسألة بعض الشمولية في التطبيق . يطلق أحياناً على هذه المسألة « مسألة الموصل الاصغر minimal connector problem » .

ملاحظة : يمكننا أحيانا ان نقبل بوجود القياس السالب . ولكن يجب أن لا يحتوي البيان على دارة مجموع قياسات حافاتها عدد سالب . وذلك لأجل أن يكون هنالك معنى تطبيقي للمسألة .

يقصد بالقياس الكلي لشجرة T مجموع قياسات حافات T . وسنرمز لذلك بـ $\mu(T)$ ؛ وبذلك فإن

$$\mu(T) = \sum_{e_i \in E(T)} \mu(e_i).$$

حيث ان $E(T)$ هي مجموعة حافات T .

لما كان عدد الاشجار المولدة لبيان متصل كبيراً . فإن إيجاد شجرة ذات أصغر قياس كلي عن طريق إيجاد كل الاشجار المولدة هو عملية مطولة جداً . ولذلك فقد أوجد كروسكال (J. B. Kruskal) سنة 1956 طريقة مختصرة لإيجاد شجرة القياس الكلي الأصغر . وتتلخص طريقة كروسكال بما يأتي :

نبدأ بحافة من G يكون لها أصغر قياس . ولتكن الحافة e_1 . ثم نأخذ تباعاً الحافات e_2, e_3, \dots, e_{n-1} بحيث نختار في كل مرحلة حافة لم يسبق اختيارها وبحيث تكون باصغر قياس نسبة لما تبقى من حافات في G . وبحيث أنها لا تشكل دارة مع بعض الحافات التي تم اختيارها . وعندئذ يكون البيان الجزئي T المكون من الحافات e_1, e_2, \dots, e_{n-1} التي تم اختيارها بهذه الطريقة شجرة مولدة لـ G ذات أصغر قياس كلي .

والان . نبرهن على صحة طريقة كروسكال .

لما كانت T تتكون من n من الرؤوس و $(n-1)$ من الحافات وخالية من الدارات . فإن T شجرة مولدة للبيان G ، وذلك بموجب (5) من المبرهنه (3-1) . بقي ان نبرهن على ان $\mu(T)$ أصغر ما يمكن .

لتكن S أية شجرة مولدة للبيان G . سنبرهن على أن

$$\mu(T) \leq \mu(S).$$

واضح من الطريقة ان

$$\mu(e_1) \leq \mu(e_2) \leq \dots \leq \mu(e_{n-1}).$$

لنفرض أن e_k هي أول حافة في المتتابعة e_1, e_2, \dots, e_{n-1} التي لا تنتمي الى الشجرة المولدة S . البيان الجزئي المتكون من S مع الحافة e_k يحتوي على دائرة وحيدة C [بموجب (6) من البرهنة (3-1)]. وهذه الدائرة تحتوي على حافة e من S لا تنتمي الى T . اذاً، البيان الجزئي S_1 الناتج من S باضافة e_k وازالة e هو شجرة مولدة للبيان G . واستناداً الى طريقة ايجاد T . فان $\mu(e_k) \leq \mu(e)$ ، وعليه فان

$$\mu(S_1) \leq \mu(S).$$

إضافة الى ذلك، فان S_1 تشترك مع T بحافة واحدة زيادة على الحافات المشتركة بين $T \cdot S_1$.

وبتكرار هذه العملية على S_1 نحصل على S_2 بحيث إن

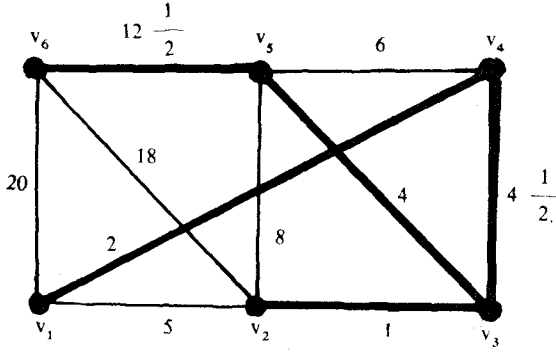
$$\mu(S_2) \leq \mu(S_1).$$

وهكذا، نستمر بهذه العملية حتى نتوصل الى T بتحويلات شجرية متتابعة [انظر تمرين (9) من مجموعة التمارين (3-1)]. ولما كان، في كل تحويل شجري، القياس الكلي للشجرة الناتجة لايزيد على القياس الكلي للشجرة السابقة لها، فان

$$\mu(T) \leq \mu(S).$$

وبما أن S أية شجرة مولدة لـ G ، فان $\mu(T)$ أصغر ما يمكن، وأن T هي شجرة القياس الكلي الأصغر. ■

مثال (1): جد شجرة القياس الكلي الأصغر للبيان الموسوم G المبين في الشكل (3-16)، علماً بأن الاعداد المثبتة على الحافات هي قياساتها.



شكل (3-16)

الحل: لما كان 1 هو أصغر قياسات الحافات، فإننا نأخذ e_1 على أنها الحافة $[v_2, v_3]$ ، ولما كان القياس الأصغر الذي يلي 1 هو 2، فإن e_2 هي الحافة $[v_1, v_4]$ ، وذلك لأن هاتين الحافتين لا تشكلان دائرة. وهكذا. نستمر حتى نحصل على الشجرة المولدة T التي حافاتنا. حسب ترتيب إيجادها. هي

$$[v_2, v_3] \cdot [v_1, v_4] \cdot [v_3, v_5] \cdot [v_3, v_4] \cdot [v_5, v_6]$$

والتي قياسها الكلي 24. وقد رسمت حافاتنا بخطوط سميكة.

(ب) نشرح الآن مسألة مشابهة بعض الشيء للمسألة المذكورة في (أ)، ولكنها تخص البيانات الموجهة.

ليكن $D = (V, A)$ بياناً موجهاً متصلاً بسيطاً. وليكن v_0 رأساً معيناً في D ، يطلق عليه مصدر البيان D . يقال لرأس w إنه قابل الوصول (reachable) من v_0 إذا وجد في \bar{D} درب موجه، واحد على الأقل، من المصدر v_0 إلى الرأس w . لنفرض أن هنالك دالة قياس معرفة على الحافات الموجهة للبيان D ، أي أن لكل حافة موجهة (u, v) في D معرفاً لها قياس $\mu(u, v)$ وهو عدد حقيقي سالب، موجب، أو صفر. وسنفرض أن لكل دائرة موجهة C في D يكون $\mu(C) \geq 0$ ، حيث أن $\mu(C)$ هو مجموع قياسات الحافات الموجهة في الدائرة C .

المسألة هنا تنص على أنه إذا كان w رأساً قابل الوصول من المصدر v_0 ، فاجد درياً موجهاً P من v_0 الى w بحيث إن مجموع قياسات حافاته ، $\mu(P)$ ، أصغر ما يمكن نسبة الى كل الدروب الموجهة من v_0 الى w . يطلق على مثل هذا الدرب ، وهو بالطبع موجود دائماً ، أقصر درب موجه من v_0 الى w .

سوف نشرح فيما يلي مسألة أعم من مسألة إيجاد أقصر درب موجه ، وهي مسألة إيجاد شجرة جذرية T ، جذرها المصدر v_0 ، بحيث إن الدرب الموجه الوحيد من v_0 الى أي رأس w ، فيها هو أقصر درب موجه من v_0 الى w . يطلق على مثل هذه الشجرة شجرة القياس الأصغر نسبة الى المصدر v_0 . إضافة الى ذلك ، سنعطي طريقة لايجاد شجرة القياس الأصغر نسبة الى المصدر v_0 بحيث إنها تحتوي على كل رؤوس D القابلة الوصول من v_0 ، وسوف نطلق على مثل هذه الشجرة شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة الى المصدر v_0 . سوف نبين ان لكل بيان موجه بسيط D مع أية دالة قياس μ للحافات التي تحقق $\mu(C) \geq 0$ ، لكل دائرة موجهة C في D ، فإنه يوجد في D واحدة على الأقل من اشجار القياس الأصغر العظمى نسبة الى مصدر v_0 . قبل ذكر ذلك . نحتاج الى إثبات المبرهنة الآتية .

مبرهنة (3 - 9) : لتكن T شجرة جذرية . جذرها v_0 . في بيان موجه متصل بسيط $D = (V, A)$. تحتوي على كل رأس قابل الوصول من v_0 . لكل رأس u في T . نرمز لقياس الدرب الموجه الوحيد من v_0 الى u في T بالرمز $L(u)$. ونعتبر $L(v_0) = 0$. عندئذ . تكون T شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة الى المصدر v_0 اذا واذا فقط . لكل وتر (u, w) الذي رأساه u, w في T يكون

$$L(w) \leq L(u) + \mu(u, w) . \quad \dots (1 - 3)$$

البرهان : اذا كان . لأجل وترما (u, w) ،

$$L(w) > L(u) + \mu(u, w) .$$

فان الدرب الموجه من v_0 الى u في T مع الوتر (u, w) يكون ذا قياس $L(u) + \mu(u, w)$. ولما كان هذا أصغر من $L(w)$. فان قياس الدرب الموجه من v_0 الى w في T ليس الأقصر . وبذلك . فان T ليست شجرة القياس الأصغر نسبة الى المصدر v_0 .

وبالعكس ، دعنا نفرض أن T ليست شجرة القياس الاصغر. اذاً ، يوجد رأس v في T بحيث إن قياس الدرب الشجري من v_0 الى v ليس الاقصر. لذلك ، نفرض أن الدرب الموجه

$$P_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

هو أقصر درب موجه من v_0 الى v في D . لتكن $a_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ هي الحافة الموجهة الاولى في المتابعة a_1, a_2, \dots, a_k التي لا تنتمي الى T بحيث إن $L(v_{i+1}) > \mu(P_{i+1})$ ، حيث إن

$$P_{i+1} = (a_1, a_2, \dots, a_{i+1}).$$

بالطبع ، هكذا حافة موجهة موجودة لأن P_k أقصر من الدرب الموجه من v_0 الى v في T بالفرض. ولما كان $L(v_i) = \mu(p_i)$ ، فان

$$L(v_{i+1}) > L(v_i) + \mu(a_{i+1}).$$

وعليه ، فقد وجدنا وترّاً ، a_{i+1} ، بحيث ان رأسيه v_i, v_{i+1} يحققان المتباينة.

$$L(w) > L(u) + \mu(u, w).$$

وبهذا يتم البرهان. ■

هذه المبرهنة تزودنا بالقاعدة النظرية التي تستند اليها طريقة الحصول على شجرة القياس الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_0 بشرط أن $\mu(C) \geq 0$ لكل دائرة موجهة C في البيان الموجه. والطريقة تتكون من تكرار الخطوة الثانية من الخطوتين الآتيتين:

(1) نأخذ شجرة جذرية T_0 ، جذرها v_0 ، بحيث تحتوي على كل الرؤوس القابلة الوصول من v_0 .

(2) بصورة عامة ، عندما نحصل على T_i ، نفرض ان $L_i(v)$ يرمز لقياس الدرب الموجه الوحيد من v_0 الى v في T_i . اذا كان كل وتر (u, w) يحقق المتباينة

$$L_i(w) \leq L_i(u) + \mu(u, w),$$

فان T_i هي شجرة القياس الاصغر العظمى. وذلك بموجب المبرهنة (3 - 9).

وعند ذلك تنتهي الطريقة ونكون قد حصلنا على الشجرة المطلوبة. أما اذا وجد وتر
 (u^*, w^*) بحيث ان

$$L_i(w^*) > L_i(u^*) + \mu(u^*, w^*), \quad \dots (2-3)$$

فعدنئذ نحصل من T_i على شجرة جذرية T_{i+1} باضافة الوتر (u^*, w^*) الى T_i وازالة منها الحافة الموجهة التي رأسها النهائي هو w^* . لما كانت T_i جذرية جذرها v_0 وأن $\mu(C) \geq 0$ لكل دائرة موجهة C ، فان T_{i+1} جذرية جذرها v_0 أيضاً.
 بعد ذلك نكرر الخطوة (2) بأخذ $i+1$ بدلاً من i .
 لكل رأس v قابل الوصول من v_0 ، فان المتتابعة $L_0(v), L_1(v), \dots$ غير متزايدة.
 اضافة الى ذلك، في كل مرحلة i ،

$$L_i(v) < L_{i-1}(v)$$

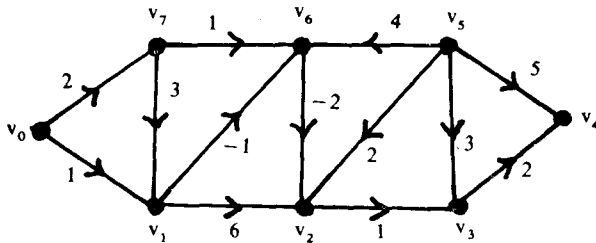
لرأس v واحد على الأقل (كالرأس w^* المذكور في الخطوة (2) أعلاه). وأخيراً، فان القيم

$L_i(v)$ مقيدة من الاسفل، لأنه لا توجد دروب من v_0 الى v بقياسات صغيرة لانهاياً،
 بسبب الشرط $\mu(C) \geq 0$ لكل دائرة موجهة C . هذه الملاحظات سوية توصلنا الى شجرة
 جذرية، T_j ، بحيث ان لكل وتر، (u, w)، من اوتارها،

$$L_j(w) \leq L_j(u) + \mu(u, w).$$

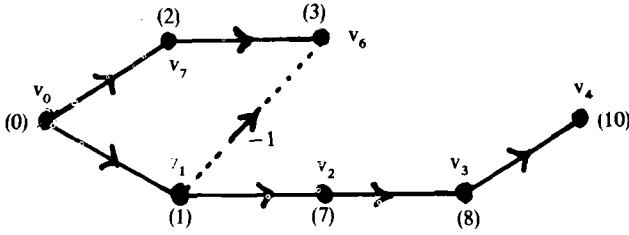
عندئذ، بموجب المبرهنة (3-9). تكون شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة الى المصدر v_0 .

مثال (2): جد شجرة القياس الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_0 للبيان الموجه D ،
 المؤشر عليه قياسات الحافات. والمبين في الشكل (3-17).

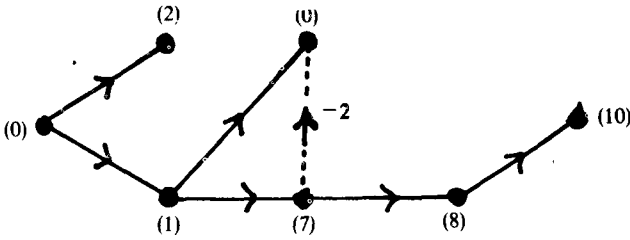


شكل (3-17) D

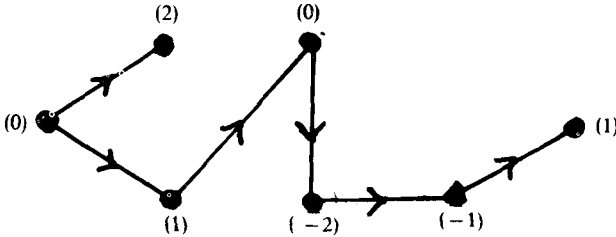
الحل: نبدأ بالشجرة T_0 المبينة في (a) من الشكل (3-18) ، وهم شجرة تحتوي على كل الرؤوس القابلة الوصول من المصدر v_0 ، وقد رسم منقطاً الوتر (v_1, v_6) الذي يحقق المتباينة (3-2) ، وقد كتب قياس كل رأس $L_0(v_i)$. وهكذا نحصل على T_1 المبينة في (b) من الشكل (3-18) . ومن ثم نستمر حتى نحصل على T_2 في (c) من نفس الشكل . وبعد فحص كل أوتار T_2 ، نجد أنها تحقق المتباينة (3-1) . وهكذا ، بموجب البرهنة (3-9) ، تكون T_2 هي شجرة القياس الأصغر العظمى .



(a) T_0



(b) T_1



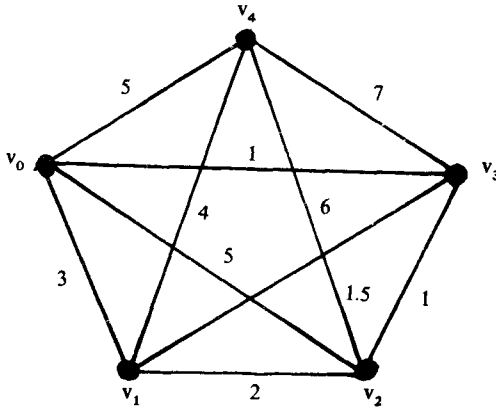
(c) T_2

شكل (3-18)

من المسائل المعروفة والمتضمنة إيجاد أقصر مسار هي مسألة البائع المتجول (travelling salesman problem) وهي تليخص بما يأتي: «بائع متجول يرغب بزيارة n من المدن المعينة، فكيف يمكنه زيارة كل من هذه المدن مرة واحدة على الأقل ثم يعود الى نقطة إنطلاقه وبحيث تكون المسافة الكلية التي يقطعها في سفره أصغر مايمكن؟ في المثال (1)، المسار الاقصر (أي الاصغر قياساً) لرحلة البائع المتجول هو $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_5, v_4, v_1)$ ، ويكون الطول الكلي لهذا المسار هو 43، ونلاحظ ان البائع مر بالرأس v_5 مرتين لأجل أن يقطع أقل مسافة. إن تطبيقات هذه المسألة كثيرة، ولكن لا توجد في الوقت الحاضر طريقة عامة وجيدة لحلها.

تمارين . (3 - 3)

- (1) جد شجرة القياس الكلي الاصغر للبيان G المبين في الشكل (3 - 19).
- (2) جد طريقة أخرى غير طريقة كروسكال للحصول على شجرة القياس الكلي الاصغر لبيان متصل G ، تستند الى ازالة الحافة ذات القياس الاكبر من G ، ثم تستمر على هذا المنوال حتى تحصل على شجرة مولدة ذات قياس كلي أصغر. إثبت صحة هذه الطريقة، ثم استعملها في حل التمرين (1).
- (3) إثبت انه يمكن استعمال الطريقة المذكورة في التمرين (2) لأجل الحصول على شجرة مولدة لبيان متصل G . [تلميح: اعتبر كل الحافات ذات قياس واحد].
- (4) جد المسار الاقصر لرحلة بائع متجول اذا علمت أن خارطة المدن التي سوف يزورها ممثلة في البيان المعطى في الشكل (3 - 19).



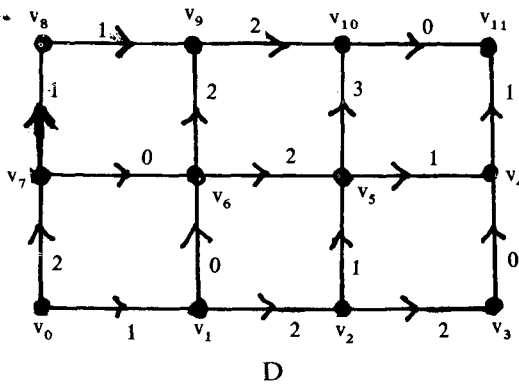
شكل (3 - 19)

(5) إذا كان $P_k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ أقصر درب موجه من المصدر v_0 إلى الرأس v_k في بيان موجه بسيط، فإن

$$P_j = (a_1, a_2, \dots, a_j)$$

هو أقصر درب موجه من v_0 إلى v_j لكل $j = 1, 2, \dots, k$ علماً بأن لكل $i = 1, 2, \dots, k$ $a_i = (v_{i-1}, v_i)$

(6) جد شجرة القياس الكلي الأصغر العظمى نسبة إلى المصدر v_0 للبيان الموجه D المؤشر عليه قياسات حافته والمعطى في الشكل (3 - 20) .



شكل (3 - 20)

(7) ليكن D بياناً موجهاً مع دالة القياس μ لكل من حافاته الموجهة بحيث ان لكل دائرة موجهة C يكون $\mu(C) \leq 0$. اجراء التعديلات اللازمة على طريقة استخراج شجرة القياس الكلي الاصغر العظمى لاجل وصف خطوات الحصول على شجرة القياس الكلي الاكبر العظمى (أي شجرة تحتوي على كل الرؤوس القابلة الوصول من المصدر v_0 بحيث ان الدرب الموجه الوحيد فيها من v_0 الى أي رأس يكون باكبر قياس ممكن).

(8) استخدم التمرين (7) للحصول على شجرة القياس الكلي الاكبر العظمى نسبة الى المصدر v_0 للبيان الموجه D المعطى في الشكل (3-20).

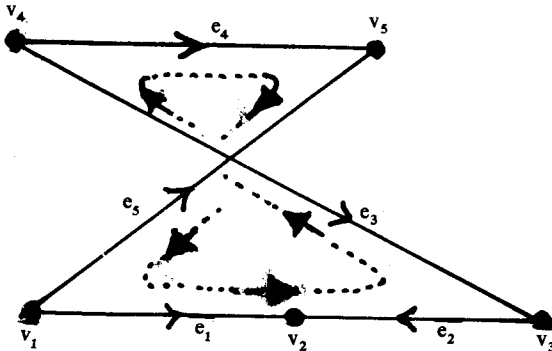
(3-4) مصفوفات الدارات والمجموعات القاطعة للبيانات الموجهة :

سوف نحتاج في الفصل السادس الى استخدام مصفوفات الدارات والمجموعات القاطعة للبيانات الموجهة. ولذلك نجد من الضروري شرحها هنا لاعتمادها على مفهوم الاشجار.

نعين لكل دائرة بسيطة (لا يشترط ان تكون موجهة) في البيان الموجه المتصل D « اتجاهاً » يتفق مع ترتيب حافاتها الموجهة في المتابعة التي تمثلها ، أو بالترتيب المعاكس لذلك ، كما هو موضح في الشكل (3-21) بالنسبة للدائرة

$$C = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1)$$

حيث ان الخط المنقط ، مع الاسهم التي عليه ، يمثل اتجاه الدارة C بما يتفق وترتيب حافاتها في المتابعة .



شكل (3-21)

تكن e_1, e_2, \dots, e_m الحافات الموجهة للبيان الموجه D ، ولتكن C_1, C_2, \dots, C_l الدارات البسيطة في D . نعرف مصفوفة دارات D بانها المصفوفة $\bar{C} = [c_{ij}]$ بسعة $l \times m$ بحيث أن السطر i يمثل الدارة C_i والعمود j يمثل الحافة الموجهة e_j ، لكل $i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, m$ ، وان

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & C_i \text{ متفق مع اتجاه } e_j \\ -1, & C_i \text{ معاكس لاتجاه } e_j \\ 0, & \text{اذا لم تكن } e_j \text{ في } C_i \end{cases}$$

لتكن T شجرة مولدة للبيان الموجه المتصل D . اذا اخذنا اتجاه كل دائرة من النظام الاساسي للدارات المشاركة مع T متفقاً مع اتجاه الوتر الذي فيها ، نجد ان المصفوفة \bar{C} تحتوي على مصفوفة جزئية مربعة واحدة بسعة $(m - n + 1)$. لذلك ، فان لدينا المأخوذة المباشرة الآتية :

مأخوذة (3-4) : مرتبة مصفوفة الدارات للبيان الموجه المتصل الذي عدد رؤوسه n وعدد حافته m لاتقل عن $(m - n + 1)$.

مبرهنة (3-10) : اذا أخذت أعمدة مصفوفة الوقوع \bar{B} وأعمدة مصفوفة الدارات \bar{C} للبيان الموجه المتصل D بنفس الترتيب لحافته ، فان

$$\bar{B}\bar{C}' = \bar{O} \quad , \quad \bar{C}\bar{B} = \bar{O}$$

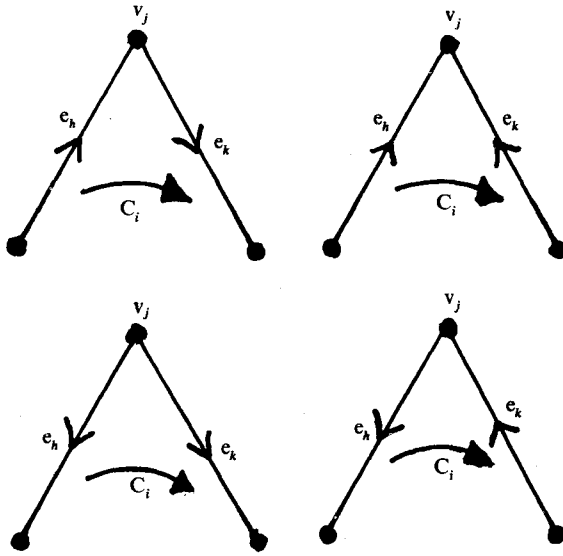
حيث أن \bar{O} مصفوفة صفرية ، وان \bar{B}' منقولة \bar{B} و \bar{C}' منقولة \bar{C} .

البرهان : اذا لم تكن الدارة C_i محتوية على الرأس v_j فان حاصل ضرب السطر ذي الرقم i من \bar{C} مع السطر ذي الرقم j من \bar{B} يساوي صفرًا . واذا كانت الدارة C_i محتوية على الرأس v_j ، فان لدينا أربع حالات بالنسبة الى اتجاهي الحافتين e_k و e_h في C_i الواقعتين على الرأس v_j ؛ وهذه الحالات مبينة في الشكل (3-22) .

ولكل من هذه الحالات الأربع ، نجد أن

$$c_{ih}b_{jh} + c_{ik}b_{jk} = 0$$

لذلك ، فإن حاصل ضرب السطر ذي الرقم i من \bar{C} مع السطر ذي الرقم j من \bar{B} (أي العمود ذي الرقم j من \bar{B}') يساوي صفراً . وبهذا يتم البرهان .



شكل (3-22)

مبرهنة (3-11) : مرتبة مصفوفة الدارات للبيان الموجه المتصل الذي عدد رؤوسه n وعدد حافته \bar{m} هي $(m - n + 1)$.

Sylvester's law of nullity)

البرهان : ينص قانون سيلفستر للصفرية

على : « إذا كانت P مصفوفة بسعة $r \times p$ و Q مصفوفة بسعة $r \times q$ ، وإذا كانت

$$PQ' = \bar{O} \text{ ، فإن } (\text{مرتبة } P) + (\text{مرتبة } Q) \leq r .$$

$$\bar{C} \bar{B}' = \bar{O} \text{ ، بما أن}$$

بموجب المبرهنة (3-10) ، وباستعمال قانون سيلفستر للصفرية ، فإن

$$(\text{مرتبة } \bar{C}) + (\text{مرتبة } \bar{B}) \leq m .$$

ولما كانت مرتبة المصفوفة B هي $(n-1)$ ، فإن
 $(\bar{C} \text{ مرتبة}) \leq m - n + 1$.

وهكذا ، باستعمال المأخوذة (4-3) ، نجد أن مرتبة \bar{C} هي $(m - n + 1)$.

نشرح فيما يأتي مصفوفة المجموعات القاطعة للبيانات الموجهة .

لتكن S مجموعة قاطعة للبيان الموجه المتصل D ، ولتكن V_1, V_2 مجموعتي رؤوس مركبتى $D-S$. يمكننا أن نعين لـ S اتجاهاً أما من V_1 الى V_2 أو من V_2 الى V_1 . ولذلك سنفرص أن لكل مجموعة قاطعة للبيان اتجاهها معيناً .

لتكن e_1, e_2, \dots, e_m حافات D ، ولتكن S_1, S_2, \dots, S_t المجموعات القاطعة للبيان الموجه D . تعرف مصفوفة المجموعات القاطعة لـ D بأنها المصفوفة

$K = [k_{ij}]$ ذات السعة $t \times m$ بحيث أن السطر i يمثل المجموعة القاطعة S_i ،
 و $i = 1, 2, \dots, t$ ، وان العمود j يمثل الحافة الموجهة e_j ، $j = 1, 2, \dots, m$ ،

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان } e_j \text{ في } S_i \text{ واتجاه } e_j \text{ متفقاً مع اتجاه } S_i \\ -1, & \text{إذا كان } e_j \text{ في } S_i \text{ واتجاه } e_j \text{ معاكساً لاتجاه } S_i \\ 0, & \text{إذا لم يكن } e_j \text{ في } S_i \end{cases}$$

مبرهنة (3-12) : إذا كانت \bar{K} مصفوفة المجموعات القاطعة و C مصفوفة الدارات لبيان موجه D بحيث أن ترتيب الأعمدة في كليهما هو بنفس الترتيب للحافات ، فإن

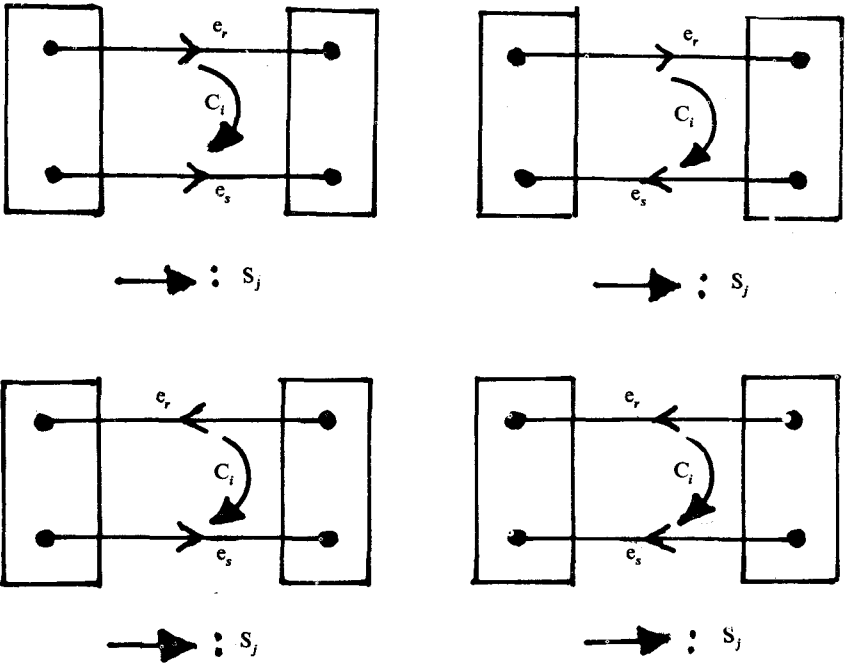
$$\bar{K} \bar{C}' = \bar{O}, \quad C K' = \bar{O}.$$

البرهان : إذا كانت e_r حافة موجهة مشتركة بين الدارة C_i والمجموعة القاطعة S_j في D ، وان e_s أول حافة موجهة مشتركة بينهما تأتي بعد e_r عندما نمرحول C_i بالاتجاه المعين لها ، فإن لدينا أربع حالات لاتجاهي e_r و e_s ، وهي مبينة في الشكل (3-23) . لكل من هذه الحالات ، نجد أن

$$c_{ir} k_{jr} + c_{is} k_{js} = 0$$

ولما كان عدد الحافات الموجهة المشتركة بين S_j و C_i هو عدد زوجي ، فإن حاصل

ضرب السطر i من \bar{C} مع السطر j من \bar{K} يساوي صفراً . وبهذا يتم البرهان . ■



شكل (3-23)

واضح انه اذا كان D متصلاً وغير قابل للانفصال ، فان مصفوفة الوقوع $\bar{B} \mid \bar{D}$ هي مصفوفة جزئية من مصفوفة المجموعات القاطعة \bar{K} . اما اذا كان D قابلاً للانفصال ، فان أسطر \bar{B} هي تشكيلات خطية لاسطر \bar{K} . وبما أن مرتبة \bar{B} هي $(n-1)$ ، فان مرتبة \bar{K} لا تقل عن $(n-1)$.

من جهة اخرى ، باستعمال المبرهنتين (3-11) و (3-12) مع قانون سيلفستر للصفرية ، نستنتج ان مرتبة \bar{K} لا تزيد على $(n-1)$. وهكذا نتوصل الى المبرهنة الآتية .

مبرهنة (3-13) : اذا كانت \bar{K} مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان موجه متصل عدد رؤوسه \bar{n} ، فان مرتبة \bar{K} هي $(n-1)$.

لتكن T شجرة مولدة لبيان موجه متصل D عدد رؤوسه n وعدد حافته m الموجهة m_i . ولتكن $e_1, e_2, \dots, e_{m-n+1}$ أوتار T ، ولتكن $e_{m-n+1}, e_{m-n+2}, \dots, e_m$ أغصان T . ولتكن C_i الدارة الأساسية (أي في النظام الأساسي للدارات المشاركة مع T) الناشئة من إضافة الوتر e_i إلى الشجرة T ، لكل $i = 1, 2, \dots, m - n + 1$. ولتكن S_j المجموعة القاطعة الأساسية نسبة إلى الغصن e_j للشجرة T ، لكل $j = m - n + 2, \dots, m$. عندئذ يمكن كتابة مصفوفة الدارات الأساسية بالصيغة

$$\bar{C}_f = [U_{m-n+1} \quad \bar{C}_{f12}],$$

حيث أن U_{m-n+1} هي مصفوفة واحدة بسعة $(m - n + 1)$. كما يمكن كتابة مصفوفة المجموعات القاطعة الأساسية بالصيغة

$$K_f = [K_{f11} \quad U_{n-1}],$$

حيث أن U_{n-1} هي مصفوفة واحدة بسعة $(n - 1)$

باستعمال المبرهنه (3-12)، نتوصل إلى

$$\bar{C}_f K_f = \bar{O}$$

وهي تؤدي إلى

$$[U_{m-n+1} \quad \bar{C}_{f12}] \begin{bmatrix} \bar{K}'_{f11} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \bar{O},$$

أي أن

$$\bar{K}'_{f11} + \bar{C}_{f12} = \bar{O}$$

وهكذا، فإن

$$\bar{K}_{f11} = -C'_{f12} \quad \dots (3-3)$$

تمارين: (3-4)

(1) إذا كانت T الشجرة المولدة للبيان الموجه D المعطى في الشكل (3-6)،

فاكتب كلاً من \bar{K}_f و \bar{C}_f ، وتحقق من صحة (3-3) نسبة لهذه الشجرة.

(2) برهن على أن مرتبة مصفوفة الدارات لبيان موجه عدد رؤوسه n ، وعدد حافته

الموجهة m وعدد مركباته k هي $(m - n + k)$.

(3) برهن على أن مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان موجه عدد رؤوسه n وعدد

مركباته k هي $(n - k)$.

الفصل الرابع

البيانات المستوية (Planar Graphs)

لقد سبق ان شرحنا في البند (1-7) غمر البيانات ، وتعرضنا لذكر البيانات المستوية ، وهي البيانات التي يمكن غمرها في المستوي. فالبيان المستوي هو بيان يمكن رسمه في المستوي بحيث لا يوجد تقاطع بين أية حافتين في نقطة ليست رأساً لأحدى أوكنتا الحافتين. كما سبق أن بينا أن البيان المستوي يمكن غمره في سطح الكرة، وأن كل بيان مغمور في سطح الكرة هو بيان مستوي [مبرهنة (1-5)]. كما أثبتنا أن كل بيان يمكن عمرة في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد R^3 . وفي هذا الفصل سوف نشرح بعض خصائص وميزات البيانات المستوية، كما سوف نثبت الشروط الضرورية والكافية لكي يكون بيانا ما مستوياً.

سوف يتضمن البند (4-1) من هذا الفصل صيغة أولر التي هي العلاقة الثابتة بين عدد الرؤوس، عدد الحافات، وعدد المناطق لبيان مستوي. باستخدام هذه الصيغة، سوف نثبت ان البيانين K_5 ، $K_{3,3}$ غير مستويين، وسوف نرى كيف أن هذين البيانين يلعبان دوراً رئيساً في البيانات غير المستوية كما تنص على ذلك مبرهنة كورتوفسكي في البند (4-2)

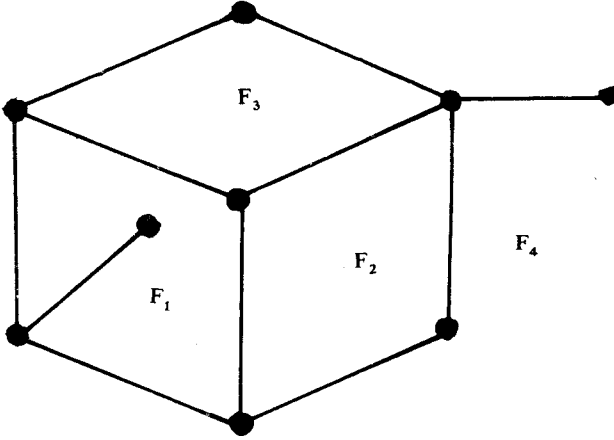
يعالج البند (4-4) مواضيع الجنس والسلك وعدد التقاطعات في البيانات.

وفي البند (4-5). نشرح الاثنينية في البيانات المستوية. وأخيراً نختم الفصل بمبرهنة وايتني في البيانات المستوية.

(1 - 4) صيغة أولر للبيانات المستوية

عندما يغمر بيان ما في مستوي يتجزأ ذلك المستوي الى مناطق. يطلق على كل منها وجه (face) أو منطقة (region) لذلك البيان. وفي هذه التجزئة. يطلق على المنطقة غير المحدودة الوجه الخارجي (the exterior face) أو الوجه غير المحدود

(unbounded face) . ففي البيان المستوي المبين في الشكل (1-4) لدينا أربعة أوجه وهي F_1, F_2, F_3, F_4 ؛ لاحظ أن F_4 هو الوجه الخارجي أما بقية الأوجه فهي داخلية. كما أن تخم (أي حدود) الوجه F_2 هو دائرة بسيطة، ولكن تخم الوجه F_1 ليس دائرة.

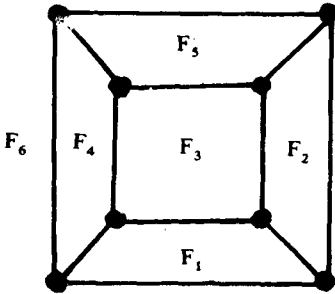


شكل (1-4)

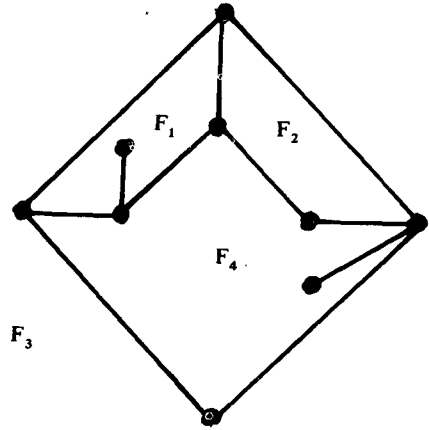
من المهم أن نلاحظ عدم وجود شيء خاص بالوجه الخارجي ، حيث يمكننا أن

نجعل ، باعادة رسم البيان في المستوي ، أي وجه نريده ، مثل F ، وجهاً خارجياً. ويتم ذلك باسقاط البيان على سطح الكرة [انظر برهان المبرهنة (1-5)] ، ثم نختار نقطة ، مثل x ، داخل المنطقة F ، وندور الكرة بحيث تصبح x نقطة الاسقاط (أي القطب الشمالي) ، وعندئذ نسقط البيان المرسوم على الكرة الى المستوي المماس للكرة عند القطب الجنوبي. فمثلاً ، يمكننا أن نعيد رسم البيان المعطى في الشكل (1-4) بحيث يصبح الوجه F_3 وجهاً خارجياً ، كما هو مبين في الشكل (2-4)

لقد كان العالم المعروف أويلر (Euler) أول من درس البيانات المستوية عندما كان يبحث في متعددة السطوح (polyhedra) . فقد لاحظ أن لكل متعدد سطوح ، يوجد بيان مرافق له ، رؤوسه هي رؤوس متعدد السطوح وحافته هي اضلاعه. ويطلق على بيان متعدد السطوح هيكل 1 - sekeleton . فمثلاً ، البيان في الشكل (4-3)



شكل (3-4)



شكل (2-4)

هو هيكل 1 للمكعب. ومن هنا جاء استعمال أولر لكلمة وجه. ومن هذه الدراسة، أوجد أولر سنة 1736 الصيغة المعروفة «بصيغة أولر لمتعدد السطوح» وهي واحدة من النتائج الكلاسيكية في الرياضيات. ويمكن صياغة تلك القاعدة للبيانات المستوية المتصلة في البرهنة الآتية.

مبرهنة (1-4) صيغة أولر - لكل بيان مستو متصل n عدد رؤسا n وعدد حافته m وعدد أوجهه f . يكون

$$n - m + f = 2. \quad \dots (1-4)$$

البرهان: من الواضح أن الطرف n من الصيغة (1-4) لا يتغير إذا أجرينا إحدى العمليتين:

- (أ) إزالة رأس أحادي الدرجة مع الحافة الواقعة عليه.
 (ب) إزالة حافة مشتركة بين تخمين وجهين مختلفين.
 ففي حالة وجود رأس أحادي الدرجة. فإن إزالة ذلك الرأس مع الحافة الواقعة عليه تنقص كلاً من n و m بواحد. وبذلك فإن المقدار $n - m + f$ لا يتغير. كما أن إزالة حافة مشتركة بين تخمين وجهين مختلفين تنقص كلاً من m و f بواحد. ولا يتغير n . وفي هذه الحالة أيضاً $n - m + f$ لا يتغير.

فاذا بدأنا بأي بيان مستو متصل وطبقنا عمليات من النوعين (أ) و(ب) فسوف نتوصل الى بيان G يتكون من رأس واحد فقط وبدون حافات ، وذلك لأن G بيان منته. عندئذ يكون هنالك وجه واحد فقط في G' وهو الوجه الخارجي. وعليه فان الصيغة (4-1) صحيحة للبيان G' . ولما كان الطرف الايسر من هذه الصيغة لا يتغير عندما نجري عمليات من النوعين (أ) و(ب)، فان صيغة أولر صحيحة للبيان G ، وبذلك يتم البرهان.

هناك العديد من النتائج التي يمكن ان نستمدتها مباشرة من صيغة أولر .

نتيجة (4-1) : اذا كان G بيانا مستويا متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافته m ونخم كل وجه من أوجهه هو دارة بسيطة طولها l ، حيث ان $l \geq 3$ ، فان

$$m = l(n - 2) / (l - 2) . \quad \dots (2-4)$$

لاحظ ان نخم الوجه الخارجي هو الدارة التي تحيط بالبيان المستوي من الخارج .

البرهان : بما ان نخم كل وجه في G هو دارة بسيطة طولها l وان كل حافة تشترك بين تخمي وجهين مختلفين ، فان $2m$ يساوي مجموع أطوال تخوم كل اوجه G ، أي

$$lf = 2m \quad \text{ان}$$

وباستعمال صيغة أولر نحصل على

$$n - m + (2m/l) = 2,$$

ومنها نحصل على (4-2) . ■

يقال لبيان بسيط متصل مستو انه أعظمي (maximal) انه كانت عملية اضافة حافة بين رأسين غير متجاورين تحوله الى بيان غير مستو. وبذلك ، فان البيان المستوي يكون أعظمية اذا كان محتويا على أكبر عدد من الحافات ، لنفس مجموعة الرؤوس . وبمعنى آخر ، اذا كان G مستوياً أعظمية ، فان نخم كل وجه فيه هو دارة بسيطة طولها 3 . وعليه ، بموجب النتيجة (4-1) نحصل على النتيجة التالية .

نتيجة (4-2) : اذا كان G بيانا مستويا أعظمية عدد رؤوسه n وعدد حافته m . فان

$$m = 3(n - 2) .$$

من هذه النتيجة نحصل مباشرة على شرط ضروري للبيانات المستوية .

نتيجة (3-4) : إذا كان G بيانا متصلاً مستويًا بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد
حافته m ، فإن

$$m \leq 3n - 6.$$

نتيجة (4-4) : البيانات K_5 و $K_{3,3}$ غير مستويين .

البرهان : في K_5 لدينا $n = 5$ ، $m = 10$ وعليه

$$m = 10 > 9 = 3n - 6.$$

ولذلك ، فإن افتراض ان K_5 مستويًا سوف يناقض نتيجة (3-4) .
وهكذا ، فإن K_5 غير مستوي .

في $K_{3,3}$ لدينا $n=6$ ، $m=9$ وطول كل دائرة بسيطة لا يقل عن 4 . فإذا كان $K_{3,3}$
مستويًا ، فإن $2m \geq 4f$ ، وان $f=5$ بموجب صيغة أويلر . ولكن هذا يؤدي الى
 $2(9) \geq 4(5)$ ، وهو أمر مستحيل . لذلك ، فإن $K_{3,3}$ غير مستوي . ■

ان للبيانين K_5 و $K_{3,3}$ أهمية كبيرة في دراسة البيانات المستوية كما سنرى ذلك
في البند الآتي .

نتيجة (4-5) : كل بيان بسيط مستوي . والذي عدد رؤوسه لا يقل عن 4 . يجب
ان يحتوي على أربعة رؤوس على الأقل كل منهم بدرجة لا تزيد على 5 .

البرهان : يكفي أن نبرهن على ان كل بيان مستوي أعظمي . G . الذي عدد رؤوسه n
لا يقل عن 4 . يحتوي على أربعة رؤوس على الأقل كل منهم بدرجة لا تزيد على 5 .

نفرض ان عدد حافات G هو m . لما كان ρ مجموع درجات رؤوس G
يساوي ضعف عدد الحافات m [بموجب البرهنة (1-1)] . وان

$$m = 3n - 6$$

بموجب النتيجة (2-4) . فإن

$$\rho = 2m = 6n - 12 = 6(n - 4) + 4(3).$$

وبما ان G أعظمي وان $n \geq 4$. فإن درجة كل رأس في G لا تقل عن 3 . وعليه . فإن
هنالك على الأقل أربعة رؤوس بدرجة لا تزيد على 5 . ■

تمارين (4 - 1)

- (1) أعد رسم البيان المعطى في الشكل (4-3) بحيث يصبح F_3 الوجه الخارجي .
 (2) برهن على أنه إذا كان G بياناً مستويًا عدد رؤوسه n وعدد حافته m وعدد أوجهه f وعدد مركباته k ، فإن

$$n - m + f = k + 1 .$$

- (3) اثبت النتيجة (4-3) .
 (4) اثبت انه اذا كان G بياناً بسيطاً مستويًا خالياً من البرازخ والمثلثات . فإن

$$m \leq 2(n - 2) .$$

- حيث ان n عدد رؤوس G وان m عدد حافته .
 (5) ليكن G بياناً بسيطاً متصلًا مستويًا تكعيبيًا (أي درجة كل رأس فيه هي 3) عدد رؤوسه n . فإذا علمت أن عدد الأوجه التي طول تخم كل منها i هو ϕ_i . فاثبت ان

$$\sum_{i=3}^l (6 - i) \phi_i = 12 .$$

- حيث ان l هو عدد الحافات في أطول تخم للأوجه .
 لاحظ ان البرزخ . ان وجد . يعتبر من ضمن تخم الوجه الذي يقع فيه ويحسب مرتين في طول ذلك التخم . [تلميح : استعمل المبرهنة (1) وصيغة أولر] .

- (6*) جد بياناً بسيطاً متصلًا مستويًا عدد رؤوسه 8 بحيث ان البيان المتمم \bar{G} يكون مستويًا . [تلميح : خذ G مستويًا أعظمياً] .

- (7) يعرف خصر (girth) بيان G بأنه الطول لأقصر دائرة في G . اذا كان G بياناً متصلًا مستويًا خصره g . حيث $g \geq 2$. وعدد رؤوسه n . وعدد حافته m . وبدون برازخ . فاثبت أن

$$m(g - 2) \leq g(n - 2) .$$

- (8*) برهن على ان في كل بيان مستوي يوجد رأس v أو وجه F . واحد على الاقل . بحيث ان

$$\rho(v) \leq 3 \quad , \quad \rho(F) \leq 3 .$$

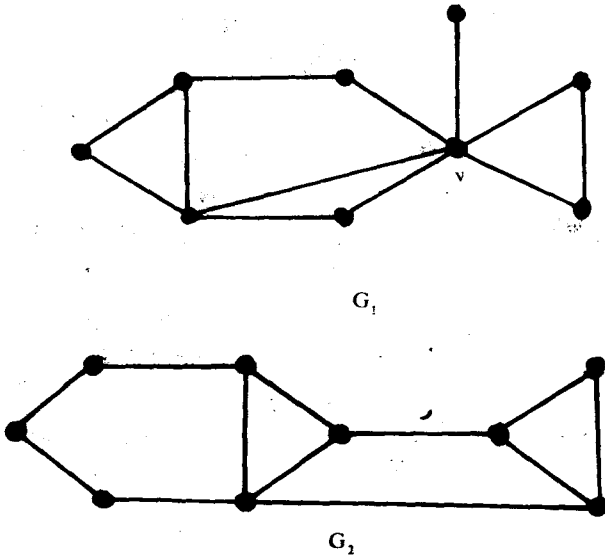
- حيث ان $\rho(F)$ هو طول تخم الوجه F .

(2 - 4) مبرهنة كورتوفسكي (Kuratowski's Theorem)

سوف نركز اهتمامنا في هذا البند على اثبات مبرهنة كورتوفسكي المشهورة والاساسية في تمييز البيانات المستوية عن غير المستوية . ولأجل ذلك نحتاج قبل كل شيء لبعض التعاريف والنتائج الأولية .

يقال لرأس v في بيان متصل G انه رأس قاطع (cut - vertex) أو نقطة مفصلية (articulation point) اذا كان البيان $G - v$. الناتج من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه غير متصل .

ويقال لبيان متصل انه قابل للانفصال (Separable) اذا احتوى على رأس قاطع . كما ويقال لبيان متصل انه غير قابل للانفصال (non - separable) أو ثنائي الاتصال (biconnected) اذا لم يحتو على رأس قاطع . فمثلاً . البيان G_1 في الشكل (4 - 4) هو بيان قابل للانفصال وان الرأس v هو رأس قاطع . أما البيان G_2 فهو غير قابل للانفصال .



شكل (4 . 4)

إذا كان v رأساً قاطعاً في بيان قابل للانفصال G وكانت C مركبة في $G - v$ ، فإن البيان الجزئي الناتج من C بإضافة الرأس v مع كل حافات G التي تصل رأساً في C مع الرأس v يطلق عليه قطعة (piece) البيان القابل للانفصال G نسبة للرأس القاطع v .

مبرهنة (4-2): يكون الرأس v رأساً قاطعاً لبيان بسيط متصل G عدد رؤوسه n ، حيث $n \geq 3$ ، إذا وإذا فقط وجد في G رأسان u و w بحيث ان كل درب يصل u و w يمر بالرأس v .

البرهان: إذا كان v رأساً قاطعاً، فإن $G - v$ غير متصل. لتكن H_1 و H_2 مركبتين في $G - v$ ، وليكن u رأساً في H_1 ، و w رأساً في H_2 واضح ان كل درب بين u و w في G يمر بالرأس v .

من جهة اخرى، الفرض أن هنالك رأسين u و w في G بحيث ان كل درب بينهما يمر بالرأس v عندئذ، لا يوجد أي درب بين u و w في البيان $G - v$ وعليه، فإن $G - v$ غير متصل، ولذلك فإن v رأس قاطع. ■

لأجل السهولة، سوف نرمز للدرب الذي يصل بين الرأسين u و w بالرمز $P[u, w]$ وإذا كان طول الدرب هو l ، فنكتب $[u, w]$ وهو في الواقع الحافة $[u, w]$. وإذا كان $P[u, w]$ ، $P[w, v]$ دربين، فإن $P[u, w] + P[w, v]$ هو مسار من u الى v يتكون من متتابعة حافات الدرب $P[u, w]$ يليها متتابعة حافات $P[w, v]$. وهذا المسار يتضمن درباً بسيطاً بين u و v .

المبرهنة الآتية ضرورية لاثبات مبرهنة كورتوفسكي.

مبرهنة (4-3): [مبرهنة منجر-ديراك (Menger-Dirac)] :

إذا كان $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)^{+}$ درباً بسيطاً يصل بين رأسين مختلفين v_0 و v_k في بيان بسيط غير قابل للانفصال G عدد رؤوسه n حيث أن $n \geq 3$. فإنه يوجد في G دربان بسيطان P' ، P'' بين v_0 و v_k بحيث أن :

(+) لاحظ انه يمكن تمثيل الدروب والدارات بمتابعات لرؤوسها في حالة كون البيان بسيطاً

- (1) لا توجد رؤوس مشتركة بين P'' , P' ، ماعدا الرأسين v_0 و v_k .
(2) اذا تتبعنا كلاً من P'' , P' من v_0 الى v_k ، فان أدلة رؤوس P التي تصادفها تكون بترتيب متزايد .

❁ البرهان : لاثبات هذه المبرهنة نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على k .

عندما $k = 1$. فان $P = [v_0, v_1]$ ، وفي هذه الحالة يوجد درب بسيط P' بين v_0 و v_1 لا يحتوي على الحافة $[v_0, v_1]$ ، لان هذه الحافة ليست بروزاً بسبب كون \bar{G} غير قابل للانفصال وان عدد رؤوسه لا يقل عن 3 . وعندئذ نأخذ $P'' = [v_0, v_1]$ ايضاً .

لنفرض الان أن المبرهنة صحيحة عندما يكون طول الدرب البسيط مساوياً لـ k ، ونثبت أنها صحيحة عندما يكون طوله $(k + 1)$ ، وبذلك نفرض أن الدرب البسيط

$$P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$$

هو بطول $(k + 1)$.

دعنا نرمز بـ Q' ، Q'' للدريين البسيطين بين v_0 و v_k اللذين يحققان شروط المبرهنة بالنسبة للدرب البسيط $Q = P [v_0, v_k]$ ونثبت وجود درين P' و P'' بين v_0 و v_{k+1} يحققان شرطي المبرهنة .

يجب أن يكون هنالك درب بسيط R بين v_0 و v_{k+1} لا يمر بالرأس v_k لان غير ذلك يؤدي الى كون v_k رأساً قاطعاً بموجب المبرهنة (4 - 2) . آخذين بنظر الاعتبار أن v_0 رأس الابتداء للدرب R ، نفرض أن w هو آخر رأس من رؤوس R والذي يقع على المسار

$$Q + Q' + Q''$$

والآن لدينا أربع حالات مختلفة نستعرضها فيما يلي :

الحالة الاولى : $w = v_0$. عندئذ يكون الدريان البسيطان المطلوبان هما

$$P' = P \quad , \quad P'' = R \quad .$$

الحالة الثانية : $w = v_{k+1}$. بما أن w ليس رأساً في Q . فإن w في Q' أو Q'' ولكنه ليس في كليهما . فإذا كان w في Q' . نأخذ

$$P' = Q' [v_0, w] \quad , \quad P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}] .$$

وإذا كان w في Q'' . فإننا نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}] \quad , \quad P'' = Q'' [v_0, w] .$$

الحالة الثالثة : الرأس w لا ينتمي إلى Q وأن $w \neq v_{k+1}$. في هذه الحالة يكون w إما في Q' أو في Q'' . فإذا كان w في Q'' . نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}] \quad P'' = Q'' [v_0, w] + R [w, v_{k+1}] .$$

وإذا كان w في Q' . نأخذ

$$P' = Q' [v_0, w] + R [w, v_{k+1}] \quad . \quad P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}] .$$

الحالة الرابعة : الرأس w ينتمي إلى Q ولكن $w \neq v_0, w \neq v_{k+1}$. في

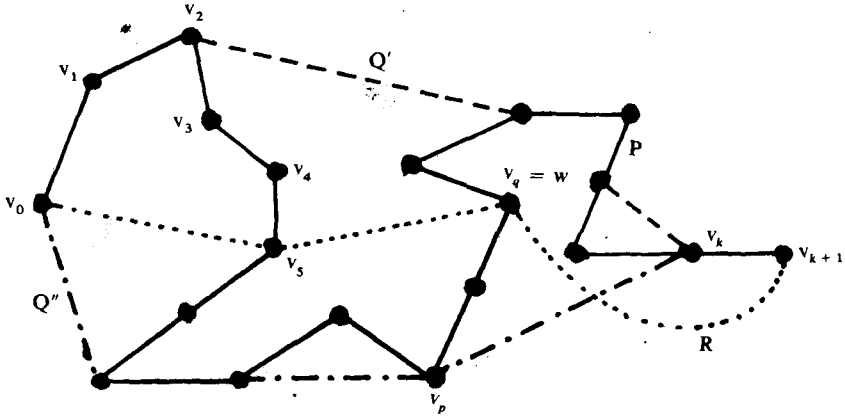
هذه الحالة يمكننا أن نكتب $w = v_q$ حيث $q < k$ ؛ ونفرض أن v_p هو آخر رأس (أخذين بنظر الاعتبار أن كافة الدروب تبدأ من v_0) مشترك بين $Q' + Q''$ والمحقق للمتباعدة $p \leq q$. فإذا كان v_p في Q'' [انظر الشكل (4-5)] ، نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}] , P'' = Q'' [v_0, v_p] + Q [v_p, v_q] + R [v_q, v_{k+1}] .$$

وإذا كان v_p في Q' . نأخذ

$$P' = Q' [v_0, v_p] + Q [v_p, v_q] + R [v_q, v_{k+1}] , P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}]$$

وبما أن هذه الحالات هي كل الحالات الممكنة ، فإن المبرهنة صحيحة بالنسبة

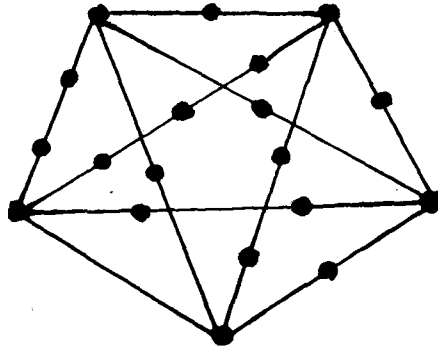


شكل (4-5)

للدرب P الذي طوله $(k + 1)$. وبذلك يتم البرهان ■.

واضح ان كون بيان ما مستويًا أو غير مستوي لا يتأثر لو قسمنا احد الحافات الى حافتين بادخال رأس جديد بدرجة 2، أو لودمجنا حافتين بحافة واحدة بازالة رأس درجته 2. هذه الفكرة تقودنا الى التعريف الاتي :

يقال لبيانين G و G' أنهما متكافئان توبولوجياً (homeomorphic) اذا أمكن تحويلهما الى بيانين متشاكلين بادخال رؤوس جديدة بدرجة 2 على بعض حافات أحدهما أو كليهما. فمثلاً . البيان المعطى في الشكل (4-6) يكافئ توبولوجياً البيان التام K_5 .



شكل (4-6)

نحن الآن مهيزون لاثبات مبرهنة كوروفسكي.

مبرهنة (4 - 4) - مبرهنة كوروفسكي (1930) - يكون البيان G مستويًا إذا واذ فقط لا يحتوي G على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$.

البرهان (+) واضح انه اذا كان G صحيحاً على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 أو

$K_{3,3}$ ، فان G غير مستوي، لان كلا من K_5 و $K_{3,3}$ غير مستوي بموجب النتيجة (4 - 4)، وأن البيان الذي يحتوي على بيان جزئي غير مستوي يكون غير مستوي.

البرهان بالاتجاه الآخر، أي اذا كان G غير مستوي، فانه يحتوي على بيان جزئي

يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$ ، مطول وأكثر صعوبة، وسيكون بطريقة الاستقراء

الرياضي على عدد الحافات. ويمكن أن نبرهن على العبارة المكافئة لذلك، أي: « إذا كان G لا يحتوي على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$ ، فان G بيان مستوي.

واضح ان المبرهنة صحيحة فيما اذا كان G مكوناً من حافة واحدة أو حافتين، أو

ثلاث حافات، وعليه نفرهن أنها صحيحة لكل بيان عدد حافته أقل من m ، ونبرهن على أنها صحيحة لبيان عدد حافته m . وهكذا نفرض أن G بيان عدد حافته m

ولا يحتوي على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$. سوف نثبت أن الفرض G غير مستوي يؤدي الى تناقض.

واضح ان البيان G متصل، لانه اذا كان غير متصل ولا يحتوي على رؤوس

منعزلة، فان عدد الحافات في كل مركبة يكون أقل من m ، وعندئذ تكون كل من مركباته مستوية، وهكذا يصبح G مستويًا. كذلك، يجب ان يكون G غير قابل للانفصال والا اصبح مستويًا بموجب فرض الاستقراء الرياضي.

لتكن $[u, w]$ حافة في G ، وليكن G' البيان الناتج من G بازالة الحافة

$[u, w]$. البيان G' مستوي، بموجب فرض الاستقراء الرياضي. الا ان ثبت ان

البيان G' يحوي دائرة بسيطة تمر بالرأسين u و w بالطبع، هنالك حافتان في G' هما: قابل للانفصال. أو غير قابل للانفصال.

(...) هذا البرهان هو تنقيح وتعديل بيرج (C. Berge) لبرهان كوروفسكي.

فإذا كان G' قابلاً للانفصال ، فإنه يوجد رأس قاطع c بحيث انه كل
 درب بين u و w يمر بالرأس c ، سنبين ان هذا يؤدي الى تناقض .

إذا ازلنا c مع كل الحافات الواقعة عليه نحصل على مركبتين فقط ، وهذا
 يعني ان هنالك في G' قطعتين فقط C_u و C_w نسبة الى الرأس القاطع c ،
 حيث ان C_u هي القطعة التي تحتوي على الرأس u و C_w التي تحتوي على w .
 ليكن C'_u و C'_w بيانين ناتجين من C_u و C_w باضافة الحافتين $[u, c]$ و
 $[w, c]$ ، على الترتيب ، لما كان G لا يحتوي على بيان جزئي يكافئ توبولوجيا
 $K_{3,3}$ او K_5 ، فإن C'_u و C'_w لا يحتوي ايضاً على مثل هذه البيانات
 الجزئية ، وبما ان عدد حافات كل من C'_u و C'_w أقل من m ، فان كلاً منهما مستو ،
 بموجب فرض الاستقراء الرياضي . وباستعمال اسقاط استيريوغرافي مناسب
 نستطيع ان نغمر كلاً من C'_u و C'_w في المستوي بحيث ان الحافتين $[u, c]$ و $[w, c]$
 على الوجه الخارجي لهما ، على الترتيب . فاذا وصلنا الرأسين u و w بحافة $[u, w]$
 واقعة في الوجه الخارجي ، نحصل على غمر للبيان G في المستوي ، وبذلك ،
 فان G مستو ، وهو يناقض افتراضنا انه غير مستو . وهكذا ، نستنتج انه لا يمكن ان
 يكون G' قابلاً للانفصال ، اي يجب ان يكون G' غير قابل للانفصال . وعليه ،
 بموجب مبرهنة منجر - ذيراك ، يوجد في G' دربان بسيطان بين u و w
 لا يمشران في أي راس غير النهائيين u و w ، اي ان هنالك دائرة بسيطة في G'
 تحتوي على u و w . وسنثبت ان وجود هذه الدائرة يؤدي الى تناقض لفرضنا
 ان G غير مستو .

لتكن C دائرة بسيطة تمر بالرأسين u و w في G' بحيث انها تضم في
 داخلها أكبر عدد من أوجه G المغمور في المستوي . دعنا نختر اتجاهها كالتالي ،
 مثل الاتجاه المعاكس لحركة عقرب الساعة ، للدائرة C بالطبع ، C تقسم
 المستوي الى جزئين ، الجزء الداخلي المحاط بـ C والجزء الواقع خارج C . حافات
 G' التي تقع في الجزء الداخلي تكون مع رؤوسها بياناً جزئياً يطلق عليه البيان الداخلي
 وحافات G' التي تقع في الجزء الخارجي تكون مع رؤوسها بياناً جزئياً يطلق عليه
البيان الخارجي . سنطلق على كل مركبة للبيان الداخلي قطعة داخلية ، ونطلق على
 كل مركبة للبيان الخارجي قطعة خارجية ، نسبة للدائرة C

نفرض ان G' مغمور في المستوي بشكل لا يمكن معه تحويل أية قطعة خارجية الى البيان الداخلي دون احداث تقاطع بين بعض الحافات .

سنرمز للدرب البسيط من الرأس u الى الرأس w من الدارة C . باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة . بالرمز $P[u, w]$. بالطبع $P[w, u]$ هو ذلك الجزء من C من الرأس w الى الرأس u باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة وبذلك $C = P[u, w] + P[w, u]$.

كل قطعة خارجيه لا يمكن ان تشترك مع $P[u, w]$ او $P[w, u]$ بأكثر من رأس واحد . لان غير ذلك يؤدي الى تكوين دارة بسيطة تمر بالرأسين u و w وتحتوي على عدد اكبر من اوجه G' في داخلها . ولما كان G غير قابل للانفصال . فان كل قطعة خارجية تشترك برأس واحد فقط مع الدرب $P(u, w)$ وبرأس واحد فقط مع الدرب $P(w, u)$. حيث ان $P(u, w)$ هو الدرب الناتج من $P[u, w]$ بحذف الرأسين u و w . وبالمثل نعرف $P(w, u)$ من جهة اخرى . فان هنالك على الاقل قطعة واحدة خارجية وقطعة واحدة داخلية . لان خلاف ذلك يجعل G مستوياً . لتكن E قطعة خارجية . وليكن a الرأس المشترك بين E والدرب $P(w, u)$. و b الرأس المشترك بين E و $P(u, w)$. من الواضح ان كل قطعة داخلية تشترك مع C برأسين على الاقل لكون G غير قابل للانفصال . كما ان هنالك على الاقل قطعة داخلية واحدة تشترك مع كل من $P(u, w)$ و $P(w, u)$ برأس واحد على الاقل . لان خلاف ذلك يجعل G مستوياً . اضافة الى ذلك . اذا كان لكل قطعة داخلية من هذا النوع جميع رؤوسها المشتركة مع C واقعة كلها على $P(a, b)$ أو كلها واقعة على $P(b, a)$. فانه يمكننا تحويل القطعة الخارجية E الى داخل C مما يناقض افتراضنا .

لذلك يوجد على الاقل قطعة داخلية واحدة . I . تشترك مع C برأسين . مثل c, d . متناويين مع a, b . بترتيب . مثل a, c, b, d . باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة . وتشترك مع كل من الدربين $P(u, w)$. $P(w, u)$ برأس واحد على الاقل . وعليه . يمكن تغطية كل حاد . وقوع هذه الرؤوس على C بافتراض وجود أربعة رؤوس . مثل c, d, e, f . مشتركة بين C و I

بحيث ان :

$c \in P(a, b)$, $d \in P(b, a)$, $e \in P(u, w)$, $f \in P(w, u)$,
 حيث ان الرمز e يعني « ينتمي الى » واضح انه لا يمكن ان يكون $e = f$, $c = d$ ولكن يمكن ان يكون لدينا $c = e$, $c = f$. الخ . وهكذا ستأمل فيما يلي
 كلاً من هذه الحالات .

(1) اذا كان احد الرأسين c و d على الدرب $P(u, w)$ والآخر على الدرب
 $P(w, u)$. وليكن

$$c \in P(w, u) \text{ , } d \in P(u, w) \text{ ,}$$

فعندئذ نأخذ $d = e$ و $c = f$. هذه الحالة تؤدي الى وجود بيان جزئي في G يكافيء
 توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4-7-1)] . وهذا يناقض الفرض .

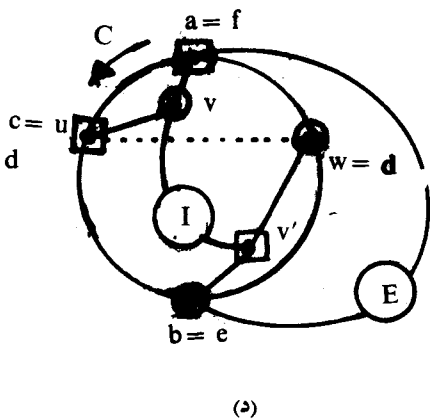
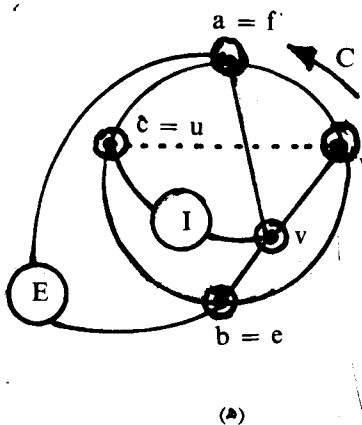
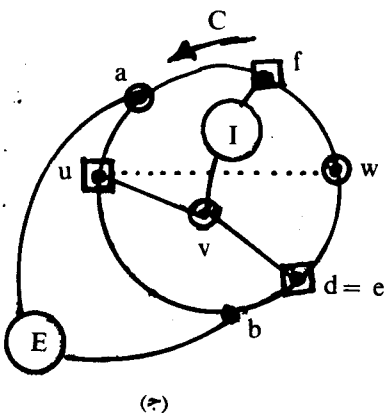
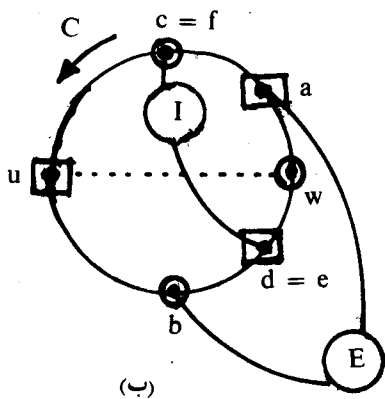
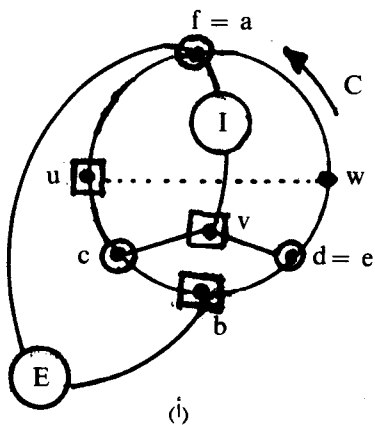
(2) اذا كان كل من c و d على $P(u, w)$. فعندئذ يمكننا ان نفرض
 $f = a$. لانه اذا كان $f \neq a$ نحصل على الحالة (1) لسكون $f \in P(w, u)$.
 لكن اذا كان $f = a$. فاننا نجد أيضاً ان هنالك في G بياناً جزئياً يكافيء
 توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4-7-ب)] . لنفس السبب، يمكننا التخلص من الحالة
 التي فيها c و d واقعين على الدرب $P(w, u)$

(3) اذا كان $c = u$ و $d \neq w$. مثلاً $d \in P(u, w)$. فاننا نحصل على
 بيان جزئي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4-7-ج)] . وهذه الحالة
 تناقض الفرض أيضاً . ولنفس السبب نتخلص من الحالة التي فيها $d = w$, $c \neq u$.

(4) اذا كان $c = u$ و $d = w$. فيمكننا ان نفرض $e = b$ و $f = a$. لانه اذا لم
 يكن كذلك فسيكون لدينا اما الحالة (1) او الحالة (3) . وهنا لدينا حالتان .

(أ) اذا كان أحد الدروب التي تصل الرأسين a و b يشترك مع أحد الدروب
 التي تصل الرأسين c و d بأكثر من رأس واحد في I . فعند ذلك يكون في
 G بيان جزئي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4-7-د)] .

(ب) اذا كانت كل الدروب التي تصل الرأسين a و b تشترك برأس واحد
 فقط مع كل الدروب التي تصل الرأسين c و d . في I . فعند ذلك يكون في
 G بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 [انظر الشكل (4-7-هـ)] .



(7-4) شکل

لقد ناقشنا فيما تقدم كل الحالات لمواقع الرأسين c و d . وفي كل تلك الحالات وجدنا بياناً جزئياً في G يكافئ توبولوجياً $K_{3,3}$ أو K_5 . وهو ما يناقض فرضنا . وبهذا يتم البرهان . ■

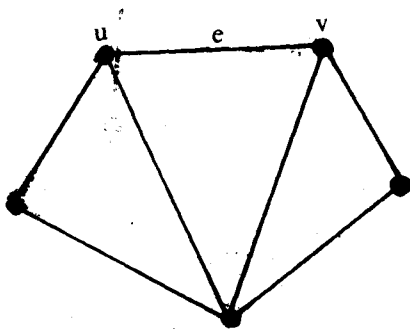
ملاحظة : في الشكل (4-7) : لاحظ ان الرؤوس المحاطة بدوائر او مربعات صغيرة هي الرؤوس الرئيسية (اي التي بدرجة 3 او اكثر) للبيان الجزئي الذي يكافئ توبولوجياً $K_{3,3}$ او K_5 .

هناك العديد من المبرهنات التي تعطي شروطاً ضرورية وكافية لكي يكون بيان مامسئياً . وسوف نثبت أحدهما فيما يلي ونستعرض بعضاً منها في أماكن أخرى من هذا الفصل .

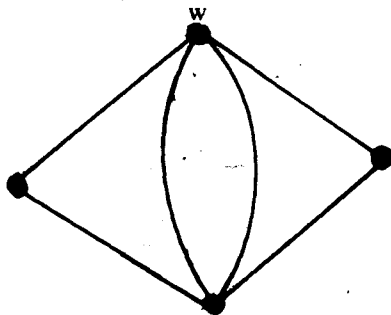
هنا نحتاج الى تعريف مفهوم الانكماش (the contraction) . انكماش حافة في بيان G هو عملية ازالة الحافة $e = [u,v]$ من G ثم تطابق رأسها u و v بحيث ان الرأس الناتج w يقع على كل الحافات التي كانت الوجه على u أو v ما عدا الحافة e [انظر الشكل (4-8)] . يقال ان G قابل للانكماش (contractible) الى G' (أو G' هو منكمش G)

إذا امكن الحصول على G' من G باجراء انكماشات متعاقبة لبعض حافات

G



G



G'

شكل (4-8)

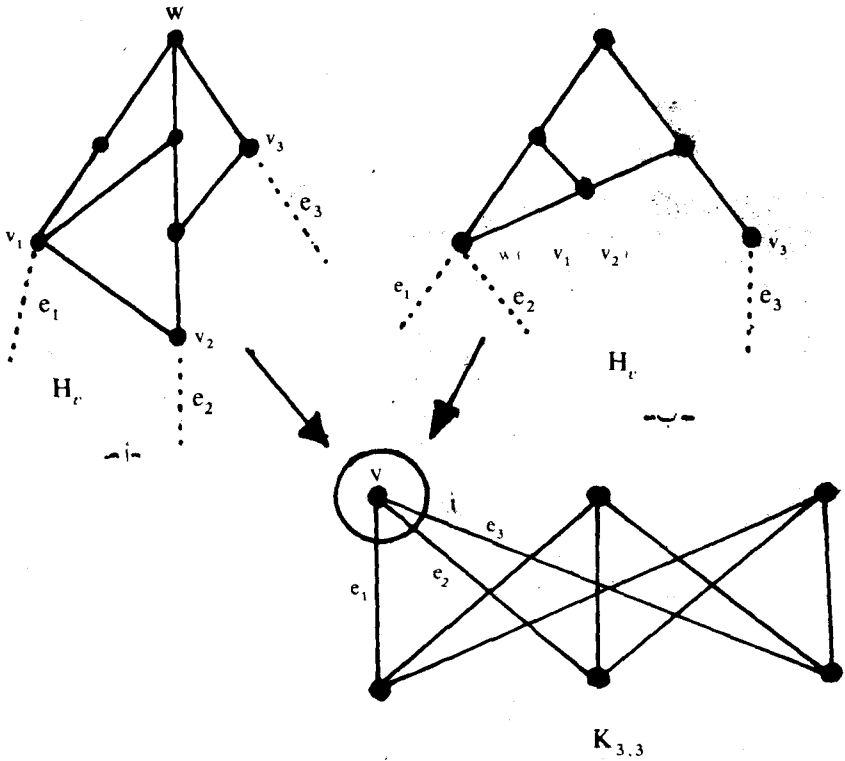
مبرهنة (4-5) : يكون البيان G مستويًا إذا وإذا فقط G لا يحتوي على بيان جزئي قابل للانكماش إلى K_5 أو $K_{3,3}$.

البرهان : إذا كان G غير مستوي . فإنه يحتوي على بيان جزئي H . يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$. بموجب مبرهنة كورتوفسكي وبانكماش بعض حافات H التي تقع على الرؤوس بدرجة 2 . نجد مباشرة أن H قابل للانكماش إلى K_5 أو $K_{3,3}$.

من جهة أخرى . نفرض أن G يحتوي على بيان جزئي H . قابل للانكماش إلى $K_{3,3}$ ونبرهن على أن G غير مستوي . ليكن v رأساً في $K_{3,3}$. ناجماً عن انكماش البيان الجزئي H إلى H_r [انظر الشكل (4-9)]

يقع الرأس v على ثلاث حافات e_1, e_2, e_3 في $K_{3,3}$. وهذا يعني انه عندما نعتبر هذه الحافات حافات في H فإنها تقع بالترتيب على ثلاثة رؤوس v_1, v_2, v_3 (قد لا تكون مختلفة) في H_r . إذا كانت الرؤوس v_1, v_2, v_3 مختلفة . فإنه يمكن إيجاد رأس w في H_r مع ثلاثة دروب من w إلى هذه الرؤوس وهي لا تشترك في اي رأس غير w [انظر شكل (4-9-أ)] . أما إذا كانت بعض الرؤوس v_1, v_2, v_3 غير مختلفة . قل مثلاً $v_1 = v_2 \neq v_3$. فعندئذ نأخذ $w = v_1 = v_2$. ويكون هنالك درب من w إلى v_3 في H_r . وهكذا . يمكننا ان نضع الرأس w مع الدر ب او الدر وب الخارجة منه بدلاً عن H_r . إذا استمرنا بهذا التركيب لكل الرؤوس الاخرى في $K_{3,3}$. ثم وصلنا الدر وب الناتجة بالحافات المقابلة لها في $K_{3,3}$. ينتج بيان جزئي من H يكافئ توبولوجياً $K_{3,3}$. وعليه . فإن G غير مستوي بموجب مبرهنة كورتوفسكي

بمناقشة مماثلة يمكننا ان نثبت انه اذا احتوى G على بيان جزئي H قابل للانكماش إلى K_5 . فإن G غير مستوي . وقد ترك البرهان كتمرين للطالب [التمرين (7) من مجموعة تمارين (4-2)] . ■



شكل (4 - 9)

تمارين (4 - 2)

- (1) برهن على أن البيان غير القابل للانفصال G . يكون مستويًا إذا وإذا فقط كل قطعة منه بالنسبة لرأس قاطع v هي مستوية .
[تلميح : إثبت أولاً أنه يمكن غمر G في المستوى بحيث أن v واقع على الوجه الخارجي .]
- (2) إستعمل مبرهنة كورتوفسكي لإثبات ان بيان بيترسن غير مستوي .
- (3) إثبت أن التكافؤ التوبولوجي هو علاقة تكافؤية .
- (4) إذا كان G_1 و G_2 بيانين متكافئين توبولوجياً . وكان عدد رؤوسهما n_1 و n_2 . وعدد حافتاهما m_1 و m_2 . على الترتيب . فاثبت أن $n_1 = n_2$ و $m_1 = m_2$.
- (5) اثبت أن كلامن $I(K_5)$ و $I(K_{3,3})$ غير مستوي . [تلميح : اثبت أن $I(K_5) \cdot I(K_{3,3})$ يحتوي على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً $K_{3,3}$. K_5 . على الترتيب .]

(*6) ليكن G بياناً بسيطاً. اذا كان G غير مستوي، فاثبت ان $I(G)$ غير مستوي ايضاً. اذا كان G مستويًا، فهل من الضروري ان يكون $I(G)$ مستويًا؟

(*7) اثبت انه اذا احتوى بيان G على بيان جزئي قابل للانكماش الى K_5 ، فان G بيان غير مستوي.

(8) هل البيان الاول قابل للانكماش الى بيان تقري في كل من النوعين الآتية؟ من ذلك

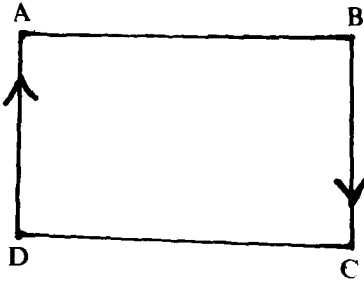
- (a) K_6, K_5 . (b) $K_{3,3}, K_4$.
 (c) W_6, K_4 . (d) K_5 . بيان بيترسن
 (e) W_6 . بيان بيترسن

(3 4) السطوح المغلقة الموجهة (Oriented Closed Surfaces) R^3

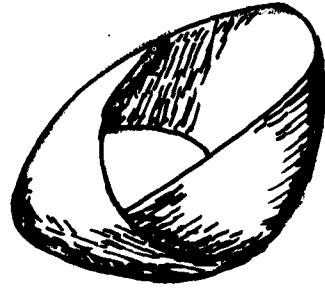
لكي يفهم القاريء موضوعي الجنس وغير البيانات في السطوح الموجهة . يحتاج الى معرفة المقصود بالسطوح المغلقة الموجهة . لذلك ، نعرض في هذا البند ، بشكل صوري ، نبذة مختصرة لبعض المفاهيم المتعلقة بالسطوح . التعاريف الرياضية الدقيقة لهذه المفاهيم تتطلب معرفة بعض المفاهيم التوبولوجية .

السطح الكروي هو سطح مغلق . وكذلك سطح الكرة . اما المستوي فهو سطح مفتوح وكذلك شريط موييس (Mobius strip) المئين في (b) من الشكل (4 - 10) . لاحظ انه يمكن تكوين شريط موييس من تطابق ضلعين متقابلين لمستطيل (من الورق مثلاً) بحيث يتطابق السهمان بعضهما على بعض [انظر (a) من الشكل (4 - 10)] . أي تنطبق النقطة A على النقطة C . وتنطبق النقطة B على B .

يعرف السطح المغلق توبولوجياً على انه مانيفولد 2 - مرصوم (Compact 2 - manifold)



(a)



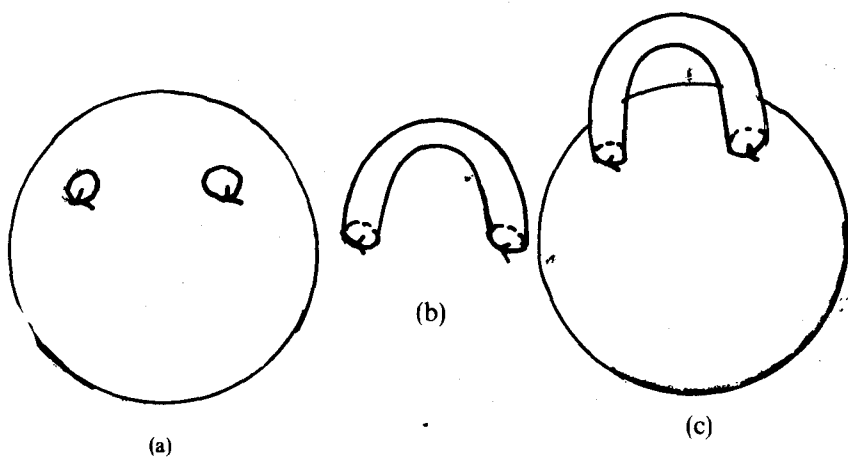
شريط موبوس (b)

شكل (4 - 10)

ليكن S سطحاً . ولنفرض اننا رسمنا حول كل نقطة على S (ماعد النقط الواقعة على تخمه . . إن وجدت) منحنيًا بسيطًا مغلقًا صغيرًا وعينًا له اتجاهًا محددًا (اما باتجاه حركة عقرب الساعة او بالاتجاه المعاكس) . عندئذ . يقال ان S موجه أو قابل للتوجيه (orientable) اذا امكن اختيار الاتجاهات لهذه المنحنيات المغلقة بحيث ان لكل النقط على S القريبة قريباً كافياً عن بعضها يكون لمنحنياتها نفس الاتجاه . فمثلاً . السطح الكروي هو سطح موجه . وكذلك الطرة . اما شريط موبوس فهو سطح غير موجه .

مما تقدم نستنتج ان الكرة والطرة سطحان موجهان مغلقان .

والان نبين بطريقة صورية كيفية الحصول على سطوح مغلقة موجهة اخرى . وذلك بربط مقايض (handles) بالسطح الكروي . نأخذ على سطح الكرة قرصين دائريين مغلقين منفصلين ونعين لتخميتهما نفس الاتجاه (مثلاً . باتجاه حركة عقرب الساعة) . ومن ثم نرفع مابداخلهما فيتكون لدينا ثقبان على السطح الكروي لهما تخمان موجهان بنفس الاتجاه . كما هو مبين في (a) من الشكل (4 11) . بعد ذلك نأخذ اسطوانة منحنية [كالتي في (b) من الشكل (4 11)] ونثبت على طرفيها الاتجاه نفسه الذي عين لتخمي الثقبين . واخيراً . نربط طرفي الاسطوانة بالثقبين الموجودين على سطح الكرة بحيث ينطبق طرفي الاسطوانة على تخمي الثقبين مع المحافظة على الاتجاه نفسه . كما هو مبين في (c) من الشكل (4 11) . السطح الناتج هذا هو سطح كرة مع مقبض واحد . وهو يكافئ توبولوجياً سطح الطرة .



شكل (4 - 11)

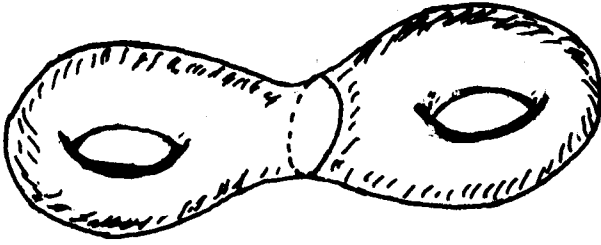
يمكن إعادة هذه العملية على السطح الناتج وذلك بربط مقبض ثانٍ به . فيتكون لدينا سطح كروي مربوط به مقبضان . وهكذا ، بتكرار هذه العملية h من المرات نحصل على كرة مربوط بها h من المقابض .

ندون الآن المبرهنة الآتية بدون ذكر برهانها .

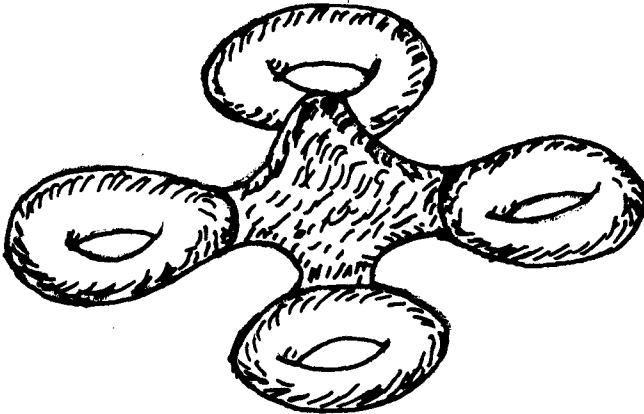
مبرهنة : « كل سطح مغلق موجه يمكن الحصول عليه من السطح الكروي بربط عدد معين من المقابض بالطريقة التي ذكرت فيما تقدم . »

يعرف جنس (genus) السطح المغلق الموجه S بأنه عدد المقابض التي تربط بسطح كروي للحصول على S . فمثلاً ، السطح الكروي هو سطح جنسه صفر ، والطره هي سطح جنسه 1 ، والطره المزدوجة (double torus) المبينة في الشكل (4-12) هي سطح جنسه 2 ، والسطح المبين في الشكل (4-13) هو سطح موجه جنسه 4

نكتفي بهذا القدر من الشرح على السطوح المغلقة الموجهة ، ويمكن للقارئ الراغب في المزيد قراءة بعض كتب موضوع التوبولوجيا .



شكل (4-12) طرة مزدوجة



شكل (4-13) سطح جنسة 4

* (4-4) الجنس والسمك وعدد التقاطع

نشرح في هذا البند ثلاثة لامتغيرات بيانية لبيان G ، وهي الجنس (the genus) والسمك (the thickness) وعدد التقاطع (crossing number) . الكثير من القضايا والمسائل في هذه المواضيع غير محلولة لحد الآن ، والمحلول منها هو بيانات خاصة مثل البيانات التامة والثنائية التجزئة التامة والتكيفية . كما أن معظم النتائج المعروفة لها براهين مطولة ومتعددة الحالات . وعليه ، سوف لانعطي براهين بعض تلك النتائج ونكتفي بذكر نصها اتماماً للفائدة .

سوف نقسم هذا البند الى ثلاث بنود جزئية وفقاً للمواضيع الثلاثة التي يتكون منها .

لقد لاحظنا في الفصل الاول انه يمكن غمري بيان في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 ، وان كل بيان مستوي يمكن غمره في سطح كروي . ولقد لاحظ كونيك (Konig) أن كل بيان يمكن غمره في سطح قابل للتوجيه . ويمكن اثبات صحة ذلك بسهولة . فاذا كان G بياناً مرسوماً على سطح كروي . وكان هنالك تقاطع بين حافتين e_1 و e_2 ، فعندئذ يمكننا ربط مقبض بالسطح الكروي . ورسم e_1 على سطح المقبض وبقاء e_2 مرسوماً على السطح الكروي ماراً تحت المقبض . وهكذا يمكن ربط السطح الكروي بمقابض لا يزيد عددها على عدد التقاطعات بين الحافات . وهكذا يمكن غمر G في سطح مغلق موجه جنسه h لا يزيد على عدد التقاطعات بين الحافات .

ولقد ذكرنا في البند (1 7) غمر بعض البيانات غير المستوية . مثل $K_{4.4}$ ، K_{5} ، K_{6} ، K_{7} ، $K_{3.3}$. في سطح الطرة . يطلق عادة على كل بيان يمكن غمره في سطح طرة بياناً طريباً (toroidal graph) . وهكذا . فان البيانات K_{5} ، K_{6} ، K_{7} ، $K_{3.3}$ ، $K_{4.4}$ هي بيانات طرية .

من الطبيعي ان نسأل عن أقل عدد h بحيث يمكن غمر البيان في سطح موجه جنسه h . ولاجل ذلك نعرف جنس البيان G على النحو الآتي : اذا امكن غمر البيان G في سطح موجه جنسه g ولا يمكن غمره في سطح جنسه $g-1$. فيقال ان جنس البيان G هو g . واضح انه اذا امكن غمر البيان في سطح جنسه g . فيمكن غمره ايضاً في سطح جنسه $g+k$ ، $1 \leq k$. اما العكس فغير صحيح .

يرمز لجنس البيان G بالرمز $g(G)$. واضح ان $g(G) = 0$ اذا واذا فقط G بيان مستوي . كما ان البيانات المتكافئة توبولوجياً لها نفس الجنس . وان جنس اي بيان لا يزيد على عدد التقاطع [انظر التمرين (4) من مجموعة التمارين (1 6)] .

يمكن تعميم صيغة أولر لبيانات ذات جنس g . كما هو مبين في المبرهنة الآتية التي تعود الى أولر . والتي نذكرها بدون برهان .

مبرهنة (4-6) : إذا كان G بياناً متصلًا جنسه g . وعدد رؤوسه n وعدد حافته m وعدد أوجهه (عندما يغمر في سطح موجه جنسه g) f ، فإن

$$n - m + f = 2(1 - g) \quad \dots(3-4)$$

[يمكن الاطلاع على البرهان في المصدر (13)]

من المبرهنة (4-6) نستنتج العديد من النتائج المباشرة .
نتيجة (4-6) : ليكن G بياناً متصلًا عدد رؤوسه n وعدد حافته m وجنسه g . عندئذ :

(أ) إذا كان كل وجه في G مثلثاً . فإن

$$m = 3(n - 2 + 2g) .$$

(ب) إذا كان كل وجه في G شكلاً رباعياً . فإن

$$m = 2(n - 2 + 2g) .$$

البرهان :

(أ) بما ان كل وجه (عندما يغمر G في سطح جنسه g) هو مثلث ، فإن $3f = 2m$ وبالتعويض في الصيغة (4-3) ، نحصل على العلاقة المطلوبة .

وبالمثل : يمكن اثبات الفرع (ب) وقد ترك تمريناً للطلاب ■ .

نتيجة (4-7) : إذا كان G بياناً بسيطاً متصلًا عدد رؤوسه n وعدد حافته m ، فإن

$$g(G) \geq \frac{1}{6} m - \frac{1}{2} n + 1 .$$

وإذا لم يحتو G على مثلثات . فإن

$$g(G) \geq \frac{1}{4} m - \frac{1}{2} n + 1 .$$

البرهان مباشر ويترك تمريناً للطلاب .

ان ماهو معلوم من جنس بيان كفيي قليل جداً . ولكن هنالك صيغ تعطينا الجنس لبيانات خاصة : مثل $K_n, K_{m,n}, Q_n$. والطريقة المتبعة لايجاد تلك الصيغ هي استعمال النتيجة (4-7) للحصول على قيد أدنى ، ثم محاولة اثبات وجود سطح

جنسه يساوي ذلك القيد الادنى ويمكن غمري البيان الخاص فيه . ويتم ايجاد ذلك السطح بطريقة تركيبية . ولهذا ، فان طريقة اثبات أن القيد الادنى هو أيضاً قيد أعلى مطولة جداً ومتعددة الحالات .

إذا كان x أي عدد حقيقي . فإننا نعرف $[x]$ بأنه أكبر عدد صحيح لا يزيد على x . فمثلاً $[-4/3] = -2$ ، $[7/2] = 3$ ، $[4] = 4$. كما نعرف $\{x\}$ بأنه أصغر عدد صحيح لا يقل عن x . فمثلاً

$$\{5\} = 5 ، \{10/3\} = 4 ، \{-4/3\} = -1 .$$

يمكن ان نثبت بسهولة انه اذا كان x و y عددين صحيحين موجبين . فان

$$\{x/y\} = [(x+y-1)/y] \dots\dots (4-4)$$

مبرهنة (7-4) : لكل عدد صحيح موجب n ، $n \geq 3$. لدينا

$$g(K_n) = \left\{ \frac{1}{12} (n-3)(n-4) \right\}$$

باستعمال النتيجة (7-4) . نستنتج مباشرة أن

$$g(K_n) \geq \left\{ \frac{1}{12} (n-3)(n-4) \right\}$$

وفي سنة 1890 . تكهن العالم هيوود (Heawood) أن العدد

$$\left\{ \frac{1}{12} (n-3)(n-4) \right\}$$

هو أيضاً قيد أعلى لـ $g(K_n)$ ولكنه لم يتمكن من اثبات ذلك . وفي سنة 1968 . أثبت العالمان رنكل (Ringel) ويونكس (Youngs) صحة تكهن هيوود . ولما كان البرهان مطولاً فلا نذكره هنا . ويمكن للراغب الاطلاع عليه في المصدر [5] .

بالنسبة لجنس البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$. فقد أثبت رنكل (سنة 1965)

المبرهنة الآتية :

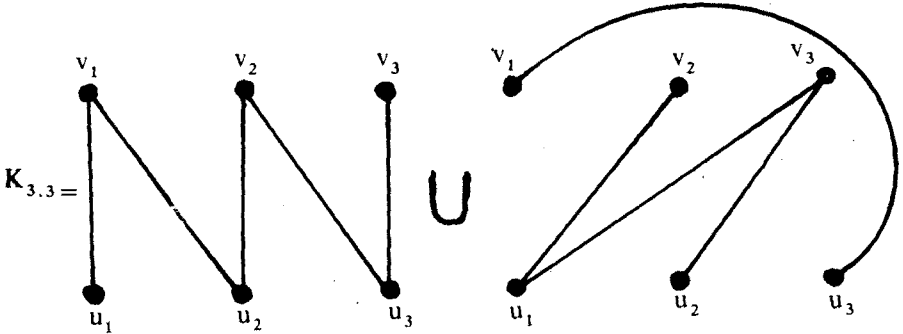
مبرهنة (4-8) : لكل بيان ثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ ، $m, n \geq 2$. لدينا

$$g(K_{m,n}) = \left\{ \frac{1}{4} (m-2)(n-2) \right\}$$

لن نذكر برهان هذه المبرهنة هنا لكونه مطولاً جداً .

(4-4-2) السلك :

يعرف سلك بيان G بأنه العدد الاصغر من البيانات الجزئية المستوية التي اتحادها هو G . ويرمز عادة لسلك البيان G بالرمز $\theta(G)$. وأضح أن G مستوي إذا وإذا فقط $\theta(G) = 1$. كما أن $\theta(K_5) = 2$ و $\theta(K_{3,3}) = 2$ [انظر الشكل (4-4)].



شكل (4-4)

بما ان عدد حافات البيان المستوي الاعظمي الذي عدد رؤوسه n هو $(3n - 6)$ فان لكل بيان G .

$$\theta(G) \geq \frac{m}{3n - 6} \quad \dots (5-4)$$

حيث ان n عدد رؤوس G و m عدد حافته. وما دام θ عددا صحيحاً موجبا . فان

$$\theta(G) \geq \left\{ \frac{m}{3n - 6} \right\} \quad \dots (6-4)$$

وباستعمال العلاقة (4-4) نحصل من (6-4) على

$$\theta(G) \geq \left[\frac{m + 3n - 7}{3n - 6} \right] \quad \dots (7-4)$$

هذه الصيغة تعطينا القيد الأدنى لسلك اي بيان . ومما يدهشنا ان هذا القيد الأدنى هو ايضا القيمة المضبوطة لسلك بعض البيانات الخاصة كما هو مبين فيما يلي .

بما ان عدد حافات K_n هو $n(n-1)/2$ ، فانه بموجب العلاقة (4 - 7)،
 يكون لدينا :

$$\theta(K_n) \geq \left[\frac{n(n-1) + 6n - 14}{6n - 12} \right] = \left[\frac{n+7}{6} \right]. \dots(8=4)$$

مبرهنة (4 - 9) : اذا كان

$$n \not\equiv 4 \pmod{6}, n \neq 9$$

فان

$$\theta(K_n) = \left[\frac{n+7}{6} \right]. \dots(9-4)$$

عندما $n \equiv 4 \pmod{6}$ ، الصيغة (4 - 9) قد تصح اولاً تصح .

كما وجدنا في العلاقة (4 - 8)، فان $\lceil (n+7)/6 \rceil$ هو قيد ادنى لسمك K_n ، ولكن البرهان على ان هذا العدد هو نفسه قيد اعلى مطول ومعقد ، ولذلك فقد فضلنا عدم ذكره هنا .

اما سمك البيان $K_{m,n}$ فقد درس من قبل العلماء Moon و Harary و Beineke في السنوات 1957 - 1964 . وتلخص نتائجهم في " هذبة

التالية .

مبرهنة (4 - 10) :

$$\theta(K_{m,n}) = \left\{ \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\}$$

عدا عندما $m < n$ و mn فردى ، ويوجد عدد صحيح k بحيث إن

$$n = [2k(m-2)/m - 2k].$$

يترك البرهان لصعوبته.

نتيجة (4 - 8) :

$$\theta(K_{n,n}) = \lceil (n+5)/4 \rceil.$$

البرهان : بموجب المبرهنة (4 - 10) ،

$$\theta(K_{n,n}) = \left\{ \frac{n^2}{4(n-1)} \right\}$$

$$= \left[\frac{n^2 + 4n - 5}{4(n-1)} \right], \quad \text{بموجب (4-4)}$$

$$= [(n+5)/4].$$

(3-4-4) عدد التقاطع :

سبق أن عرفنا في الفصل الاول عدد التقاطع ، $v(G)$ ، لأي بيان G ، على أنه أصغر عدد ممكن لتقاطعات حافته عندما يرسم G في المستوي ، علماً بأنه لايسمح بتقاطع أكثر من حافتين في نقطة واحدة.

القيمة المضبوطة لـ $v(G)$ غير معروفة حتى لبعض البيانات الخاصة ، ولكن هنالك قيود عليا لبعض منها ، ويعتقد بعض الباحثين انها القيم المضبوطة . وسوف نشرح عدد التقاطع لكل من K_n و $K_{m,n}$.

مبرهنة (11-4) : لكل n ، $n \geq 4$ ، لدينا

$$v(K_n) \leq \begin{cases} n(n-2)^2(n-4)/48, & \text{عندما } n \text{ زوجي} \\ (n-1)(n-3)(n^2-4n+1)/48, & \text{عندما } n \text{ فردي} \end{cases}$$

البرهان : نأخذ قطعة مستقيم ، L ، في المستوي ، ونقسم L الى $(n-1)$ من الاجزاء المتساوية بالنقاط v_1, v_2, \dots, v_n والتي ستمثل رؤوس البيان K_n . نصل v_1 بكل من v_3, v_4, \dots, v_n بنصف دائرة مرسومة الى الاعلى من L ، ونصل v_2 بكل من v_4, v_5, \dots, v_n بنصف دائرة مرسومة الى الاسفل من L . وبصورة عامة ، نصل v_i بكل من $v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_n$ بقوس نصف دائرة مرسوماً الى الاعلى (الاسفل) من L اذا كان i فردياً (زوجياً) لكل $i = 1, 2, \dots, n-2$ ، كما هو موضح في الشكل (15-4)

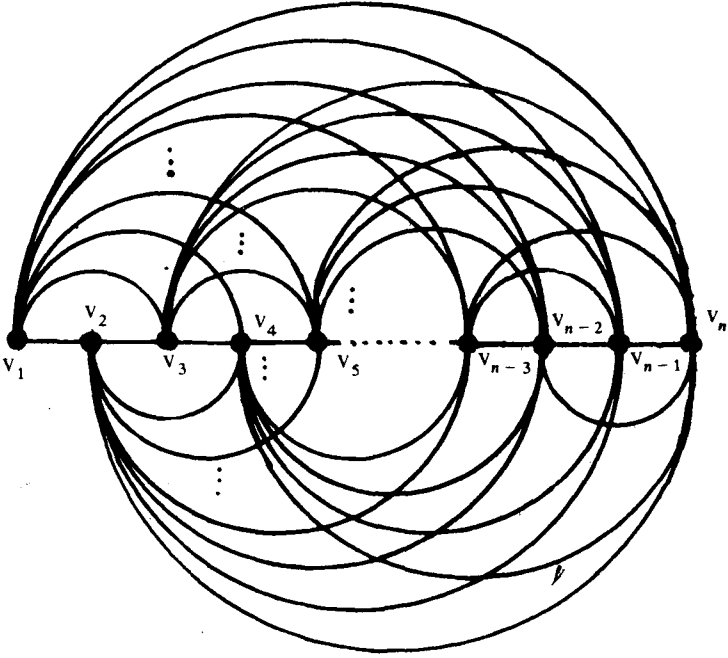
يمكن أن نلاحظ من الشكل (15-4) أنه في حالة كون n زوجياً يكون عدد نقاط التقاطعات بين أنصاف الدوائر هو

$$[(n-4) + (n-5) + \dots + 2 + 1] + [(n-5) + (n-6) + \dots + 2 + 1]$$

$$+ 2 [(n-6) + (n-7) + \dots + 2 + 1] + 2 [(n-7) + (n-8) + \dots + 2 + 1]$$

$$+ 3 [(n-8) + (n-9) + \dots + 2 + 1] + 3 [(n-9) + (n-10) + \dots + 2 + 1]$$

$$\begin{aligned}
& + \dots \\
& + \left(\frac{n}{2} - 2 \right) [2 + 1] + \left(\frac{n}{2} - 2 \right) [11], \\
& = \sum_{r=1}^{(n/2)-2} r \left[\sum_{i=1}^{n-2-2r} i + \sum_{i=1}^{n-3-2r} i \right] \\
& = \sum_{r=1}^{(n/2)-2} r (n-2-2r)^2 \\
& = n(n-2)^2(n-4) / 48.
\end{aligned}$$



شكل (4 15) علماء بان n زوجي

ويمكن اثبات الحالة الثانية عندما n عدد فردي بطريقة مماثلة. ونترك تفاصيل البرهان تمريناً للطالب. ■

وقد اثبت Saaty سنة 1964 وجود قيد اعلى أصغر من ذلك المعطى في المبرهنة (4 - 11). ومن المفيد ذكره هنا في المبرهنة التالية بدون ذكر البرهان.

مبرهنة (4-12) : لكل $n \geq 4$ ، لدينا

$$v(K_n) \leq \begin{cases} n(n-2)^2(n-4)/64 & \text{عندما } n \text{ عدد زوجي} \\ (n-1)^2(n-3)^2/64 & \text{عندما } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

بخصوص القيد الاعلى لعدد التقاطع لبيان ثنائي التجزئة تام . فلدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (4-13) :

$$v(K_{m,n}) \leq \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s) & \text{عندما } m = 2r, n = 2s \\ (r^2 - r)s^2 & \text{عندما } m = 2r, n = 2s + 1 \\ r^2(s^2 - s) & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s \\ r^2s^2 & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s + 1 \end{cases}$$

علماً أن r و s عددان صحيحان موجبان .

البرهان : الطريقة المتبعة في اثبات هذه المبرهنة تشبه لحد ما تلك التي اتبعت في اثبات المبرهنة (4-11) .

نأخذ على المحور x - النقاط ذات الاحداثيات السينية $1, 2, \dots, q$

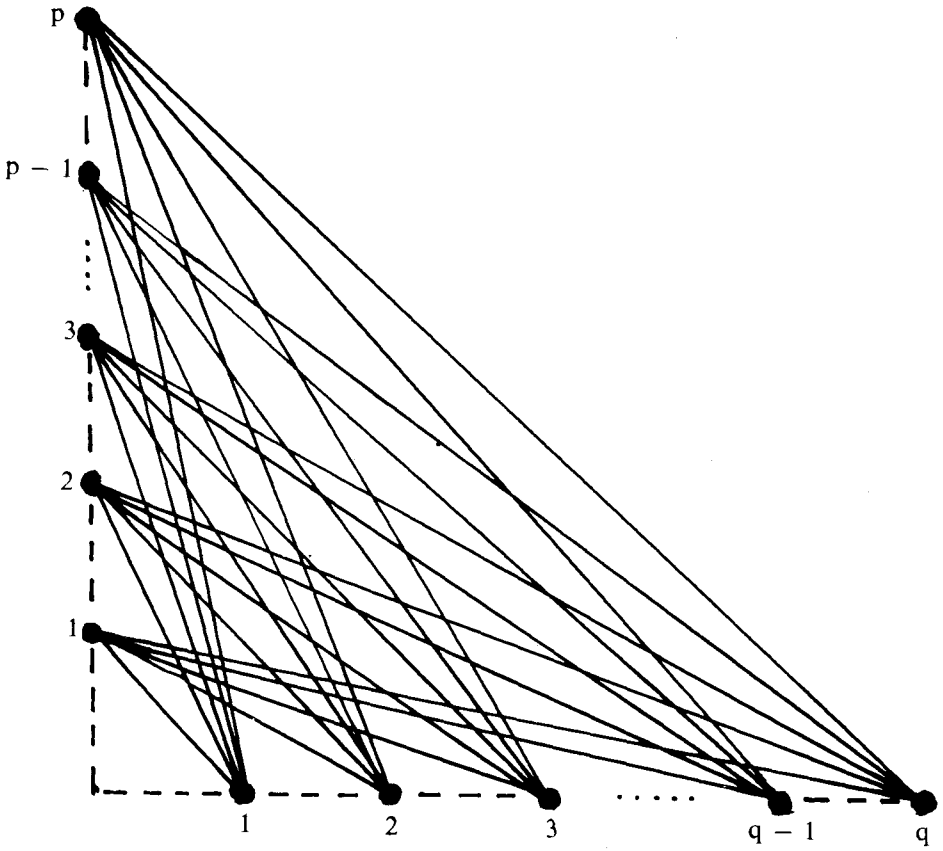
ونأخذ على المحور y - النقاط ذات الاحداثيات الصادية $1, 2, \dots, p$. ونعتبر كلاً من هذه النقاط رأساً . ثم نصل بحافات مستقيمة كلاً من الرؤوس الواقعة على المحور x - بكل من الرؤوس الواقعة على المحور y - . كما هو مبين في الشكل (4-16) .

لما كان عدد تقاطعات الحافات الواقعة على الرأس الممثل بالنقطة i . حيث $2 \leq i \leq p$. على المحور y - . مع الحافات الواقعة على الرؤوس الممثلة بالنقاط $1, 2, \dots, i-1$. على المحور y - ايضاً . هو .

$$(i-1)[(q-1) + (q-2) + \dots + 2 + 1] .$$

فان مجموع تقاطعات كل الحافات مع بعضها هو

$$N = \frac{1}{2} q(q-1)[1 + 2 + \dots + (p-1)]$$



شكل (4-16)

$$= \frac{1}{4} (q^2 - q)(p^2 - p) \quad \dots (10-4)$$

سوف نستخدم هذه النتيجة في اكمال برهان المبرهنة .

اذا كان $m = 2r$: نأخذ على المحور x النقاط بالاحداثيات السنية

$$-r, -(r-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, r,$$

اذا كان $m = 2r + 1$: نأخذ على المحور x النقاط بالاحداثيات

$$-r, -(r-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, r, (r+1).$$

وإذا كان $n = 2s$. نأخذ على المحور y النقاط بالاحداثيات

$$-s, -(s-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s.$$

وإذا كان $n = 2s + 1$. نأخذ على المحور y النقاط بالاحداثيات

$$-s, -(s-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s, (s+1).$$

باعتبار النقاط الواقعة على المحورين والمذكورة اعلاه رؤوساً. نصل بحافات مستقيمة كلاً من الرؤوس الواقعة على المحور- x مع كل من الرؤوس الواقعة على المحور- y . فنحصل على البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$. إذا كان $n = 2s$. $m = 2r$ نحصل باستعمال (4 8) على

$$v(K_{m,n}) \leq 4 \left[-\frac{1}{4} (r^2 - r)(s^2 - s) \right] = (r^2 - r)(s^2 - s).$$

وإذا كان $n = 2s + 1$. $m = 2r$ نحصل على

$$v(K_{m,n}) \leq 2 \left[-\frac{1}{4} (r^2 - r) \cdot s(s+1) \right] + 2 \left[-\frac{1}{4} (r^2 - r)(s^2 - s) \right]$$

وبالتبسيط نحصل على

$$v(K_{m,n}) \leq (r^2 - r)s^2.$$

وبالمثل: يمكن اثبات الحالتين الاخرين. وبهذا يتم البرهان. ■

سوف نثبت في المبرهنة (4 14) أن المقيد الاعلى المعطى في المبرهنة (4 13)

هو في الحقيقة القيمة المضبوط لـ $v(K_{m,n})$. ولأجل ذلك نحتاج الى المأخوذة الآتية.

مأخوذة (4 1):

$$v(K_{m,3}) \geq \begin{cases} r^2 - r, & m = 2r \\ r^2, & m = 2r + 1 \end{cases} \begin{matrix} \text{عندما} \\ \text{عندما} \end{matrix}$$

البرهان: نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على r . فإذا كان $r = 1$. فإن $v(K_{2,3}) = 0$

$v(K_{3,3}) = 1$. ثم نفرض أن المأخوذة صحيحة لـ $(r-1)$ ونبرهن على أنها

صحيحة لـ r .

لتكن مجموعتي رؤوس $K_{m,3}$ هما :

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, U = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

بالطبع كل رأس في V متجاور مع كل رأس في U . وان الرؤوس في V غير متجاورة معني مشئي*. وكذلك الرؤوس في U . لنرمز للبيان الثنائي التجزئة التام $K_{3,1}$ الذي مجموعتا رؤوسه U و $\{v_i\}$ بالرمز S_i لكل $i = 1, 2, \dots, m$

إذا كان كل زوج من البيانات الجزئية $S_i, S_j, i = 1, 2, \dots, m$ يشتركان في نقطة ليست رأساً في $K_{m,3}$. فإنا نحصل على قيد أدنى لعدد تقاطعات حافات $K_{m,3}$ بأخذ البيانات S_i مشئي مشئي. وهذه تؤدي إلى أن عدد التقاطعات لا يقل عن

$$v(K_{m,3}) = \binom{m}{2} = \frac{1}{2} m(m-1).$$

فإذا كان $m = 2r$

$$v(K_{m,3}) = \frac{1}{2} (2r)(2r-1) = r(r-1) + r^2 > r^2 - r.$$

وإذا كان $m = 2r + 1$

$$v(K_{m,3}) = \frac{1}{2} (2r+1)(2r) = r^2 + (r^2 + r) > r^2.$$

وفي هذه الحالة يتم البرهان .

بقي أن نفرض أن هنالك زوجاً $S_j, S_k, j \neq k$. من هذه البيانات الجزئية بحيث لا توجد نقطة تقاطع بين حافتيهما. ليكن S' البيان الثنائي التجزئة التام المكون من S_j و S_k سوية. كل واحد من البيانات الجزئية $S_i, i \neq j, k$ ؛ وعددها $(m-2)$ يكون مع S' بياناً ثنائياً التجزئة تام $K_{3,3}$ وهو الذي فيه نقطة تقاطع واحدة فقط بين حافتيه. وعليه، فإن حافات S' تقطع بقية حافات $K_{m,3}$. بما لا يقل عن $m-2$ من النقاط المختلفة. لاحظ أنه لا يُسمح لأكثر من حافتين بالتقاطع في نقطة واحدة. وعليه، فإن

$$v(K_{m,3}) \geq v(K_{m-2,3}) + (m-2).$$

وهكذا . بموجب فرض الاستقراء الرياضي نحصل على

$$v(K_{m,3}) \geq (r-1)^2 - (r-1) + (2r-2) = r^2 - r.$$

عندما $m = 2r$

وعندما $m = 2r + 1$ نحصل على

$$v(K_{m,3}) \geq (r-1)^2 + (2r-1) = r^2.$$

وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4-14) :

$$v(K_{m,n}) = \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & m = 2r, \quad n = 2s & \text{عندما} \\ (r^2 - r)s^2, & m = 2r, \quad n = 2s + 1 & \text{عندما} \\ r^2(s^2 - s), & m = 2r + 1, \quad n = 2s & \text{عندما} \\ r^2s^2, & m = 2r + 1, \quad n = 2s + 1 & \text{عندما} \end{cases}$$

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي لاثبات أن الطرف الايمن من الصيغة المطلوب اثباتها هو قيد ادنى لـ $v(K_{m,n})$ وبذلك يتم اثبات المبرهنة باستعمال المبرهنة (4-13). واضح أن هذه صحيحة عندما $n = 1, 2, 3$ ولكل قيم m . لنفرض أنها صحيحة لـ $(n-1)$ ونبرهن على أنها صحيحة لـ n مع كل قيم m

لتكن مجموعتا رؤوس $K_{m,n}$ هما

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

ليكن $K_{m,n-1}$ هو البيان الثنائي التجزئة التام الناتج من $K_{m,n}$ بحذف الرأس u_n مع كافة الحافات الواقعة عليه .

بموجب المأخوذة (4-1) ، الحافات الواقعة على الرأس u_n تقطع الحافات الواقعة

على الرأسين u_1, u_2 في $K_{m,n}$ ، بما لا يقل عن $(r^2 - r)$ من النقاط عندما $m = 2r$ ،

وبما لا يقل عن r^2 من النقاط عندما $m = 2r + 1$.

كذلك ، الحافات الواقعة على u_n تقطع الحافات الواقعة على الرأسين

u_3 و u_4 بما لا يقل عن $(r^2 - r)$ من النقاط عندما $m = 2r$

وبما لا يقل عن r^2 عندما $m = 2r$ وهكذا بالنسبة للزوج المتابعة من الرؤوس ، اي ان الحافات الواقعة على u_n تقطع الحافات الواقعة على كل من ازوج الرؤوس

$$(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2s-3}, u_{2s-2})$$

عندما $n = 2s$

$$(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2s-1}, u_{2s})$$

عندما $n = 2s + 1$

بما لا يقل عن N من النقاط ، حيث ان $N = r^2 - r$ عندما $m = 2r$ ، و $N = r^2$ عندما $m = 2r + 1$ وعليه ، فان الحافات الواقعة على u_n تقطع حافات $K_{m,n-1}$ بما لا يقل عن MN من النقاط ، حيث ان $M = s - 1$ عندما $n = 2s$ و $M = s$ عندما $n = 2s + 1$. وهكذا ، فان

$$v(K_{m,n}) \geq v(K_{m,n-1}) + MN.$$

بموجب فرض الاستقراء الرياضي نحصل على

$$m = 2r, n = 2s \quad \text{(أ) عندما}$$

$$v(K_{m,n}) \geq (r^2 - r)(s - 1)^2 + (s - 1)(r^2 - r) = (r^2 - r)(s^2 - s).$$

$$m = 2r, n = 2s + 1 \quad \text{(ب) عندما}$$

$$v(K_{m,n}) \geq (r^2 - r)(s^2 - s) + s(r^2 - r) = (r^2 - r)s^2$$

$$m = 2r + 1, n = 2s \quad \text{(ج) عندما}$$

$$v(K_{m,n}) \geq r^2(s - 1)^2 + (s - 1)r^2 = r^2(s^2 - s).$$

$$m = 2r + 1, n = 2s + 1 \quad \text{(د) عندما}$$

$$v(K_{m,n}) \geq r^2(s^2 - s) + sr^2 = r^2s^2.$$

وبهذا يتم البرهان بموجب مبدأ الاستقراء الرياضي .

❁ تمارين (4 - 3)

- (1) إثبت فرع (ب) من النتيجة (4 - 6)
- (2) إثبت النتيجة (4 - 7) . [تلميح : لاحظ أن $3 \leq 2m$ وفي حالة عدم وجود مثلثات . يكون $4 \leq 2m$]
- (3) إثبت أن

$$g(K_{m,n}) \geq \left\{ \frac{1}{4} (m-2)(n-2) \right\} .$$

(4) إثبت انه لا يوجد بيان تام له جنس يساوي 7 . ماهو العدد الصحيح الموجب الذي

يلي 7 ولا يكون جنساً لبيان تام. [تلميح: أبدأ بـ $K_{1,2}$].

(5) اذا كان $m = 2r$. فاثبت أن $\theta(K_{m,n}) \leq r$

(6) جد الجنس والسلك وعدد التقاطع لبيان بيترسن .

(7) اكمل برهان المبرهنة (4 - 11) .

(8) إثبت أن

$$v(K_{m,n}) = \left[\frac{m}{2} \right] \left[\frac{m-1}{2} \right] \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

(4 - 5) الاتينية (The Duality)

هنالك محكات أخرى للبيانات المستوية ظهرت بعدما أعطى كورتوفسكي مبرهنته . ومن هذه المحكات الاتينية (أو الثنوية) . وقد عبّر وايتني (Whitney) عن استواء بيان ما بدلالة وجود بيان إثيني له .

ليكن G بياناً مغموراً في المستوي (أي انه مرسوم في المستوي بدون ان يكون هنالك تقاطعات بين المنحنيات الممثلة لحافته) . ننشيء بياناً G^* . نطلق عليه اثيني - هندسي (geometric - dual) للبيان G . بالخطوتين :

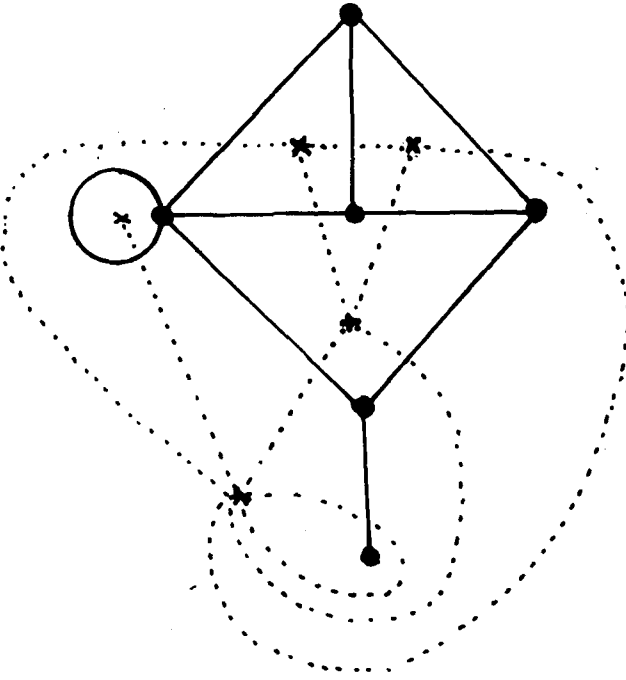
(أ) نختار نقطة واحدة . v^* . داخل كل وجه F_i (ومن ضمنها الوجه الخارجي)

للبيان المستوي G . هذه النقاط هي رؤوس G^* .

(ب) مقابل كل حافة c_k في G نرسم خطاً c_k^* يقطع c_k (وحيث لا يقطع أية حافة أخرى) ويصل الرأسين v_i^* و v_j^* اللذين يقعان داخل الوجهين F_i و F_j (لا يشترط ان يكونا مختلفين) اللذين يشتركا تخامهما بالحافة c_k . هذه الخطوط هي حافات G^* .

وتوضيحاً للاتيني - الهندسي . انظر الشكل (4 - 17) الذي فيه بيان مستوي G مع الاتيني - الهندسي له G^* . وقد مثلت رؤوسه بعلامات x وحافته بخطوط منقطه .

لاحظ أن كل بروزخ في G يقابل لفة في G^* . وأن كل لفة في G تقابل بروزخاً في G^*

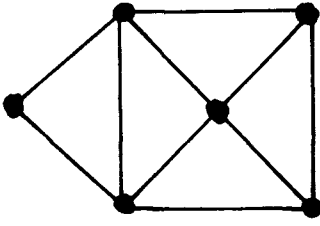


شكل (4-17)

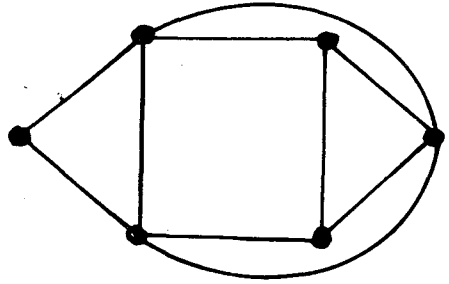
كما أن G'' يحتوي على حافات مضاعفة اذا واذا فقط إحتوى G على وجهين يشترك تخماهما بحافتين على الأقل.

نؤكد أن الاثيني- الهندسي G'' يعتمد مباشرة على غمر معين ل G في المستوي. فاذا غمر G في المستوي بشكل مخالف أصبح بيانه الاثيني- الهندسي مختلفاً عن سابقة. فاذا كان G و G' بيانين مستويين متشاكلين. فليس ضرورياً أن يكون G'' و G''' متشاكلين كما هو مبين في الشكل (4-18). من جهة أخرى. إذا كان كل من G'' و G''' اثيني - هندسي لنفس التمثيل المستوي لبيان G . فان G'' و G''' متشاكلان.

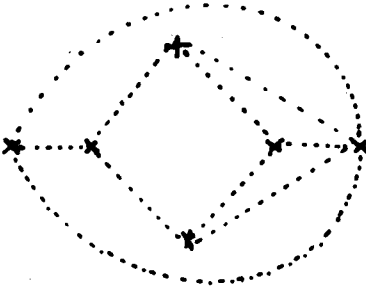
من عملية إنشاء البيان الاثيني- الهندسي G'' لبيان مستوي G . نستنتج ان G'' يكون مستويًا أيضاً. واذا قيل ان للبيان G اثيني هندسي G'' . فان هذا يعني ان بيان مستوي. لانه بموجب التعريف لايمكن ان يكون للبيان G اثيني- هندسي إلا اذا كان مستويًا. اضافة الى ذلك. فان G'' يكون متصلاً دائماً سواء كان G متصلاً أو غير



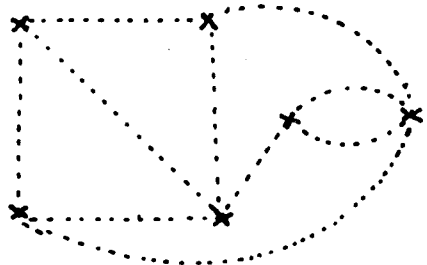
G



G'



G_g^*



G'_g^*

شكل (4 18)

متصل. كما إنه اذا كان عدد الرؤوس . وعدد الحافات . وعدد الاوجه للبيان المستوي G

هي . على الترتيب f, m, n . وللاثيني - الهندسي هي f^*, m^*, n^* فان

$$m^* = m, \quad n^* = f,$$

وباستعمال صيغة أولر. نجد ان

$$f^* = n,$$

يمكن تلخيص هذه العلاقات البسيطة في المأخوذة الآتية.

مأخوذة (4 2) : ليكن G_g^* الاثيني - الهندسي لبيان مستوي G . فان G'_g^*

بيان متصل مستوي . وان

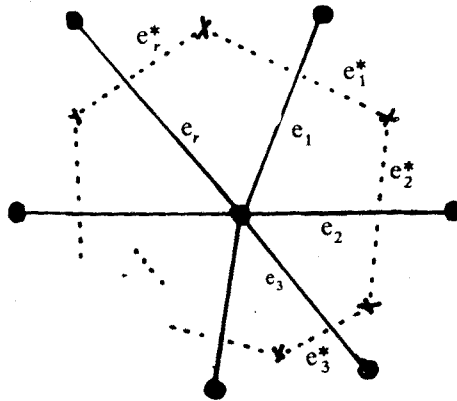
$$m^* = m, \quad n^* = f, \quad f^* = n,$$

من النتائج البسيطة الأخرى للاثينية - الهندسية . البرهنة التالية .

مبرهنة (4 - 15): إذا كان G بياناً متصلاً مستويًا. وكان G_y^* الاثنيني الهندسي لـ G_y^* . فان G_y^* متشاكل مع G .

البرهان: بموجب المأخوذة (4 - 2) يكون G_y^* متصلاً ومستويًا. ولذلك فان لـ G_y^* بياناً إثنينيا - هندسياً. G_y^* .

إذا كان v أي رأس في G وكانت e_1, e_2, \dots, e_r الحافات الواقعة على v بترتيب مثلاً. إتجاه حركة عقرب الساعة حول v . عندما يكون مغموراً في المستوي في هيئة استخراج G_y^* منه. فان كلاً من هذه الحافات تشترك في وجهين متجاورين [انظر الشكل (4 - 19)]. وبذلك. فان الحافات المقابلة $e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*$ تشكل دائرة بسيطة في G_y^* وتحصر وجهاً واحداً منه. من جهة أخرى. وبموجب المأخوذة (4 - 2). فان $n = r^*$. وهكذا. فان كل وجه في G_y^* يحوي في داخله رأساً واحداً فقط من رؤوس G . وعليه. يمكن الحصول على G من G_y^* بعكس عملية إستخراج G_y^* من G . وبذلك فان G هو إثنيني - هندسي لـ G_y^* . أي أن. G_y^* متشاكل مع G .



شكل (4 - 19)

مبرهنة (4 - 16) : ليكن G بياناً مستوياً، و G_g^* إثينياً هندسياً ل G : عندئذ .
مجموعة من حافات G تشكل دارة بسيطة في G اذا واذا فقط مجموعة الحافات
المقابلة لها في G_g^* تشكل مجموعة قاطعة في G_g^* .
البرهان : بدون المساس بعمومية المسألة . يمكن أن نفرض أن G متصل ومغمور في
المستوي .

اذا كانت C دارة بسيطة في G . فان C تحيط بعدد من أوجه G الداخلية . وبما أنه
يوجد رأس ل G_g^* داخل كل وجه من أوجه G . فان هنالك مجموعة S^* من رؤوس G_g^*
تقع داخل المنطقة المحاطة ب C وعليه . فان المجموعة C^* لكل حافات G_g^* التي تقابل
حافات C تشكل مجموعة فاصلة ل G_g^* . وذلك لان ازالتهما من G_g^* تفصله الى بيانين
جزئيين . H_1^* و H_2^* ، مجموعة رؤوس الاول هي S^* ومجموعة رؤوس الثاني هي $V^* - S^*$.
حيث ان V^* هي مجموعة رؤوس G_g^* . ولما كانت كل حافة في C^* تصل رأساً في H_1^* برأس
في H_2^* . وان كلا من H_1^* و H_2^* متصل . لكون أوجه G الواقعة داخل C متصلة مع بعضها
وكذلك الاوجه الواقعة خارج C . فان C^* مجموعة قاطعة ل G_g^* .

من جهة اخرى . يمكن اثبات أنه اذا كانت C^* مجموعة قاطعة ل G_g^* . فان C دارة
بسيطة ل G . وذلك باتباع خطوات البرهان السابق بعكس الترتيب . فاذا كانت F_1, F_2
مجموعتي اوجه G المقابلة ل $S^*, V^* - S^*$. على التوالي . فان كل حافة في C تشترك بين
تخمي وجه في F_1 مع وجه في F_2 . لان كل حافة في C^* تصل رأساً في S^* برأس في
 $V^* - S^*$. كذلك . كل حافة e في G التي تشترك بين تخمي وجه في F_1 مع وجه في
 F_2 تقابل حافة في C^* . لان C^* مجموعة قاطعة . وبذلك فان e في C . وعليه ، فان
حافات C تشكل دارة تفصل الاوجه F_1 عن الاوجه F_2 . كما أن هذه الدارة بسيطة ،
لان خلاف ذلك يؤدي الى أن تصبح C^* اتحاد مجموعات قاطعة (بموجب الجزء
الاول من البرهان) وهو خلاف الفرض .
وبهذا يتم البرهان . ■

نتيجة (4 - 9) : ليكن G بياناً مستوياً ، و G_g^* اثينياً هندسياً ل G : عندئذ ،
مجموعة من حافات G تشكل مجموعة قاطعة ل G اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة
لها في G_g^* تشكل دارة بسيطة ل G_g^*

يمكن إثبات هذه النتيجة باستعمال المبرهنتين (4-15) و(4-16). وقد تركت التفاصيل تمريناً للطالب.

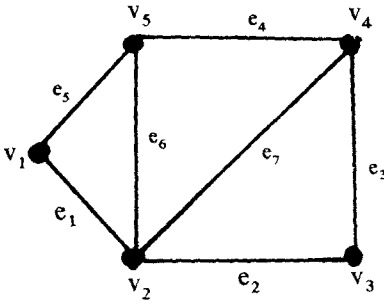
إذا أعطينا أي بيان مستوي G . فإن له أكثر من تمثيل هندسي واحد في المستوي. أي يمكن غمره في المستوي بأكثر من هيئة واحدة. جميع التمثيلات الهندسية لـ G في المستوي تكون متشكلة بعضها مع بعض. ولكن بياناتها الاثنيية- الهندسية قد لا تكون متشكلة. [انظر الشكل (4-15)]. ولذلك فليس لـ G إثنيي- هندسي وحيد. إضافة الى ذلك. اذا أعطينا بيان G . فليس لدينا طريقة لمعرفة فيما اذا كان لـ G إثنيي- هندسي أو ليس له ذلك. أي فيما اذا كان G مستويًا أو غير مستوي باستعمال الاثنيية الهندسية. وعليه فقد وجد من الضروري تعميم مفهوم الاثنيية- الهندسية بحيث يصبح بالإمكان استعماله (ولو من ناحية مبدئية) لاختبار فيما اذا كان بيان ما مستويًا أو غير مستوي. المبرهنة (4-16) تزودنا بعلاقة بين الدارات البسيطة لـ G والمجموعات القاطعة لـ G^* . وهذه العلاقة تمدنها بتعريف لاثنيية أكثر شمولاً من الاثنيية- الهندسية.

يقال لبيان G^* انه اثنيي- مجرد (abstract - dual) لبيان G اذا كان هنالك تقابل متباين بين حافات G وحافات G^* له الخاصية: مجموعة من حافات G تشكل دائرة بسيطة اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة لها تشكل مجموعة قاطعة في G^* .

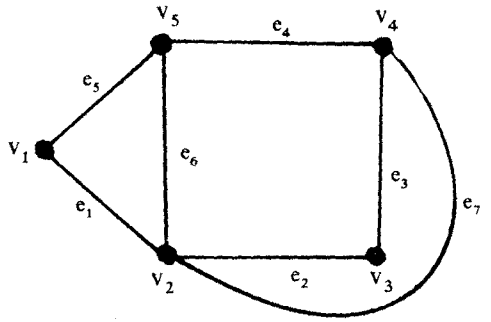
من المبرهنة (4-16) نستنتج انه اذا كان G بياناً متصلاً مستويًا. فإن كل إثنيي- هندسي لـ G هو إثنيي- مجرد لـ G . ولكن. إثنيي- مجرد لـ G قد لا يكون إثنيي- هندسيًا لـ G عندما يكون G مغموراً في المستوي بأي وضع كان. [انظر المبرهنة (4-20)]. فمثلاً. في الشكل (4-20). البيان G^* هو إثنيي- مجرد لـ G ولكنه ليس إثنيي- هندسيًا له. بل هو إثنيي- هندسي للبيان H المتشاكل مع G . لاحظ أن G^* هو اثنيي- هندسي لـ G . وأن الحافات المتقابلة من G و G^* أعطيت أدلة متساوية.

مما تقدم نستنتج أن الاثنيية- المجردة أشمل من الاثنيية- الهندسية. وسوف نثبت فيما يلي بعض ميزات الاثنيية- المجردة وخاصة تلك التي تتمتع بها الاثنيية- الهندسية. مبرهنة (4-17): اذا كان G^* إثنيي- مجرداً لبيان G . فإن G إثنيي- مجرد لـ G^*

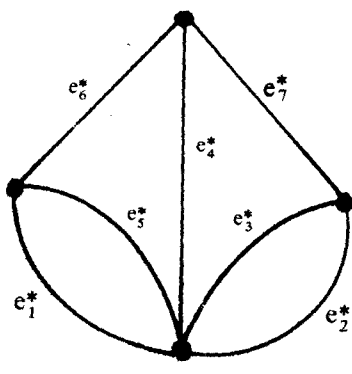
البرهان: لتكن C مجموعة قاطعة لـ G . ولتكن G^* مجموعة الحافات المقابلة لها في G^* . سنثبت أن C^* دائرة بسيطة في G^* . بموجب المبرهنة (2-8)، C تشترك



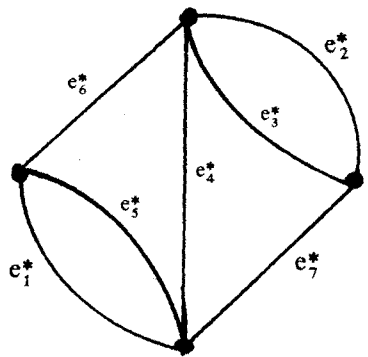
اليان G



اليان H



انثيني - هندسي G*



انثيني - مجرد G* = انثيني - هندسي H*

شكل (4 - 20)

بعدد زوجي من الحافات مع كل دائرة بسيطة في G . ولما كان G^* إنثينياً - مجرداً لـ G . فان C^* تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G^* . وباستعمال تمرين (5) من مجموعة تمارين (2-2). نستنتج أن C^* هي دائرة بسيطة أو اتحاد دوائر بسيطة في G^* منفصلة بالنسبة للحافات.

ولكن. اذا كانت C_1^* دائرة بسيطة في G^* . فانها تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G^* . وهكذا. فان مجموعة الحافات المقابلة C_1 تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل دائرة بسيطة في G . اذاً. \bar{C}_1 هي مجموعة قاطعة أو اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة الحافات لـ G [انظر تمرين (6) من مجموعة

تمارين (2 - 2) .

من هذا نستنتج انه اذا كانت C^* اتحاد دارات بسيطة ، فان C يجب أن تكون اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة بالنسبة للحافات ل G ، وهو ما يناقض فرضنا ان C مجموعة قاطعة. اذاً ، C^* هي دارة بسيطة ل G^* وليست اتحاد دارات بسيطة.

من جهة اخرى ، نستنتج من الجزء الأخير من البرهان السابق الذكر انه اذا كانت C^* دارة بسيطة ل G^* ، فان C مجموعة قاطعة ل G .

وهكذا ، بموجب تعريف الاثينية- المجردة ، فان G إثيني- مجرد للبيان G^* .

كما سبق أن أشرنا ان كل بيان مستوله إثيني- هندسي ، وبذلك فان له إثينياً- مجرداً وقد يسأل القاريء هل ان البيان الذي له إثيني- مجرد يكون مستولاً؟ إن المبرهنة الآتية تجيب عن هذا السؤال بالإيجاب. وبذلك ، فان الاثينية المجردة ، التي هي تعميم للاثينية الهندسية ، تزودنا بمحك للبيانات المستوية ، كما تزودنا بطريقة (ولومن ناحية مبدئية) لاختبار استواء او عدم استواء بيان ما. لأجل اثبات المبرهنة المذكورة نحتاج الى المأخوذات الآتية.

مأخوذة (4 - 3): اذا كان لبيان G إثيني مجرد ، فان كل بيان جزئي من G له إثيني- مجرد.

البرهان: ليكن G^* إثينياً- مجرداً للبيان G . اذا كانت e حافة في G ، وكانت e الحافة المقابلة لها في G^* ، فان البيان G' الناتج من G بازالة e له إثيني- مجرد ينتج من G^* بانكماش الحافة e^* . إن سبب ذلك يعود الى ان ازالة e من G تؤدي الى تحطيم كل الدارات البسيطة التي تحوي e ، وبالمقابل فان انكماش e^* في G^* يؤدي الى تحطيم كل المجموعات القاطعة التي تحوي e^* .

بتكرار عملية ازالة حافات G ، واحدة بعد الاخرى ، وهي التي ليست في اليسان الجزئي H ل G ، نحصل بالمقابل على إثيني- مجرد ل H من G^* بانكماش الحافات

المقابلة لتلك التي أزيلت من G .

مأخوذة (4 - 4): إذا كان G' يكافئ توبولوجياً البيان G ، وإذا وجد إثيني - مجرد ل G ، فإنه يوجد إثيني - مجرد ل G' .

البرهان: لنفرض ان G^* اثيني - مجرد ل G . إذا كان v رأساً في G بدرجة 2 وأن e_1 و e_2 الحافتان الواقعتان على v ، فإن e_1 و e_2 تشكّلان مجموعة قاطعة ل G ، لذلك فإن الحافتين المقابلتين لهما e_1^* و e_2^* تشكّلان في G^* دائرة بسيطة. وعليه، فإن إزالة v وابدال e_1 و e_2 بحافة واحدة e بين الرأسين الآخرين للحافتين e_1 و e_2 ، يقابلها في G^* ابدال e_1^* و e_2^* بحافة واحدة e^* بين نفس رأسيهما.

كما أن عملية ادخال رأس بدرجة 2 على حافة e في G يقابلها في G^* اضافة حافة أخرى بين رأسي e^* .

وهكذا، فإن للبيان G اثينياً - مجرداً، نحصل عليه من G^* بمضاعفة حافات أو حذف حافات من بعض الحافات المضاعفة وفقاً لعمليات الحصول على G' من G .

مأخوذة (4 - 5): ليس للبيان $K_{3,3}$ ولا للبيان K_5 اثيني - مجرد.

البرهان: نتبع طريقة التناقض في معالجة كل من البيانين K_5 و $K_{3,3}$

(1) نأخذ أولاً البيان K_5 . إذا كان G_1^* اثينياً مجرداً للبيان K_5 ، فإن طول كل دائرة في G_1^* لا يقل عن 4 لأن عدد حافات كل مجموعة قاطعة ل K_5 لا يقل عن 4 وبذلك فإن G_1^* بيان بسيط خال من المثلثات. وبما أن هنالك مجموعة قاطعة في K_5 عدد حافاتهما 6 فإن هنالك في G_1^* دائرة بسيطة طولها 6 أي أن عدد رؤوس G_1^* لا يقل عن 6. إذا كان عدد رؤوس G_1^* هو 6، فإنه بموجب المبرهنة (2 - 6) لا يزيد عدد حافات G_1^* على $9 = (6/2)^2$. ولكن عدد حافات G_1^* هو 10، لذلك فإن عدد رؤوس G_1^* لا يقل عن 7.

ولما كان طول كل دائرة بسيطة في K_5 لا يقل عن 3 فإن درجة كل رأس في G^* لا تقل

عن 3. وعليه . عندما يكون عدد رؤوس G_1^* اكبر من 6 . فان عدد حافته لا يقل عن $\frac{1}{2}(3)(7)$ أي لا يقل عن 11. وفي هذه الحالة ايضاً نتوصل الى تناقض لان عدد حافات G_1^* هو 10 وبذلك . فليس لـ K_5 اثيني - مجرد .

(2) نأخذ الان البيان $K_{3,3}$. اذا كان G_2^* اثينياً مجرداً لـ $K_{3,3}$. فان G_2^* بيان بسيط . لأن عدد حافات كل مجموعة قاطعة لـ $K_{3,3}$ لا يقل عن 3 . وبما أن طول كل دائرة بسيطة في $K_{3,3}$ هو 4 أو 6 فان درجة كل رأس في G_2^* لا يقل عن 4 وأن عدد رؤوسه لا يقل عن 5 . ان هذا يؤدي الى أن عدد حافات G_2^* لا يقل عن $\frac{1}{2}(4)(5)$ وهو تناقض لكون عدد حافات G_2^* هو 9 . ■

نحن الان مهيوون لاثبات المبرهنة الاساسية الآتية .

مبرهنت (4 - 18) : يكون البيان G مستويماً اذا واذا فقط كان له اثيني - مجرد .

البرهان : اذا كان G مستويماً . فان له اثيني - هندسي . وبذلك فان لـ G اثينياً - مجرداً .

لاثبات الاقتضاء المعاكس . نفرض أن G^* اثيني - مجرد لـ G ونبرهن على أن G بيان مستوي بطريقة التناقض . فاذا كان G غير مستوي . فان فيه بياناً جزئياً H يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ أو K_5 . وذلك بموجب مبرهنة كورتوفسكي . عندئذ . بموجب المأخوذة (4 - 3) . يكون لـ H اثيني - مجرد . وبموجب المأخوذة (4 - 4) يكون لـ $K_{3,3}$ أو K_5 اثيني - مجرد . وهوما يناقض المأخوذة (4 - 5) . وعليه . فان G بيان مستوي . ■

♣ مبرهنة (4 - 19) : ليكن G^* اثينياً مجرداً للبيان G . اذا كان G متصلاً وغير قابل للانفصال وكان G^* لا يحتوي على رؤوس منعزلة . فان G^* متصل وغير قابل للانفصال . البرهان : نتبع طريقة البرهان بالتناقض .

اذا كان G^* قابلاً للانفصال . وأن نقطة مفصل . فيمكن تجزئة G^* الى بيانين جزئيين G_1^* و G_2^* فيهما رأس مشترك واحد فقط هو v^* ليكن G_1 و G_2 البيانين الجزئيين من G المكونين من الحافات المقابلة لحافات G_1^* و G_2^* على التوالي . عندئذ . تتجزأ حافات G الى حافات في G_1 والباقية في G_2 اذا كانت C دائرة بسيطة في G تحتوي على حافات من G_1 مع حافات من G_2 . فان المجموعة القاطعة المقابلة لـ C تتكون من حافات من G_1^* مع

حافات من G_2^* وهذا غير ممكن لكون G^* قابلاً للانفصال فيصير G_1^* و G_2^* وعلية. فان كل دائرة بسيطة في G تتكون اما من حافات في G_1 أو من حافات في G_2 وهذا يعني أن G غير متصل أو قابل للانفصال. مما يناقض الفرض لذلك. فان G^* غير قابل للانفصال

من جهة اخرى. اذا كان G^* غير متصل. فيمكن ان نبرهن بطريقة مماثلة على أن G غير متصل أو قابل للانفصال. وهكذا. فان G^* متصل وغير قابل للانفصال. ■

نتيجة (4 - 10) : ليكن G^* إثنيياً مجرداً للبيان G . اذا كان كل من G و G^* متصلاً. فان G^* غير قابل للانفصال اذا واذا فقط G غير قابل للانفصال. البرهان مباشر.

مبرهنة (4 - 20) : اذا كان G^* إثنيياً مجرداً لبيان متصل G غير قابل للانفصال وكان G^* بدون رؤوس منعزله. فانه يمكن غمر G في المستوي بحيث أن G^* هو الأثنيي الهندسي له.

البرهان : بموجب المبرهنة (4 - 18). فان كلاً من G و G^* بيان مستوي. كما انه بموجب المبرهنة (4 - 19). فان G^* متصل وغير قابل للانفصال.

نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد حافات G . فاذا كان G مكوناً من حافة واحدة e . فان هذه الحافة تكون مجموعة قاطعة عندما يتكون G من رأسين فقط. وعندئذ يكون G^* لفة. أما اذا تكون G من رأس واحد. فان e لفة. وان G^* يتكون من حافة واحدة مختلفة الرأسين. وفي كلتا الحالتين. فان G^* هو الأثنيي الهندسي ل G . والآن نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان متصل وغير قابل للانفصال وعدد حافات $(m - 1)$

ليكن G بياناً متصلاً غير قابل للانفصال وعدد حافات m .

اذا وجد في G رأس درجته 2. فان ابدال الحافتين الواقعتين عليه e_1, e_2 بحافة واحدة e يقابلها في G^* ابدال الحافتين e_1^*, e_2^* (تكونان دائرة) بحافة e^* بين رأسيهما. فاذا رمزنا للبيان الناتجين ب H و H^* . فان H^* اثنيي مجرد ل H وهو الذي عدد حافته $(m - 1)$ وعلية. فان هنالك تمثيلاً مستويلاً ل H بحيث أن H^* هو الأثنيي الهندسي له (بموجب فرض الاستقراء الرياضي). وتقسيم الحافة e الى الحافتين e_1, e_2

يمكننا ان نحصل على تمثيل مستوي لـ G بحيث ان G^* هو الاثنيني الهندسي له .
 وبالمثل يمكن ان نثبت البرهنة في حالة احتواء G على لفة .
 والان نفرض ان كل رأس في G هو بدرجة لا تقل عن 3 وانه خال من اللفات . في
 هذه الحالة يمكننا ان نجد في G حافة $e = [u, v]$ تشترك بين وجهين داخليين .
 واضح ان البيان H الناتج من G بازالة الحافة e متصل وغير قابل للانفصال . كما ان
 البيان H^* الناتج من G^* بازالة الحافة المقابلة e^* وتطابق رأسها . $x^* . y^*$ هو اثنيني
 مجرد لـ H* سنرمز للرأس الناتج من تطابق الرأسين $x^* . y^*$ بالرمز w^* .

لتكن $e_1^* . e_2^* . \dots . e_r^*$ الحافات الواقعة على x^* . ولتكن $e_1'^* . e_2'^* . \dots . e_s'^*$
 الحافات الواقعة على y^* في الاثنيني المجرد G^* بما ان G^* غير قابل للانفصال . فان كلاً من
 $\{e_1^* . e_2^* . \dots . e_r^*\}$ و $\{e_1'^* . e_2'^* . \dots . e_s'^*\}$ مجموعة
 قاطعة لـ G^* . وبذلك . فان كلاً من $\{e_1 . e_2 . \dots . e_r\}$ و $\{e_1' . e_2' . \dots . e_s'\}$
 دائرة بسيطة في G . ولما كان H^* غير قابل للانفصال . فان الحافات

$$e_1^* . e_2^* . \dots . e_r^* . e_1'^* . e_2'^* . \dots . e_s'^*$$

الواقعة على الرأس w^* تشكل مجموعة قاطعة لـ H^* وبذلك . فان

$$e_1 . e_2 . \dots . e_r . e_1' . e_2' . \dots . e_s'$$

تشكل دائرة بسيطة في H .

وبما ان الرأس w^* يقابل وجهاً F في التمثيل المستوي لـ H . فان الحافات الواقعة على
 w^* تقابل تخم F ، هذا يعني ان الدائرة البسيطة المكونة من الحافات $e_1 . e_2 . \dots . e_r . e_1' . e_2' . \dots . e_s'$
 هي تخم الوجه F من هذا نستنتج ان الرأسين u و v يقعان على تخم F لذلك
 فان اعادة الحافة e يؤدي الى تمثيل مستوي لـ G بحيث G^* هو الاثنيني الهندسي له .
 وبهذا يتم البرهان . ■

ليكن G^* اثنينياً مجرداً لبيان G . وأن F غابة مولدة لـ G ولتكن F^* مجموعة حافات
 G^* المقابلة لحافات F . بما ان F تشترك بحافة واحدة على الاقل مع كل مجموعة قاطعة لـ
 G . فان F^* تشترك بحافة واحدة على الاقل مع كل دائرة في G^* ولذلك . فان البيان الجزئي
 H* . حيث ان

$$H^* = G^* - F^* .$$

يكون خالياً من الدارات .

لتكن G_1^* مركبة لـ G^* وليكن H_1^* البيان الجزئي المكون من حافات H^* الموجودة في G_1^* إذا كان H_1^* غير متصل . فان هنالك مجموعة قاطعة S_1^* لـ G_1^* (وهكذا لـ G^*) تكون من حافات في F^* فقط . وهذا يؤدي الى أن S_1 هي دائرة لـ G . أي أن هنالك دائرة بسيطة في F وهو يناقض كون F غابة . لذلك . فان H_1^* متصل . إذاً H_1^* شجرة مولدة لـ G_1^* . وهذا بالطبع يصح لكل مركبة في G^* وعليه . فان H^* غابة مولدة لـ G^* ولذلك . فان F^* تنمة غابة لـ G^* . وهكذا فقد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (4 - 21) : إذا كان G^* اثنيبياً مجرداً لبيان G . فان اية غابة مولدة لـ G

تقابل تنمة غابة لـ G^*

نتيجة (4 - 11) : إذا كان G^* اثنيبياً مجرداً لبيان G . فان

$$\gamma(G) = \delta(G^*) .$$

$$\delta(G) = \gamma(G^*) .$$

علماً أن γ هي مرتبة الدارات وأن δ هي مرتبة المجموعات القاطعة للبيان المذكور بسين القوسين .

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنتين (4 - 17) و (4 - 21) . وترك التفاصيل

تمريناً للطالب .

تمارين (4 - 4)

(1) جد الاثنيبي الهندسي لكل من البيانات في الشكل (1 - 25)

(2) يقال لبيان G أنه اثنيبي - ذاتي (self-dual) إذا كان متشاكلاً مع الاثنيبي

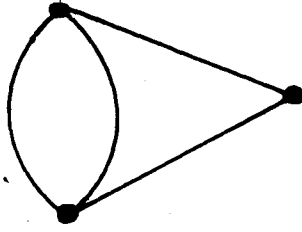
الهندسي G^* . هل W_n اثنيبي - ذاتي ؟

وهل أن البيان في الشكل (4 - 21) اثنيبي - ذاتي ؟

(3) اثبت نتيجة (4 - 9) .

(4) في الشكل (4 - 18) . اثبت أن G_n^* هو اثنيبي - مجرد لـ G . ولكنه ليس

اثنيبياً هندسياً لـ G .



شكل (4 - 21)

- (5) اثبت أنه اذا كان G بياناً مستويًا غير متصل . فان الاثنيني الهندسي المزدوج G_{**} غير متشاكل مع G
- (6) هل يمكن ايجاد بيان مستوي يحتوي على خمسة أوجه بحيث أن كل وجهين يشتركان بحافة ؟ [تلميح : استعمل المأخوذة (4 - 2) .]
- (7) برهن على أنه اذا كان G بياناً مستويًا ثنائي التجزئة . فان الاثنيني الهندسي G_{**} يكون أولبرياً . هل أن العكس صحيح ؟
- (8)* برهن على النتيجة (4 - 11) .
- (9)* لتفرض أن G^* اثنيني - مجرد لبيان متصل G . هل أن G^* بيان متصل ؟
واذا كان G^* خالياً من الرؤوس المنعزلة . فهل هو متصل ؟

(4 - 6) الاثنينية التوافقية (اثنينية وايتني)

في سنة 1932 اعطى وايتني (Whitney) تعريفاً توافقياً للأثنينية . وهو الذي صاغ بواسطته الاثنينية الهندسية بصيغة مجردة . وفيما يلي تعريف اثنينية وايتني .

يقال أن G^* اثنيني وايتني (او اثنيني توافقي combinatorial-dual) لبيان G اذا وجد تقابل متباين بين حافات G وحافات G^* بحيث أنه اذا كان H أي بيان جزئي من G وله نفس رؤوس G فان البيان الجزئي H^* لـ G^* الذي حافته تقابل حافات H وله نفس رؤوس G^* . يحقق العلاقة :

$$\delta(H) + \delta(\bar{H}^*) = \delta(G^*) . \quad \dots (11-4)$$

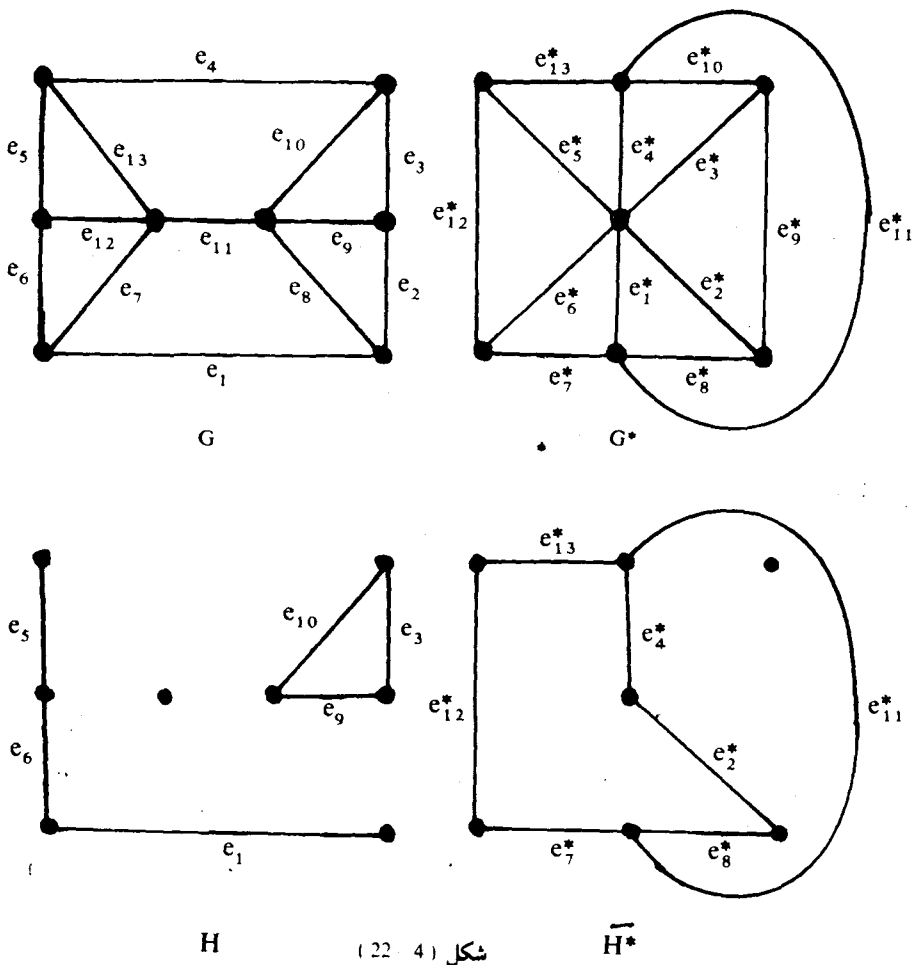
علما ان \bar{H}^* هو البيان المتمم لـ H^* في G^* . وان δ هي مرتبة الدارات و δ مرتبة المجموعات القاطعة .

ولتوضيح هذا التعريف . تأمل البيانين G و G^* المبينين في الشكل (4 - 22) ، عندما نأخذ H البيان الجزئي الذي رؤوسه هي رؤوس G وحافته هي $e_1, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{10}$. فان \bar{H}^* يتكون من الحافات $e_1^*, e_3^*, e_5^*, e_6^*, e_9^*, e_{10}^*$ وعندئذ يكون \bar{H}^* كما هو مبين في الشكل (4 - 19) . ومن هذا الشكل . نحصل على

$$\delta(H) = 1, \delta(\bar{H}^*) = 5, \delta(G^*) = 6.$$

وعليه . فان العلاقة (4 - 11) تتحقق بالنسبة للبيان الجزئي H

واضح أنه من الصعوبة جداً معرفة فيما اذا كان G^* اثنيي وايثي لـ G باستعمال العلاقة (4 - 11) . لان ذلك يتطلب اختبار تحقق هذه العلاقة لكل البيانات الجزئية H لـ G



شكل (4 - 22)

والآن نبرهن على بعض المبرهنات والنتائج المباشرة من تعريف وايتني للاثنينية .
مبرهنة (4-22): باستعمال الرموز الواردة في تعريف اثينية وايتني ، يكون لدينا

$$(1) \quad \gamma(G) = \delta(G^*), \quad (2) \quad \delta(G) = \gamma(G^*)$$

$$(3) \quad \delta(H) + \gamma(\bar{H}^*) = \delta(G).$$

البرهان : اذا وضعنا $H = G$ في (4-11) نتجت المعادلة (1) ، لان \bar{G}^* في G^* هو بيان خالٍ من الحافات وبذلك فان مرتبة المجموعات المقاطعة له تساوي صفراً .

سوف نرمز لعدد الحافات في البيانات G ، G^* ، H ، \bar{H}^* ... بالرموز ،
 $m(G)$ ، $m(G^*)$ ، $m(H)$ ، $m(\bar{H}^*)$... على الترتيب . لما كانت مرتبة الدارات زائداً مرتبة

المجموعات المقاطعات لكل بيان يساوي دائماً عدد حافته . فان

$$\gamma(G) + \delta(G) = m(G), \quad \gamma(G^*) + \delta(G^*) = m(G^*).$$

وبما ان

$$m(G) = m(G^*).$$

وباستعمال المعادلة (1) التي اثبتناها . نحصل على المعادلة (2) .

والآن نبرهن على المعادلة (3) : ولجل ذلك نبدأ بالطرف الايسر .

$$\delta(H) + \gamma(\bar{H}^*) = m(H) - \gamma(H) + m(\bar{H}^*) - \delta(\bar{H}^*)$$

$$= m(H) + m(\bar{H}^*) - [\gamma(H) + \delta(\bar{H}^*)]$$

$$= m(G) - \delta(G^*)$$

[من تعريف اثينية وايتني]

$$= m(G) - \gamma(G)$$

[بموجب المعادلة (1)]

$$= \delta(G).$$

وبذلك يتم البرهان .

من المعادلة (3) في المبرهنة (4-22) ومن تعريف اثينية وايتني . نحصل مباشرة

على النتيجة الآتية :

نتيجة (4-12) : اذا كان G^* اثيني وايتني لـ G . فان G هو اثيني وايتني

لـ G^* .

لجل ان نثبت مبرهنة وايتني التي تقيس البيانات المستوية بدلالة الاثنينية التوافقية .

نحتاج الى ان نبرهن على وجود تكافؤ بين الاثنينية التوافقية والاثنينية المجردة .

مبرهنة (4-23) : البيان G^* هو اثيني وايتني لبيان G اذا واذا فقط G^*

اثيني - مجرد لـ G .

البرهان : ليكن G^* اثنيياً - مجرداً لـ G . سوف نبرهن على أن G^* اثنيي وايتني لـ G وذلك باثبات أن المعادلة (4-11) لا تتغير فيما إذا أضفنا حافة e . من حافات G . الى البيان الجزئي H . وازلنا الحافة المقابلة e^* من \bar{H}^* . والآن ناقش حالتين :

(أ) عندما يكون رأسا e في مركبة واحدة لـ H .

(ب) عندما يكون رأسا e في مركبتين مختلفتين لـ H .

الحالة (أ) : في هذه الحالة . عندما نضيف e الى H يزداد عدد الحافات بواحد ويبقى عدد الرؤوس وكذلك عدد المركبات ثابتاً . ولذلك . فان هذه الاضافة تزيد مرتبة الدارات (H) ؛ واحداً فقط . من جهة اخرى . هذه الاضافة تشكل دارة بسيطة C في H تحتوي على e . وبما أن G^* هو اثنيي - مجرداً لـ G . فان C^* مجموعة قاطعة لـ G^* تحتوي على e^* . لذلك . فان ازالة e^* من \bar{H}^* يؤدي الى زيادة عدد مركباته بواحد فقط . مع ابقاء عدد الرؤوس ثابتاً . وعليه . تنقص مرتبة المجموعات القاطعة (\bar{H}^*) واحداً فقط . وبهذا . لا تتغير المعادلة (4-11) بهذه العملية .

الحالة (ب) : في هذه الحالة . عندما نضيف e الى H ينقص عدد مركبات H واحداً . ويزداد عدد حافته واحداً . ولذلك . فان (H) لا يتغير .

واضافة الى ذلك . لا تتكون دارة جديدة في H . وبهذا . فان ازالة e^* من \bar{H}^* لايشكل مجموعة قاطعة جديدة لـ \bar{H}^* . وعليه . نستنتج ان $\delta(\bar{H}^*)$ لا يتغير بهذه العملية . وهكذا . فان المعادلة (4-11) لا تتغير بعملية اضافة e الى H وازالة e^* من \bar{H}^* .

لما كانت المعادلة (4-11) صحيحة عندما يكون H بياناً خالياً من الحافات . فانه بموجب الاستقراء الرياضي على عدد حافات البيان الجزئي H . تكون (4-11) صحيحة لكل بيان جزئي H لـ G . وبذلك . فان G^* هو اثنيي وايتني لـ G .

والآن نبرهن على انه اذا كان G^* اثنيي وايتني لـ G . فان G^* هو اثنيي - مجرداً لـ G لاجل ذلك . نأخذ أية دارة بسيطة C في G . ولنفرض أن عدد رؤوس G^* هو n^* وعدد مركباته هو k^* . اذا .

$$\delta(C) = 1. \delta(G^*) = n^* - k^* .$$

وعليه . بموجب المعادلة (4-11) . نستنتج أن

$$\delta(\bar{C}^*) = n^* - (k^* + 1) .$$

وهذا يعني ان C^* مجموعة فاصلة لـ G^* .

وإذا كانت S مجموعة جزئية فعلية من مجموعة حافات C ، فإن S ليست دائرة ،
لذلك $\gamma(C) = 0$: وهذا يؤدي الى

$$\delta(S^*) = n^* - k^*$$

وبذلك ، فإن S^* ليست مجموعة فاصلة لـ G^* . وعليه ، لا توجد مجموعة جزئية
فعلية من C^* التي هي مجموعة فاصلة لـ G^* . اذاً ، يجب أن تكون C^* مجموعة
قاطعة .

وباتباع خطوات البرهان السابق بعكس الترتيب . يمكننا اثبات أنه إذا كانت C^*
مجموعة قاطعة لـ G^* ، فإن C دائرة بسيطة لـ G . ونترك تفاصيل برهان هذا الجزء
كتمرين للطالب . وهكذا نستنتج ان G^* هوائي - مجرد لـ G . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4 - 24) : - مبرهنة وايتني - يكون البيان G مستويًا إذا وإذا فقط كان
له اثنييني وايتني .

البرهان : بموجب المبرهنة (4 - 18) . يكون G مستويًا إذا وإذا فقط يوجد له
اثنييني - مجرد . وبموجب المبرهنة (4 - 23) . يكون لـ G اثنييني مجرد إذا وإذا فقط
كان له اثنييني وايتني . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4 - 25) : إذا كان G متصلًا وغير قابل للانفصال . وكان G^* اثنييني
وايتني لـ G . وأن G^* لا يحتوي على رؤوس منعزلة . فإن G^* متصل وغير قابل
للانفصال .

البرهان : بموجب المبرهنة (4 - 23) . يكون G^* اثنيينيًا - مجرداً لـ G . وبموجب
المبرهنة (4 - 19) . يكون G^* متصلًا وغير قابل للانفصال .

ملاحظة : الشرط « G غير قابل للانفصال » الوارد في المبرهنة (4 - 25) ضروري .
كما هو واضح من التمرين (1) في مجموعة تمارين (4 - 5) . ولذلك . فإن النص لهذه
المبرهنة . وكذلك البرهان . الوارد في بعض الكتب (انظر المصدر [11] صفحة 38 -
والمصدر [13] صفحة 80) غير صحيح .

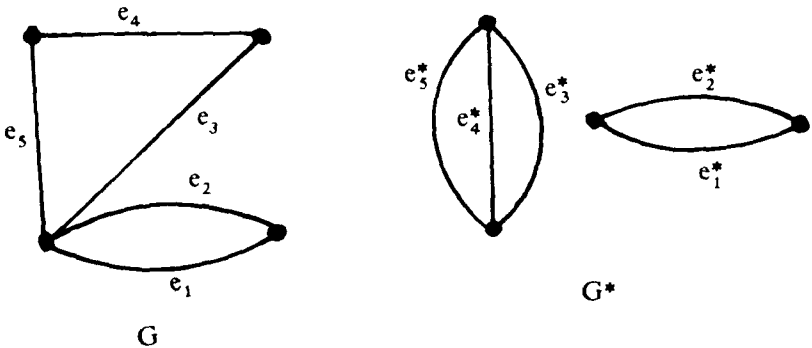
يمكننا تلخيص بعض شروط ومحكات البيانات المستوية بالعبارات المتكافئة الآتية :

- (1) بيان مستو .
- (2) لا يوجد في G بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$.
- (3) لا يوجد في G بيان جزئي قابل للانكماش الى K_5 أو $K_{3,3}$.
- (4) يوجد اثيني - هندسي لـ G .
- (5) يوجد اثيني - مجرد لـ G .
- (6) يوجد اثيني - وايتني لـ G .

علمًا بان هنالك محكات اخرى لاستواء البيانات لم نتطرق الى ذكرها في هذا الكتاب ويمكن للقاريء الاطلاع عليها في كتب مقدمة .

❁ تمارين (4 - 5)

- (1) هل ان البيان G^* المعطى في الشكل (4 - 23) هو بيان - وايتني لـ G ؟ ولماذا ؟
- (2) جد اثيني - وايتني متصل للبيان G المعطى في الشكل (4 - 23) .
- (3) برهن على أن اي اثيني - هندسي لبيان G هو اثيني - وايتني لـ G .
- (4) أكمل الجزء الاخير من برهان المبرهنة (4 - 23) .
- (5) اذا كان G^* اثيني - وايتني لبيان متصل غير قابل للانفصال G . فاثبت أنه يمكن غمر G في المستوي بحيث أن G^* هو اثيني - هندسي له .



شكل (4 - 23)

الفصل الخامس

تلوين البيانات

لقد كان لمسألة الالوان الأربعة (Four - colour problem) أثر كبير في تطوير موضوع تلوين البيانات بشكل خاص وموضوع نظرية البيانات بشكل عام . فمنذ ان ظهرت هذه المسألة قبل مايزيد على قرن من الزمن ، والباحثون المتخصصون في نظرية البيانات يحاولون أن يجدوا لها حلاً . ففي أثناء محاولاتهم هذه يجدون مفاهيم ومبرهنات ومسائل جديدة في موضوع نظرية البيانات . مما أدى الى تطور هذا الموضوع وتوسعه . ولهذا نجد من الضروري التأكيد على هذه المسألة التي حلت أخيراً في سنة ١٩٧٦ . وقد خصصنا البند (5-3) لشرحها .

هنالك ثلاثة أنواع من مسائل التلوين . وهي : مسائل تلوين الرؤوس . تلوين الاوجه للبيانات المستوية . وتلوين الحافات . وقد خصص البند (5-1) لشرح تلوين الرؤوس مع تأكيد مبرهنة الالوان الخمسة . اما في البند (5-2) فقد إستعرضنا تلوين الاوجه للبيانات المستوية . اي تلوين الخرائط . وقد شرحنا في البند (5-4) تلوين الحافات . واخيراً . سوف نستعرض في البند (5-5) عدد طرق تلوين بيان ما . وذلك بدراسة متعددات الحدود للتلوين (وهي التي أطلقنا عليها حدوديات التلوين

(Chromatic polynomials -

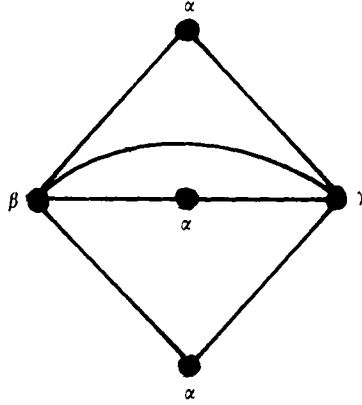
(1 - 5) تلوين الرؤوس : (Coloration of Vertices) :

ليكن G بياناً بسيطاً يقال أن G قابل التلوين k للرؤوس إذا كان بالإمكان تعيين لون واحد من k من الالوان لكل رأس من رؤوس G بحيث لا يوجد رأسان متجاوران لهما نفس اللون . وبمعنى آخر . فان رؤوس G قابلة للتلوين بـ k من الالوان المختلفة اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه V الى k من المجموعات الجزئية V_1, V_2, \dots, V_k غير الخالية والمنفصلة متنى متنى . وأن

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i .$$

بحيث أنه لا توجد حافات في G تصل رأسين في نفس المجموعة الجزئية V_i . ويقال في هذه الحالة أن مجموعة الرؤوس V_i لكل $i = 1, 2, \dots, k$ مستقلة في G .

إذا كان G قابل التلوين k للرؤوس ولكنه غير قابل التلوين $(k-1)$ للرؤوس .
 يقال إن G تلويني k - chromatic) للرؤوس . أو أن عدد تلوين رؤوس G هو k . ويرمز عادة لعدد تلوين رؤوس البيان G بالرمز $\chi(G)$ وعليه . فإن $\chi(G)$ هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث إن G قابل التلوين $\chi(G)$ للرؤوس . فمثلاً ، البيان في الشكل (1-5) هو تلويني 3 للرؤوس . وقد رمز للالوان بالحروف اليونانية α, β, γ . بالطبع . فإن هذا البيان قابل التلوين k للرؤوس لكل $3 \leq k \leq 5$.



شكل (1-5)

عندما نتكلم على تلوين الرؤوس . سنفترض دائماً أن البيانات بسيطة ، أي خالية من اللفات والحافات المضاعفة . كما نفرض أنها متصلة . لأن هذه كلها ليست ذات تأثير على تلوين الرؤوس .

من الامور التي تتبادر الى الذهن مباشرة كيفية إيجاد $\chi(G)$ لبيان كيفي G . يمكن معرفة عدد تلوين الرؤوس لبعض البيانات الخاصة مباشرة . فمثلاً .

$$\chi(K_n) = n. \quad \chi(K_{m,n}) = 2.$$

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{عندما } n \text{ فردي} \\ 4 & \text{عندما } n \text{ زوجي} \end{cases}$$

من الامور الواضحة جداً أنه إذا كان G بياناً غير خال من الحافات ، فإن $\chi(G) = 2$ إذا وإذا فقط G ثنائي التجزئة .

في حقيقة الامر ، إذا كان عدد رؤوس G هو n . فإن

$$\chi(G) \leq n.$$

وإذا كان K_r بياناً جزئياً من G . فان

$$\chi(G) \geq r .$$

من هذا نستنتج وجود علاقة بين درجات رؤوس G والقيد الأعلى لعدد تلوين الرؤوس .
كما هو مبين في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (1-5) : إذا كانت p الدرجة العليا لرؤوس بيان G . فان G قابل التلوين -

($p + 1$) للرؤوس

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس . واضح أن المبرهنة صحيحة إذا كان $n = 0, 1$. والآن نفرض أنها صحيحة لكل بيان ذي $(n - 1)$ من الرؤوس .

ليكن G بياناً عدد رؤوسه n . وان أعلى درجة لرؤوسه هي p . ليكن v أي رأس في G . وليكن G' البيان الحاصل من G بإزالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه . لما كان عدد رؤوس G' هو $(n - 1)$ وان أعلى درجة لرؤوسه لا تزيد على p ، فان G' قابل التلوين - $(p + 1)$ للرؤوس . بموجب فرض الاستقراء الرياضي . ولما كان عدد الرؤوس المجاورة للرأس v في G لا يزيد على p . فانه بالإمكان إعطاء لون الى v يختلف عن الالوان المعطاة للرؤوس المجاورة له في تلوين G' . ويؤدي ذلك الى تلوين رؤوس G بما لا يزيد على $(p + 1)$ وهكذا فان G قابل التلوين $(p + 1)$ للرؤوس . ■
أعطى بروكس (Brooks) سنة 1941 المبرهنة الآتية وهي أقوى من المبرهنة (1-5)

مبرهنة (2-5) : إذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً غير تام ، وكانت p أعلى درجة لرؤوسه . علماً أن $p \geq 3$. فان G قابل التلوين - p للرؤوس .

✿ البرهان : سنتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد رؤوس G . فاذا كان $n = 4$ و $G \neq K_4$ ، فان G قابل التلوين - p للرؤوس . والآن نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان غير تام له $(n - 1)$ من الرؤوس . ولنفرض أن عدد رؤوس G هو n وان G غير تام ، وان p أعلى درجة لرؤوسه .

إذا وجد رأس v في G درجته أقل من p . فإن إزالة الرأس v مع الحافات الواقعة عليه يؤدي إلى بيان G' عدد رؤوسه $(n-1)$. وأعلى درجة لرؤوسه لا تزيد على p . لذلك . فإن G' قابل التلوين p -لرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي. ولما كانت درجة v أقل من p . فإنه يوجد هنالك لون β . من هذه الألوان (وهي التي عددها p) يختلف عن الألوان التي أعطيت للرؤوس المجاورة لـ v . وبإعطاء اللون β للرأس v نحصل على تلوين لرؤوس G بما لا يزيد على p من الألوان.

إذا لم يكن في G رأس درجته أقل من p . فإن G منتظم بدرجة p . وعليه . نفرض ان G بيان منتظم درجته p .

ليكن G' البيان الناتج من G بإزالة رأس v مع كافة الحافات الواقعة عليه. البيان G' قابل التلوين p -لرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي. والآن نثبت أن بالإمكان الحصول على تلوين لـ G من تلوين G' بنفس العدد p من الألوان التي أستعملت في G' .

لتكن الرؤوس المجاورة لـ v . ولنفرض انها اخذت الالوان المختلفة $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. على الترتيب. في تلوين G' . بالطبع. إذا لم تكن الوان الرؤوس v_1, v_2, \dots, v_p مختلفة. فإنا نحصل مباشرة على تلوين لرؤوس G بنفس هذه الالوان.

لكل $z \neq i$ $1 \leq i, z \leq p$. نرمز بـ H_{ij} للبيان الجزئي من G الذي يتكون من كل الرؤوس التي أعطيت أحد اللونين α_i, α_j . مع جميع الحافات التي تصل رأساً لونه α_j برأس لونه α_i . إذا كان الرأسان v_i و v_j في مركبتين مختلفتين في H_{ij} . فإنه يمكننا إعادة تلوين الرؤوس في المركبة التي فيها الرأس v_j وذلك بتبادل اللونين α_j, α_i كل محل الآخر في تلك المركبة فقط. وعند ذلك نحصل على تلوين لـ G بحيث أن الرأسين v_i و v_j لهما نفس اللون α_i . وعندئذ، يمكننا تلوين الرأس v باللون α_j . فنحصل على تلوين لـ G بما لا يزيد على p من الالوان. وهكذا سنستعرض فيما تبقى من البرهان حالة تلوين G التي فيها. لكل $z \neq i$. الرأسان v_j, v_i يقعان في نفس المركبة في H_{ij} . سنرمز لمركبة H_{ij} التي تحتوي على الرأسين v_i و v_j بالرمز C_{ij} .

إذا كان الرأس v_i متجاوراً مع أكثر من رأس واحد باللون α_i في C_{ij} . فإن هنالك لون α_k (غير اللون α_i) الذي لم يعط لأي رأس مجاور للرأس v_i . وذلك لأن درجة v_i

في G' هي $(p-1)$ وان هنالك p من الالوان المستعملة. في هذه الحالة يمكننا إعادة تلوين الرأس v_i باللون α_k واعطاء اللون α_i للرأس v . فنحصل على تلوين لـ G باستعمال نفس الالوان التي عددها p . وبطريقة مماثلة نناقش حالة وجود اكثر من رأس واحد متجاور مع v_j في C_{ij} .

اذا كانت درجة كل من v_j, v_i في C_{ij} هي 1. فانه يمكننا ان نثبت بمناقشة مماثلة ان درجة كل رأس آخري في C_{ij} هي 1. لأنه اذا كان u هو أول رأس على الدرب البسيط من v_i الى v_j في C_{ij} الذي درجته اكثر من 2. فانه يمكننا إعادة تلوينه باستعمال لون يختلف عن α_i و α_j . وهذا بدوره يؤدي الى قطع الدرب بين v_i و v_j في C_{ij} . وعليه. يمكننا فرض أن C_{ij} لكل $j \neq i$. يتكون من درب بسيط واحد بين v_i و v_j .

والآن. يمكننا ان نلاحظ أن كل دربين بسيطين C_{ij} و C_{jk} . حيث $k \neq i$ لا يشتركان إلا في الرأس v_j . لأنه اذا كان رأساً آخر مشتركاً بين C_{ij} و C_{jk} فانه يمكننا إعادة تلوين بلون غير الالوان $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$. مما يؤدي الى تناقض حقيقة وجود درب بسيط بين v_i و v_j في C_{ij} .

لكي نكمل البرهان. نأخذ أي رأسين مختلفين v_i و v_j من الرؤوس المجاورة للرأس v . اذا كان الرأسان v_i و v_j غير متجاورين. نفرض أن u رأس بلون α_j متجاور مع v_i . لما كان C_{jk} . لأي $k \neq j$ درباً بسيطاً. فانه يمكننا تبادل اللوينين α_i و α_k للرؤوس الواقعة على هذا الدرب. كل محل الآخر. دون التأثير في تلوين بقية رؤوس البيان G' . ولكن هذا سوف يؤدي الى احدي الحالتين:

(أ) يصبح u مشتركاً بين C_{ij} و C_{ik} . في التلوين الجديد:

(ب) لا يبقى درب بسيط بين v_j, v_i أو بين v_j, v_k في التلوين الجديد.

كلتا الحالتين تؤديان الى انتهاء البرهان كما سبق أن ذكرنا في معالجة مثل هاتين الحالتين. أما اذا كان كل رأسين مختلفين v_i و v_j متجاورين، فان ذلك يؤدي الى أن يصبح K_{p+1} بياناً جزئياً من G . ولكن G بيان متصل منتظم درجته p ، لذلك فان $G = K_{p+1}$.

وهو ما يناقض الفرض.

وبهذا نكون قد عالجتنا كل الحالات الممكنة. وهكذا. فان G قابل التلوين - p للرؤوس. وبذلك يتم البرهان. ■

من المبرهنة (5-2). نحصل مباشرة على النتيجة الآتية.

نتيجة (5-1): كل بيان تكعيبي (أي منتظم بدرجة 3)، ماعدا K_4 . قابل التلوين - 3 للرؤوس.

واضح أن مبرهنة بروكس قليلة الفائدة عندما يكون عدد الرؤوس قليلاً وأعلى درجة للرؤوس كبيرة. كما في البيان $K_{1..n}$ الذي هو قابل التلوين - n للرؤوس وفق مبرهنة بروكس. ولكنه في حقيقة الامر تلويني - 2 للرؤوس لانه ثنائي التجزئة.

يقال لمجموعة S من رؤوس بيان G أنها مستقلة (independent) في G اذا كان كل رأسين فيها غير متجاورين. ويعرف عدد إستقلال رؤوس البيان G على أنه عدد العناصر في أكبر مجموعة مستقلة. ويرمز لعدد الاستقلال بالرمز $\beta_0(G)$. واضح أن

$$\beta_0(K_n) = 1, \quad \beta_0(K_{m..n}) = \max \{ m, n \}.$$

هنالك قيود عليا ودنيا أخرى لعدد تلوين رؤوس بيان ما. تعتمد على عدد الاستقلال. كما هو مبين في المبرهنة التالية.

مبرهنة (5-3): ليكن G بياناً عدد رؤوسه n . عندئذ

$$n / \beta_0(G) \leq \chi(G) \leq n - \beta_0(G) + 1.$$

البرهان: يمكن تجزئة مجموعة رؤوس G الى t ($\chi(G) = t$) من المجموعات الجزئية V_1, V_2, \dots, V_t المستقلة. من تعريف عدد الاستقلال $\beta_0(G)$. لدينا

$$|V_i| \leq \beta_0(G),$$

لكل $i = 1, 2, \dots, t$. وبذلك، فان

$$n = \sum_{i=1}^t |V_i| \leq t \beta_0(G).$$

ومنها نحصل على القيد الأدنى

$$n / \beta_0(G) \leq \chi(G).$$

لأثبت القيد الأعلى لعدد تلوين الرؤوس. نفرض ان S مجموعة مستقلة عظمى من الرؤوس. أي

$$|S| = \beta_0(G).$$

ونرمز بـ G' للبيان الحاصل من G بإزالة كل رؤوس S مع كافة الحافات الواقعة عليها. واضح ان

$$\chi(G') \geq \chi(G) - 1$$

$$\chi(G') \leq n - \beta_0(G).$$

وعليه فان

$$\chi(G) \leq \chi(G') + 1 \leq n - \beta_0(G) + 1. \quad \blacksquare$$

مبرهنة (4-5): ليكن G بياناً عدد رؤوسه n . وليكن \bar{G} البيان المتمم لـ G . عندئذ يكون

$$(1) \quad 2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1,$$

$$(2) \quad n \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq (n + 1)^2 / 4.$$

البرهان: لنرمز $t = \chi(G)$. ولتكن V_i مجموعة الرؤوس ذات اللون α_i لكل $i = 1, 2, \dots, t$. واضح أن V_i مجموعة رؤوس مستقلة في G وان V_1, V_2, \dots, V_t تجزئة لمجموعة رؤوس G . بما أن

$$n = \sum_{i=1}^t |V_i|,$$

فان

$$\max_i |V_i| \geq n/t.$$

في \bar{G} ، البيان الجزئي المقطعي الذي مجموعة رؤوسه V_i ، لكل $i = 1, 2, \dots, t$ ، هو بيان تام . وعليه ، فإن

$$\chi(\bar{G}) \geq \max_i |V_i| \geq n/t.$$

إذاً

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n.$$

وبما أن الوسط الهندسي لأي عددين موجبين لايزيد على وسطها الحسابي ، فإن

$$\sqrt{\chi(G) \cdot \chi(\bar{G})} \leq [\chi(G) + \chi(\bar{G})] / 2,$$

أي أن

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}).$$

وبهذا يتم إثبات القيد الأدنى لكل من (1) و (2) .
لإثبات

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1,$$

نستعمل طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس . واضح أن المساواة لهذه المتباينة صحيحة عندما $n=1$. وعليه . نفترض أن هذه المتباينة صحيحة لكل بيان عدد رؤوسه $(n=1)$. ولنأخذ البيان G الذي عدد رؤوسه n . ليكن v أي رأس في G . وليكن H البيان الناتج من G بإزالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه . واضح أن \bar{H} ينتج من \bar{G} بإزالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه . لنفرض ان درجة الرأس v في G هي d . فتكون درجة v في G هي $(n-d-1)$. يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن

$$\chi(G) = \chi(H) + 1 \quad \text{أو} \quad \chi(G) = \chi(H),$$

$$\chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) + 1 \quad \text{أو} \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}).$$

فإذا كان $\chi(G) = \chi(H)$. فإن

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \chi(H) + \chi(\bar{H}) + 1 \leq n + 1,$$

بموجب فرض الاستقراء الرياضي. وإذا كان $\chi(G) = \chi(H) + 1$ و $\chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H})$ فإن المتباينة صحيحة. والآن نأخذ الحالة الباقية وهي عندما .

$$\chi(G) = \chi(H) + 1, \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) + 1.$$

واضح أن هذه تعني أن إزالة الرأس v من G و \bar{G} تنقص عدد تلوين الرؤوس بواحد لكل منهما، لذلك فإن

$$d \geq \chi(H) \quad , \quad n-d-1 \geq \chi(\bar{H}).$$

إذاً

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leq n-1.$$

وهكذا ، فإن المتباينة

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1,$$

لكل الحالات

وأخيراً، بتطبيق المتباينة الجبرية المعروفة

$$[\chi(G) + \chi(\bar{G})]^2 \leq 4 \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}),$$

نحصل على

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq (n+1)^2 / 4.$$

وبهذا يتم البرهان. ■

لدينا المبرهنة الآتية التي تتعلق بتلوين رؤوس البيانات المستوية، ويطلق عليها مبرهنة الألوان الخمسة ، وهي تعود الى العالم هيوود (Heawood).

مبرهنة (5 - 5): كل بيان مستوي قابل التلوين-5 للرؤوس.

البرهان: لاجل البرهان، نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. بموجب مبرهنة بروكس، تكون هذه المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد رؤوس البيان المستوي لا يزيد على 6.

والآن، نفرض أن كل بيان مستوي قابل التلوين - 5 للرؤوس عندما يكون عدد رؤوسه

(n - 1) - وتأمل بياناً مستويًا . G ، عدد رؤوسه n .

بموجب النتيجة (4 - 5)؛ يوجد في G رأس v درجته لا تزيد على 5 .

ليكن G' البيان الناتج من G بإزالة الرأس v مع كافة الحافات الواقعة عليه . بطبيعة الأمر . البيان G' مستوي وعدد رؤوسه (n - 1) . وبذلك فهو قابل التلوين - 5 للرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي .

إذا كان $\rho(v) \leq 4$. فإن هنالك لون α من الالوان الخمسة المستعملة في تلوين G وهو الذي لم يعط لأي من الرؤوس المجاورة لـ v . وعليه . نعطي اللون α الى الرأس v . فنحصل على تلوين لـ G باستعمال نفس الالوان الخمسة . وفي هذه الحالة يتم البرهان .

والآن ، نفرض أن كل رأس في G بدرجة لا تقل عن 5 . وان $\rho(v) = 5$. كما نفرض

ان G مستوي أعظمي [راجع التعريف في بند (4 - 1)] (بطبيعة الامر . إذا كانت المبرهنة صحيحة لكل بيان مستوي أعظمي فإنها صحيحة لكل بيان مستوي) . لتكن $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot v_5$ الرؤوس المجاورة لـ v مأخوذة بالترتيب وفق إتجاه حركة عقرب الساعة حول v . عندئذ . تكون $(v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot v_5 \cdot v_1)$ دائرة بسيطة [انظر الشكل (5 - 2)] وذلك لكون G مستويًا أعظميًا .

إذا كانت ألوان الرؤوس $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot v_5$ في تلوين G' ليست كلها مختلفة .

فيمكننا أن نحصل مباشرة على تلوين لـ G من تلوين G' باستعمال نفس الالوان الخمسة . والآن نعالج الحالة التي فيها ألوان الرؤوس $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot v_5$ كلها مختلفة . لنفرض

أن لون الرأس v_i هو α_i لكل $i = 1, 2, \dots, 5$.

كما في برهان المبرهنة (5 - 2) . نرمز H_{ij} للبيان الجزئي من G المكون من

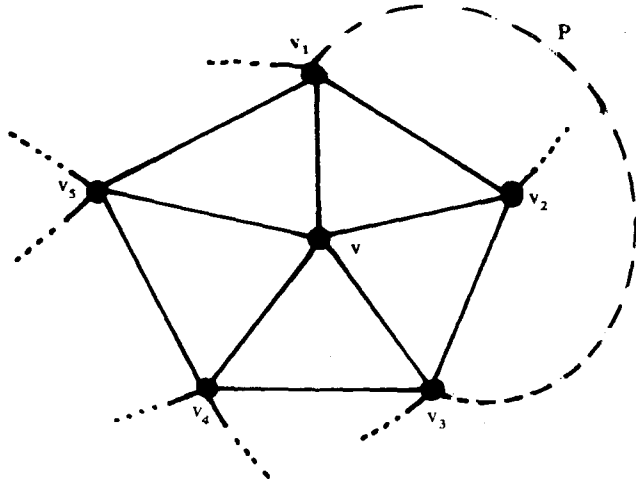
الرؤوس الملونة بـ α_i أو α_j مع كل الحافات في G التي تصل رأساً بلون α_i مع رأس بلون α_j . لدينا الآن حالتان :

(أ) إذا كان الرأسان v_1 و v_3 واقعين في مركبتين مختلفتين في H_{13} . فيمكننا تبادل

اللونين α_1 و α_3 كل محل الآخر لكافة الرؤوس الواقعة في مركبة H_{13} التي تحتوي على الرأس v_1 . إعادة التلوين بهذا الشكل يجعل لون الرأس v_1 هو α_3 ويبقى الرأس v_3 باللون α_3 . وبذلك يمكننا إعطاء اللون α_1 الى الرأس v فنحصل على تلوين G بخمسة ألوان .

(ب) إذا كان الرأسان v_1 و v_3 واقعين في نفس المركبة في H_{13} . أي يوجد في

H_{13} درب بين v_1 و v_3 . فإنه يوجد في G دائرة بسيطة C بالصيغة $(v \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_3 \cdot v)$.



شكل (5-2)

كما موضح في الشكل (5-2) . حيث أن (v_1, \dots, v_5) هو الدرب P الواقع في $H_{1,3}$ والمرسوم منقطاً. بما أن G مستو وأن الرأس v_2 يقع داخل C وأن v_4 خارجها (أو v_2 يقع خارجها و v_4 داخلها). فإنه لا يوجد درب بين v_2 و v_4 في $H_{2,4}$. أي أن v_2 و v_4 يقعان في مركبتين مختلفتين في $H_{2,4}$. وعندئذ يمكننا تبادل اللونين α_2 و α_4 كل محل الآخر لجميع رؤوس مركبة $H_{2,4}$ التي تحتوي على v_2 . وهكذا يصبح لون الرأس v_2 هو α_4 وبذلك يمكننا تلوين v باللون α_2 .

وبهذا يتم البرهان. ■

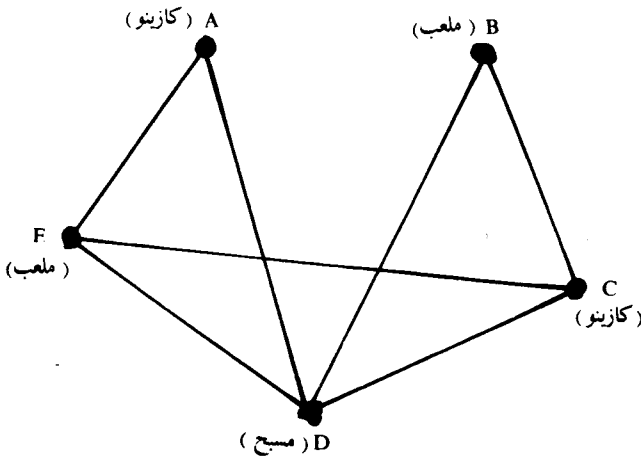
لقد ذكرنا أن لنظرية البيانات تطبيقات كثيرة ومتنوعة . ومن المفيد ان نشير هنا الى أن هنالك استخدامات بسيطة ومفيدة ومباشرة تستند الى مسائل تلوين رؤوس البيانات . كما هو مبين في المثال الآتي .

مثال : ترغب وزارة الشباب وضع خطة تتضمن بناء ملعب . مسبح . كازينو في خمسة نواح هي A . B . C . D . E . وكانت الخطة تنص على بناء واحد فقط من المرافق الثلاثة في كل ناحية من النواحي الخمس . أضف الى ذلك . اذا كانت المسافة بين ناحيتين

مختلفتين أقل أو تساوي 10 كيلومترات. فلا يبني مرفقان متشابهان في هاتين الناحيتين. فإذا كانت المسافات بين هذه النواحي كما هي معطاة في الجدول الآتي، فهل يمكن تنفيذ الخطة؟

	A	B	C	D	E
A		12	15	8	7
B	12		6	9	14
C	15	6		10	9
D	8	9	10		8
E	7	14	9	8	

الحل : نمثل كل ناحية برأس . وإذا كانت المسافة بين الناحيتين أقل أو تساوي 10 كيلومترات نصل الرأسين الممثلين لهما بحافة . فنحصل على البيان المبين في الشكل (5 - 3) فإذا كان بالإمكان تلوين رؤوس هذا البيان بثلاثة ألوان مختلفة . فإنه يمكننا تنفيذ الخطة باعتبار أن كل لون يمثل بناء أحد المرافق الخمسة . مثلاً . بناء كازينو في كل من الناحيتين A و C . وبناء ملعب في كل من الناحيتين B و E . وبناء مسبح في الناحية D .



شكل (5 - 3)

تمارين (5-1)

(1) لتكن C_n دائرة بسيطة عدد رؤوسها n ، جد $\chi(C_n)$. وإذا كانت T شجرة، فما هو $\chi(T)$ ؟

(2) اثبت ان بياناً G ثنائي التلوين (bicolorable) ، أي قابل التلوين -2، اذا، اذا فقط كان خاليا من الدارات الفردية الطول .

(3) ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين . جد $\chi(G_1 \cup G_2)$ ، $\chi(G_1 + G_2)$. بدلالة $\chi(G_1)$ و $\chi(G_2)$.

(4) اذا كان G بياناً بسيطاً منتظماً درجته d وعدد رؤوسه n فاثبت أن $\chi(G) \geq n/(n-d)$.

(5) يقال لبيان G أنه حرج (critical) اذا كانت عملية ازالة أي رأس منه ، مع الحافات الواقعة عليه ، تؤدي الى تقليل عدد تلوين رؤوسه . فالبيان التام K_n ، $n > 1$ هو بيان حرج ، بينما $K_{n,m}$ ، $n, m > 1$ ، ليس حرجاً . اذا كان G بياناً حرجاً عدد تلوين رؤوسه هو χ . فاثبت أن :

(أ) G متصل وغير قابل للانفصال .

(ب) لكل رأس v في G يكون $\rho(v) \geq \chi - 1$

(6) اذا كان العدد اللوني لبيان G هو χ . فاثبت ان G يحتوي على بيان جزئي حرج عدد تلوين رؤوسه هو χ ايضاً .

(7) اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وسمكه θ . فبرهن على أن

$$\chi(G) \leq 6\theta .$$

[تلميح : استعمل النتيجة (4-2) لايجاد قيد أعلى لمجموع درجات رؤوس G

ثم استنتج وجود رأس درجته لا تزيد على 50].

(8) اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وسمكه θ وخصره g فاثبت أن :

$$\chi(G) \leq 2g\theta / (g-2) .$$

ثم استنتج ان كل بيان مستوٍ خالٍ من المثلثات يكون قابل التلوين -4 للرؤوس

[تلميح : استعمل تمرين (7) من مجموعة تمارين (4-1) لايجاد قيد أعلى

لمجموع درجات رؤوس G . ثم استنتج وجود رأس بدرجة لا تزيد على $(g-2)(g+2)$.

(9) حل المثال المعطى في نهاية البند عندما يكون جدول المسافات بين النواحي كما هو مبين فيما يأتي :

	A	B	C	D	E
A		11	8	7	6
B	11		7	10	16
C	8	7		8	$9\frac{1}{2}$
D	7	10	8		10
E	6	16	$9\frac{1}{2}$	10	

(10) ترغب وزارة التربية في بناء 6 مدارس موزعة على القرى A, B, C, D, E, F بحيث أنها تبني في كل قرية من هذه القرى مدرسة واحدة فقط لاحدى المراحل الدراسية الثلاث ، الابتدائية او المتوسطة أو الثانوية . فاذا افترضنا ان كل طالب يستطيع أن يقطع (ماشياً اوراقياً) ما لا يزيد على 5 كيلومترات من قريته الى مدرسة في قرية اخرى او بالعكس ، وكانت خطة الوزارة تهدف الى بناء هذه المدارس بحيث لا يكون البعد بين هذه القرى سبباً لحرمان أي طالب من طلابها من الدراسة مهما كانت مرحلة دراسته المدرسية . فاذا علمت ان المسافات بين القرى الست هي تلك المعطاة في الجدول الآتي ، فهل يمكن تنفيذ هذه الخطة ؟ واذا كان ذلك ممكناً ، فاذكر نوعية المدرسة (أي ابتدائية او متوسطة أو ثانوية) التي ستبنى في كل من هذه القرى .

	A	B	C	D	E	F
A		5	6	$5\frac{1}{2}$	7	4
B	5		3	13	10	11
C	6	3		$4\frac{1}{2}$	9	8
D	$5\frac{1}{2}$	13	4	$\frac{1}{2}$	4	12
E	7	10	9	4		$3\frac{1}{2}$
F	4	11	8	12	$3\frac{1}{2}$	

(5 - 2) تلوين الواجهة (تلوين الخرائط) :

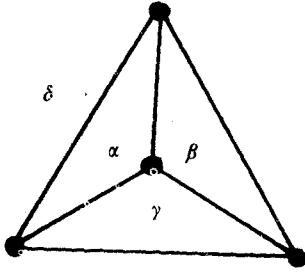
لقد برزت مسألة الالوان الاربعة من خلال تلوين الخرائط الجغرافية . من الطبيعي الاستفسار عن اقل عدد من الالوان التي نحتاج اليها لاجل تلوين خارطة معطاة بحيث ان اية منطقتين متجاورتين في تلك الخارطة تلوانان بلونين مختلفين . ولقد لوحظ ان اربعة الوان كافية دائماً لذلك ، ولكن لم يستطع احد اثبات هذه الحقيقة حتى عام 1976 . وسوف نقدم شرحاً مفصلاً لهذه المسألة في البند (5 - 3) . اما في هذا البند فسوف نستعرض بشكل عام ومختصر قضية تلوين اوجه بيان مستوي G ، ونثبت العلاقة بين هذا التلوين وتلوين الرؤوس للثلاثي - الهندسي G^* .

لاجل صياغة عبارات دقيقة ، يجب علينا تعريف « الخارطة » . تعرف الخارطة (map) على انها سطح S مع بيان خال من البرازخ مغمور في S ؛ قد يكون السطح S هو المستوي او اي سطح مغلق قابل للتوجيه . وعندما يغمر البيان G في السطح S ، فان S يتجزأ الى مناطق يطلق عليها اوجه الخارطة (أو أوجه البيان G . عندما يكون السطح هو المستوي ، فاننا نقول للخارطة بانها خارطة مستوية .

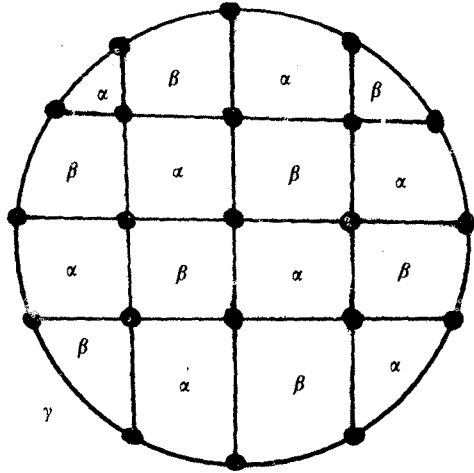
يقال لخارطة M انها قابلة للتلوين - للاوجه اذا أمكن تلوين أوجهها بما لا يزيد على k من الالوان المختلفة بحيث ان كل وجهين متجاورين (اي يشترك تخامهما بحافة) لهما لونان مختلفان . ويعرف عدد التلوين لواجهة خارطة M ، والذي يرمز له $\phi(M)$ ، بانه اصغر عدد k بحيث ان M قابلة للتلوين - للاوجه . فمثلاً ، عدد التلوين لواجهة الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (5 - 4) هو 4 ؛ وعدد التلوين لواجهة الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (5 - 5) هو 3 .

نفرض بصورة عامة ، ان البيانات التي سنعالجها في هذا البند متصلة وخالية من البرازخ ، ولكنها قد تحتوي على لفات او حافات مضاعفة ؛ كما يمكننا الافتراض انها لا تحتوي على رؤوس ثنائية الدرجة ، لان استحداث رأس ثنائي الدرجة ، أو دمج حافتين واقعيتين على رأس ثنائي الدرجة بحافة واحدة ، لا يغير من تلوين اوجه الخارطة .

لأجل الاختصار في الرموز ، سوف نرمز للخارطة المستوية ، المكونة من المستوي مع بيان مستوخال من البرازخ G ، بنفس رمز البيان المستوي ، أي G .



شكل (4-5)



شكل (5-5)

من مفهوم الاثنينية الهندسية للبيانات المستوية ، نحصل على المبرهنة الآتية التي تعطينا تلوين أوجه خارطة مستوية G من تلوين الرؤوس للاثنيني - الهندسي ل G .

مبرهنة (6-5) : ليكن G بيانا متصلاً مستوياً خالياً من البرازخ ، وليكن G_0^* الاثنيني الهندسي ل G ؛ عندئذ تكون الخارطة المستوية G قابلة للتلوين - k للوجهه اذا واذا فقط G_0^* قابل التلوين - k للرؤوس .

البرهان : بما أن G خال من البرازخ ، فإن G_0^* خال من اللغات .

نفرض ان الخارطة المستوية G قابلة للتلوين - k للوجهه . بما أن كل وجهه في G يحتوي في داخله على رأس واحد فقط من رؤوس G_0^* ، فانه يمكننا تلوين رؤوس G_0^* بنفس ألوان الالوجهه التي تقع في داخلها . من عملية انشاء الاثنيني الهندسي G_0^* من G . فان رأسين u و v متجاوران في G_0^* اذا واذا فقط كان الوجهان المقابلان لهما في G متجاورين . لذلك ، فان كل رأسين متجاورين في G_0^* لهما لونين مختلفين . وعليه ، فان G_0^* قابل التلوين - k للرؤوس . بنفس ألوان أوجه الخارطة المستوية G .

وبطريقة مماثلة تماماً ، ثبت انه اذا كان G_0^* قابل التلوين - k للرؤوس ، فان
الخارطة المستوية G قابلة التلوين - k للاوجه ■.

نستنتج من هذه المبرهنة ان أية مبرهنة في موضوع تلوين الرؤوس للبيانات المستوية
الخالية من اللفات يقابلها مبرهنة اثينية في موضوع تلوين الاوجه للخرائط والعكس
بالعكس ؛ كما سوف نبين في المبرهنات الآتية .

مبرهنة (5-7) : خارطة مستوية G قابلة التلوين - 2 للاوجه اذا واذا فقط G
بيان أولري .

البرهان : ليكن G_0^* الاثيني الهندسي ل G . بموجب المبرهنة : (5-6) ، G
قابلة التلوين - 2 للاوجه اذا واذا فقط G_0^* قابل التلوين - 2 للرؤوس . كما ان G_0^*
قابل التلوين - 2 للرؤوس اذا واذا فقط G_0^* ثنائي التجزئة . ولما كان G_0^* بياناً مستوياً ،
فانه بموجب التمرين (7) من مجموعة تمارين (4-4) ، يكون G_0^* ثنائي التجزئة اذا
واذا فقط G بيان أولري . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (5-8) : - مبرهنة الالوان الثلاثة -

لتكن G خارطة مستوية تكعيبية ؛ عندئذ تكون G قابلة التلوين - 3 للاوجه اذا واذا
فقط أطوال نخوم أوجه G أعداد زوجية .

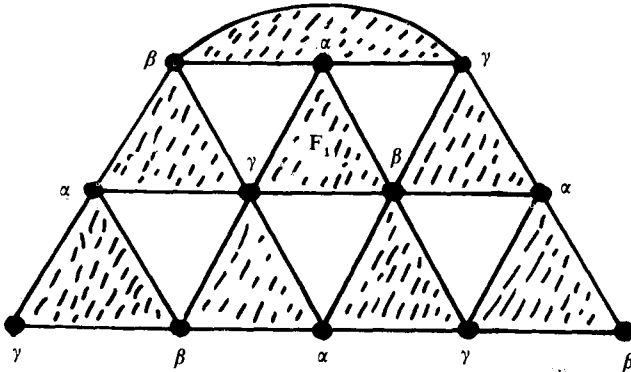
البرهان : تعرف الخارطة التكعيبية بأنها خارطة درجة كل رأس فيها هي 3

نفرض ان الخارطة المستوية G قابلة التلوين - 3 للاوجه . فاذا كان F أي وجه في
 G ، فان تخم F يشترك مع تخم كل وجه مجاور له بحافة واحدة فقط (لان G تكعيبية)
فاذا كان F ملوناً باللون α ، فان الاوجه المجاورة ل F تكون ملونة ب β أو γ على
التناوب ، ولذلك فان عددها يجب ان يكون زوجياً . اضافة الى ذلك ، لا يوجد وجه
يشترك مع F برأس واحد فقط ، لان خلاف ذلك يجعل درجته اكثر من 3 . لذلك ،
فان طول تخم F هو عدد زوجي .

والآن نفرض ان G خارطة مستوية تكعيبية تخوم أوجهها ذات أطوال زوجية .

عندئذ ، تكون درجة كل رأس في G_0^* زوجية ، وكل وجه في G_0^* هو مثلث ، علماً ان
 G_0^* هو الاثيني الهندسي ل G . وعليه ، فان G_0^* بيان أولري . وهكذا ، بموجب
المبرهنة (5-7) ، فان الخارطة المستوية G_0^* قابلة التلوين - 2 للاوجه ، مثلاً .
باللونين الأسود والأبيض . بقي أن نثبت امكانية تلوين رؤوس G_0^* بثلاثة الوان . α, β, γ

نبدأ أولاً بأي وجه ، F_1 ، ملون بالاسود ، ونلون رؤوسه الثلاثة بـ α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول F_1 . ثم نلون رؤوس كل وجه ملون بأسود ومشارك برأس مع الوجه F_1 باللوان α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول ذلك الوجه . وهكذا يمكننا الاستمرار بأخذ الواجه السود التي تحيط بوجه سبق أن لونت رؤوسه . [انظر الشكل (5 - 6)] . وبذلك يمكننا تلوين رؤوس G^* باللوان الثلاثة α, β, γ . وعليه بموجب المبرهنة (5 - 6) ، فان الخارطة المستوية G قابلة للتلوين - 3 للواجه . وبهذا يتم البرهان



شكل (5 - 6)

تمارين (5 - 2)

- (1) اثبت ان كل خارطة مستوية قابلة للتلوين - 5 للواجه .
- (2) لنفرض ان المستوي قسم الى عدد منته من المناطق يرسم عدد منته من الدوائر متساوية او مختلفة . متقاطعة او غير متقاطعة . اثبت انه يمكن تلوين هذه المناطق بلونين فقط .
- (3) أعد التمرين (2) مع ابدال كلمة دائرة بكلمة مستقيم .
- (4) لتكن G خارطة مستوية عدد رؤوسها n ودرجة كل رأس فيها لا تقل عن 3 .
اثبت ان

$$3f \geq m + 6$$

- علماً ان f عدد أوجها . و m هو عدد حافاتها .
- (5) لتكن G خارطة درجة كل رأس فيها لا تقل عن 3 . فاذا علمت ان عدد اوجه G يقل عن 12 . فاثبت :

- (أ) يوجد في G وجه طول تخمه لا يزيد على 4 .
 (ب) الخارطة المستوية G قابلة التلوين - 4 للاوجه .
 (6) لتكن G خارطة مستوية لاتحتوي على وجه طول تخمه 2 ولا تحتوي على رؤوس ثنائية الدرجة . اثبت انه لا يمكن ان تكون الخارطة المستوية G قابلة التلوين - 2 للاوجه وفي الوقت نفسه يكون G قابل التلوين - 2 للرؤوس .
 [تلميح : استعمل المبرهنة (5-7) . وتمرين (2) من مجموعة تمارين (1-5) . وتمرين (8) من مجموعة تمارين (4-1) .]

- (*7) اثبت انه اذا امكن تلوين وجوه اية خارطة مستوية تكعيبية باربعة الوان . فيمكن تلوين وجوه كل خارطة مستوية بما لا يزيد على اربعة الوان .
 (*8) تعرف الخارطة الطرية على انها سطح طرة مع بيان طري مغمور فيها
 اثبت ان كل خارطة طرية قابلة التلوين - 7 للاوجه .
 [تلميح : استعمل المبرهنة (4-6) لاثبات أن هنالك دائماً وجه في البيان الطري تخمة لا يزيد على 6 : وأخيراً اتبع الاستقراء الرياضي على عدد الالوجه .]

- (*9) ارسم خارطة طرية مؤلفة من 7 أوجه بحيث يكون كل وجه متجاوراً مع كل وجه آخر . ماذا تستنتج من وجود هكذا خارطة طرية ؟

- (*10) يقال لخارطة مستوية أنها أعظمية اذا كان طول تخم كل وجه فيها هو 3 . اثبت ان كل خارطة مستوية أعظمية . ماعدا K_4 . تكون قابلة التلوين - 3 للاوجه . [تلميح : استعمل مبدأ الاثنينية الهندسية . ومبرهنة (5-2) .]

(3-5) مبرهنة الالوان الاربعة :

ظهرت مسألة الالوان الاربعة قبل مايزيد على قرن من الزمن . ولقد كتبت مقالات كثيرة عن تاريخ نشأتها . وقد حاول العديد من علماء الرياضيات ومعظم المختصين في نظرية البيانات حلها . أي اثبات صحتها أو اثبات عدم صحتها . ولقد أخذت تلك المحاولات الكثير من وقت وجهود العلماء الذين حاولوا حلها . حتى سماها البعض « مرض الالوان - الاربعة » . وكانت الرغبة في حلها تنتقل من الاستاذ الى طلبته . واحياناً من الوالد الى ولده . وقد يكون السبب الرئيسي لذلك هو بساطة فحواها . مما يجعل المتعرف عليها يعتقد بسهولة حلها .

ينص تكهن الالوان - الاربعة على : « كل خارطة مستوية قابلة للتلوين - 4 - للاوجه » ؛ أي أن أربعة الوان كافية دائماً لتلوين أوجه أية خارطة مستوية بحيث ان كل وجهين متجاورين يلوانان بلونين مختلفين . »

يقال ان مسألة الالوان الاربعة قدمت لأول مرة من قبل عالم التوبولوجيا موبيس (Möbius) سنة 1840 . ويقال إن المسألة نشأت أصلاً عند رسامي الخرائط ، ولكن لا يوجد أساس ثابت لذلك . ولكن الثابت في المصدر الاول المعروف عن تاريخ المسألة هورسالة موجهة من استاذ الرياضيات في جامعة لندن أوغسطس دي مورغان (Augustus De Morgan) الى صديقه وزميله وليم روان هملتون (William Rowan Hamilton) الذي كان استاذاً في كلية تريتني في دبلن ، وكان تاريخ الرسالة هو 23 تشرين الاول سنة 1852 . ولقد تضمنت الرسالة نص المسألة ، وذكر فيها دي مورغان انه علم بالمسألة من أحد طلبته واسمه فريدريك كوثري (Fredrich Guthrie) الذي أخذها من اخيه فرنسيس كوثري مدعيًا انه لاحظها عندما كان يلون خارطة لمقاطع انكلترا . ولقد كان دي مورغان مهتماً بالمسألة كثيراً مما دفعه الى اخبار اصدقائه بها .

وفي سنة 1878 ، بعد موت دي مورغان ، قدّم كيلي (Cayley) المسألة في اجتماع جمعية الرياضيات اللندنية ، متسائلاً فيما اذا كانت قد حُلّت أم لا تزال غير محلولة ، وذكر في حينه أنه غير قادر على حلها . وقد جلب ذلك انتباه المحامي كيمبي (A. B. Kempe) ، الذي كان يعمل أمين صندوق ، وكان هاوياً للرياضيات . وفي سنة 1879 ، نشر كيمبي مقالة في مجلة الرياضيات الاميريكية بثبت فيها صحة تلك المسألة . وبعد نشره البرهان ، اصبح كيمبي رئيساً لجمعية الرياضيات اللندنية تمشيماً لجهده في حل المسألة . وقد قبل الرياضيون البرهان الذي نشره كيمبي في حينه ، ولكن في سنة 1890 ، أشار عالم الرياضيات هيوود (Heawood) ، وكان استاذاً في جامعة درهام ، الى وجود خلل في برهان كيمبي لهذه المسألة .

وقد قبل علماء الرياضيات برهان كيمبي لسنوات عديدة متصورين ان الخلل الذي فيه غير أساسي وانه يمكن التغلب عليه . ولكن ، بعد أن مضت سنوات كثيرة دون أن يصحح الخطأ من قبل علماء الرياضيات ، عند ذلك أيقنوا أن المسألة أعمق وأصعب مما كان متوقفاً . ومنذ ذلك التاريخ وعلماء الرياضيات يحاولون ايجاد الحل لهذه المسألة المستعصية ، حتى عام 1976 عندما نشر أيبيل وهيكين (Appel and Haken) [14] الحل الايجابي للمسألة .

كما كان متوقفاً لهذه المسألة المنبئة ، فان برهانها طويل جداً ، فملخص البرهان يتكون من 100 صفحة بالحجم الكبير ، 100 صفحة تفاصيل ، و 700 صفحة عمل مساعد ؛ اضافة الى ذلك فقد استغرقت الحسابات 1200 ساعة على الحاسبة الالكترونية .

بصورة عامة ، عالـج ايل وهيكـن مسألة تلويـن الرؤوس لبيان مستوـخـال من اللغات ، وهذه ، بالطبع ، مكافئة لمسألة تلويـن الـاوجه بموجـب المبرهنة (5 - 6) . اضافة الى ذلك ، فقد إعتبرا البيان المطلوب تلويـن رؤوسه يتكون من أوجه مثلثية ، أي انه مستوٍ أعظمي . فاذا تم اثبات ان كل بيان مستوٍ أعظمي يكون قابل التلويـن - 4 للرؤوس ، فان كل بيان مستوٍ هو قابل التلويـن - 4 للاوجه . وبما أن الاثنيني الهندسي لبيان مستوٍ أعظمي هو بيان مستوٍ تكعيبي خال من البرازخ ، فقد اصبحت المسألة المطلوب حلها بالصيغة : « كل بيان مستوٍ أعظمي قابل التلويـن - 4 للرؤوس . »

إن الطريقة التي اتبعها ايل وهيكـن لا تختلف ، من الناحية النظرية ، كثيراً عن طريقة كمبي . ولهذا ، فسوف نبدأ بشرح محاولة كمبي لأجل أن نفهم خطة ايل وهيكـن في إثبات مسألة الالوان الاربعة .

برهان كمبي : يبدأ كمبي البرهان باستعمال صيغة أولر . فاذا كان G بياناً مستوياً أعظماً عدد رؤوسه n ، وعدد حافته m وعدد أوجهه f ، فان

$$n - m + f = 2$$

بما أن تخم كل وجه من أوجه G هو مثلث ، وكل حافة تشترك بين تخمي وجهين فقط ، فان $2m = 3f$. واذا كان ϕ_i عدد الرؤوس بدرجة i ، فان

$$\sum_{i=0} \phi_i = 2m.$$

وبالتعويض في صيغة أولر ، نحصل على

$$\sum_{i=0} (6-i) \phi_i = 12,$$

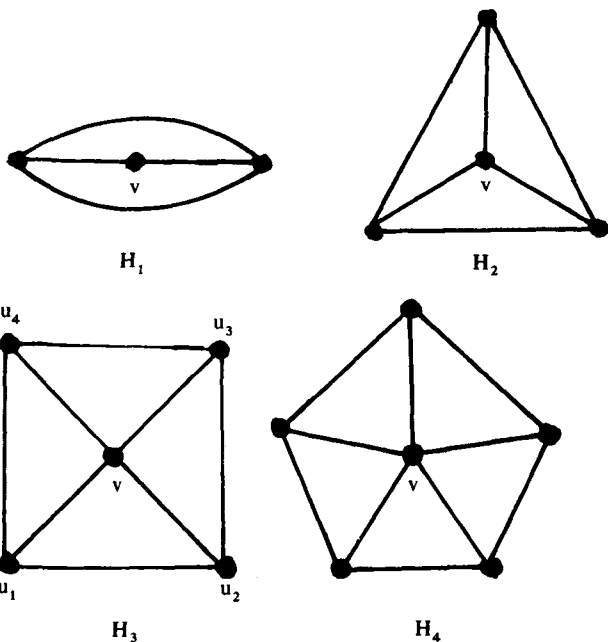
أي أن

$$4\phi_2 + 3\phi_3 + 2\phi_4 + \phi_5 - (\phi_7 + 2\phi_8 + 3\phi_9 + \dots) = 12,$$

لان $\phi_0 = \phi_1 = 0$ لعدم وجود رؤوس بدرجة صفر أو واحد في G . من هذا

نستنتج انه يجب ان يكون واحد على الاقل من الاعداد $\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$

موجباً . بمعنى آخر، يجب أن يحوي G واحداً على الأقل من
البيانات H_1, H_2, H_3, H_4 المبينة في الشكل (5-7)



شكل (5-7)

لتفرض أن هنالك مثالاً مناقضاً (counter example) لتكهن الالوان
الاربعة ، ثم نبرهن على أن هذا غير ممكن وذلك بطريقة التناقض .

ليكن T' بياناً مستويّاً خالياً من اللغات مناقضاً لتكهن الالوان الاربعة وباقبل
عدد من الرؤوس . اذا لم يكن T' أعظمية . نضيف اليه بعض الحافات . بدون
اضافة رؤوس ، بحيث يصبح أعظمية . اي كل أوجهه مثلثيه . لترمز لهذا البيان الناتج
بـ T . واضح من هذا الافتراض أن : كل بيان مستو الذي عدد رؤوسه اقل من
عدد رؤوس T قابل التلوين - 4 للرؤوس . ولكن T نفسه ليس كذلك .

إذا احتوى T على H_1 أو H_2 ككيان جزئي ، فإن إزالة v من T . مع كل الحافات الواقعة عليه ، تنتج بياناً مستويًا T'' عدد رؤوسه أقل من عدد رؤوس T ، وبذلك يمكن تلوين رؤوس T'' بأربعة ألوان . ولما كان الرأس v بدرجة لا تزيد على 3 ، فيمكن تلوين الرأس v بلون يختلف عن ألوان الرؤوس المجاورة له ، وهكذا نحصل على تلوين لرؤوس T بأربعة ألوان ، وهذا يناقض افتراض كون T غير قابل للتلوين - 4 للرؤوس . هذا التناقض يثبت عدم إمكانية احتواء T على H_1 أو H_2 ككيان جزئي .

إذا احتوى T على H_3 ككيان جزئي ، فإننا نتبع طريقة مماثلة . فنزيل الرأس v من T مع الحافات الواقعة عليه ، ونرمز للبيان الناتج T'' . لما كان عدد رؤوس T'' أقل من عدد رؤوس T ، فإن T'' قابل للتلوين - 4 للرؤوس . إذا لم تكن ألوان الرؤوس u_1, u_2, u_3, u_4 (انظر الشكل (5-7)) مختلفة . فإنه يتوفر لدينا لون من الألوان الأربعة نعطيه الى v . وبذلك يصبح T قابل للتلوين - 4 للرؤوس . أما إذا كانت ألوان الرؤوس u_1, u_2, u_3, u_4 مختلفة . ولتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ على الترتيب . فإننا نفرض أن $H_{1,3}$ هو البيان الجزئي من T'' المكون من الرؤوس الملونة بـ α_1 أو α_3 مع الحافات التي تصل رأساً لونه α_1 برأس لونه α_3 . وبالمثل . نعرف $H_{2,4}$. إذا لم يكن هنالك درب في $H_{1,3}$ بين u_1 و u_3 . فإنه يمكننا إعادة تلوين الرؤوس في المركبة التي تحتوي على u_1 بتبادل اللونين α_1 و α_3 كل محل الآخر . وعند ذلك يصبح الرأس u_1 باللون α_3 . وفي هذه الحالة يتوفر لدينا اللون α_1 الذي نعطيه للرأس v . وبالمثل . إذا لم يكن هنالك درب في $H_{2,4}$ بين الرأسين u_2 و u_4 . فيمكننا إعادة التلوين بحيث يتوفر لدينا (α_2) نعطيه للرأس v

أما إذا كان هنالك درب بين u_2 و u_4 في $H_{2,4}$. وبنفس الوقت يوجد درب في $H_{1,3}$ بين u_1 و u_3 . فيجب ان يشترك الدربان برأس w . لان T'' مستوٍ . ولكن هذا غير ممكن لانه سوف يصبح للرأس w لونان مختلفان . وهكذا . في كل هذه الحالات . يمكننا تلوين رؤوس T بما لا يزيد على اربعة ألوان . وهو ما يناقض فرضنا . عليه . لا يمكن ان يحتوي T على H_3 ككيان جزئي .

لإثبات عدم احتواء T على H_4 كبيان جزئي ، استخدم كمي نفس الطريقة التي إتبعها عندما افترض وجود H_3 في T ، وهنا وقع في الخطأ . ولو أنه تمكن من إثبات هذا الجزء بدون خطأ ، لثم له برهان التحزر بإثبات عدم وجود هكذا بيان T .

ومع أن هنالك خطأ في برهان كمي ، فإن تعديلاً بسيطاً على طريقته أدى الى برهان مبرهنه الالوان الخمسة . كما أن طريقته هذه كوّنت الاساس لكثير من الاعمال والنتائج المتفرعة عن مسألة الالوان الأربعة .

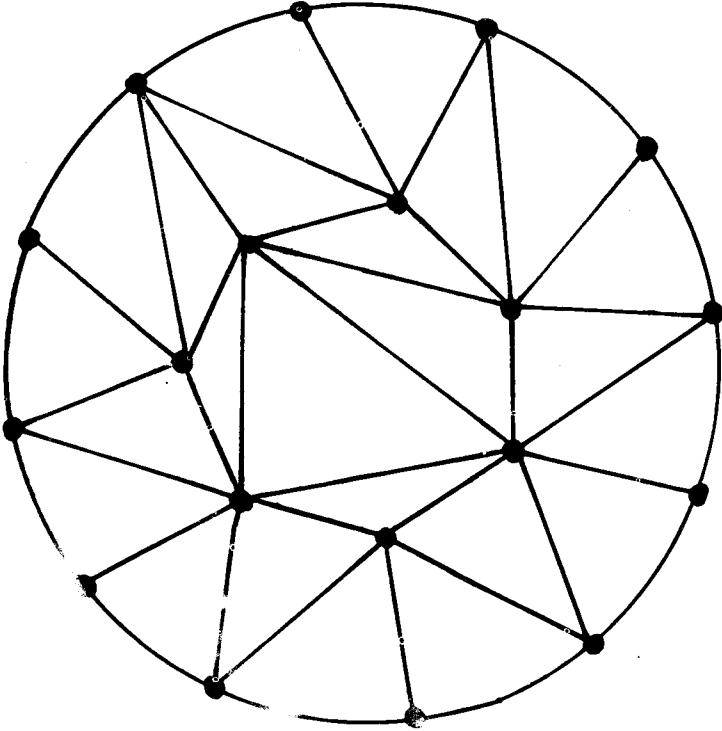
إذا أمعنا في النظر الى طريقة كمي لوجدنا أنها تتكون باختصار من خطوتين :
 (أ) إيجاد مجموعة U من بيانات [يطلق عليها لاتجنبية (unavoidable)] بحيث ان كل بيان مستوٍ أعظمي يحتوي على واحد منها على الاقل كبيان جزئي .
 (ب) اثبات ان كل بيان في U قابل للاختزال (reducible) ، أي لا يمكن ان يكون موجوداً كبيان جزئي في أصغر مثال مناقض للتحزر . [اي أنه اذا وجد مثال مناقض يحتوي على أي من البيانات اللاتجنبية ، فيمكن اختزاله الى مثال مناقض أصغر منه - من ناحية عدد الرؤوس .]

لقد كانت المجموعة U التي اوجدها كمي تتكون من أربعة بيانات فقط ، وهي المبينة في الشكل (5-7) ، ولكنه لم يستطع أن يبرهن على ان البيان H_4 قابل للاختزال ، ولذلك فإن محاولته هذه لم تؤد الى البرهان الصحيح .

نجح أبيل وهيكن في اتباع طريقة مماثلة لطريقة كمي ولكن بإيجاد مجموعة U من بيانات لاتجنبية تتكون من 1939 بياناً . (لقد أثبت مؤخراً انه يمكن اختصارها الى ما يقرب من 1400 بيان) .

البرهان على ان كلاً من هذه البيانات اللاتجنبية قابل للاختزال يتضمن جهداً كبيراً جداً أنجز باستعمال الحاسبة الالكترونية . ولو لم تكن الحاسبة الالكترونية المتوفرة حالياً ذات كفاءة كافية لتقبل هذه البيانات ، لما امكن حل المسألة . ان كلاً من البيانات اللاتجنبية التي عالجهها أبيل وهيكن كان محدوداً بتخم يتكون من 14 رأساً أو أقل ، أحد هذه البيانات مبين في الشكل (5-8) .

كما سبق ان ذكرنا ، فان برهان أبيل وهيكن يتكون من الخطوتين الاساسيتين (ا) و (ب) . كل من هاتين الخطوتين مباشرة بحد ذاتها ، ولكن التداخل بينهما معقد ، وقد عمل أبيل وهيكن عملاً كبيراً نوعياً وكمياً لاجل التغلب على هذه الصعوبة . ولكن ، مما يؤسف له ان برهانهما مطول جداً ، ولذلك يصعب التحقق منه ، كما أنه لا يعطينا تفسيراً واضحاً عن سبب كون النتيجة صحيحة . هذه ، في حقيقة الامر ، لا نرحط من روعة ما حققه أبيل وهيكن باثباتهما مبرهنة الالوان الاربعة .



شكل (5-8)

تمارين (5-3)

- (1) استخدم ما لا يزيد عن أربعة الوان لتلوين رؤوس البيان في الشكل (5-8)
- (2) انبهت انه يمكن تجزئة مجموعة رؤوس أي بيان مستو الى أربعة مجموعات

جزئية غير خالية ومستقلة .

(3) اذا علمت ان عدد تلوين رؤوس بيان G لا يقل عن 5 ، فاثبت ان G يحتوي على بيان جزئي يكافئ توبولوجياً K_5 او $K_{3,3}$.

❁ (5 - 4) تلوين الحافات :

لقد كانت الغاية من دراسة تلوين الحافات الوصول الى حل غير مباشر لمسألة الالوان الاربعة ، كما سوف نلاحظ ذلك في مبرهنة تيت (P. Tait) ، التي تنص على تكافؤ تكهن الالوان الاربعة مع تكهن بخصوص تلوين الحافات للخرائط .
التكعيبية بما لا يزيد على ثلاثة الوان .

سنتفرض في هذا البند أن البيانات التي سنعالجها لا تحتوي على لفات . بصورة عامة ، يمكن ان تحتوي هذه البيانات على حافات مضاعفة .

يقصد بتلوين الحافات لبيان G تعيين الوان لحافات G بحيث أن كل حافتين متجاورتين لهما لونان مختلفان . ويقال أن G قابل التلوين k - للحافات اذا امكن تلوين حافته بما لا يزيد على k من الالوان المختلفة . واذا كان \bar{G} قابل التلوين k - للحافات ولكنه ليس قابل التلوين $(k-1)$ - للحافات ، فيقال ان عدد تلوين حافته G هو k ، ونرمز لهذا العدد بالرمز $\varepsilon(G)$.

واضح أنه اذا كان G قابل التلوين k - لحافات ، فانه يمكن تجزئة مجموعة حافات G الى k من المجموعات الجزئية غير الخالية والمستقلة (اي أن حافاتهما غير متجاورة بعضها مع بعض) .

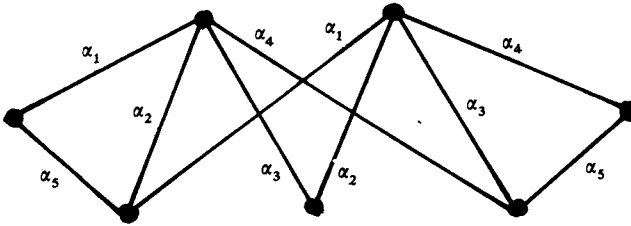
لقد أعطي في الشكل (5-9) بيان G قابل التلوين 5- للحافات ، ويمكن للقارئ أن يبين أن $\varepsilon(G) = 4$ ، وقد رمز للالوان بـ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.
واضح أن لكل رأس في البيان G ،

$$\varepsilon(G) \geq \rho(v).$$

وبذلك ، فان

$$\varepsilon(G) \geq p, \quad \dots (1-5)$$

حيث أن p هي الدرجة العليا لرؤوس G .



شكل (9-5)

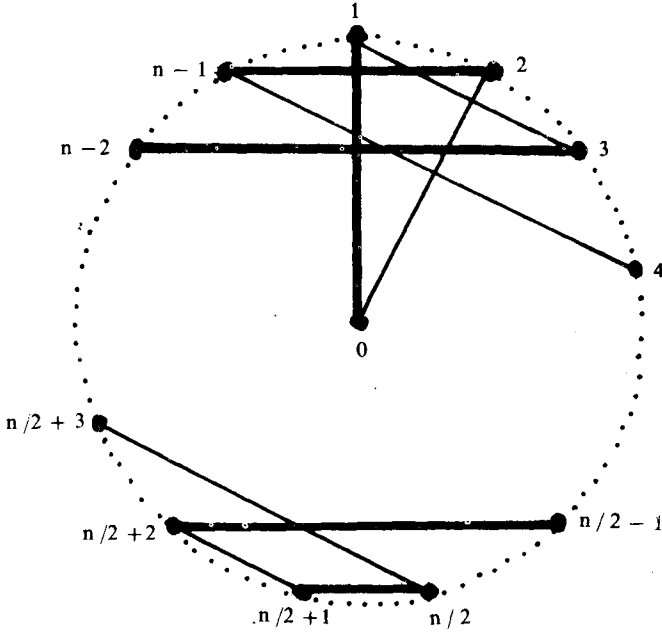
المبرهنتان الاتيتان تزودانا بعددي تلوين حافات البيانين $K_{m,n}$ ، K_n
مبرهنة (9-5) : عدد تلوين حافات البيان التام K_n هو

$$\varepsilon(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{عندما يكون } n \text{ زوجياً} \\ n, & \text{عندما يكون } n \text{ فردياً} \end{cases}$$

البرهان :

(أ) ليكن n عدداً زوجياً . أرمز لرؤوس K_n بالاعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ وضعها مرتبة كما في الشكل (5-10) بحيث أن البعد بين كل رأسين متتابعين على الدائرة ثابت . سنرمز للحافة التي تصل الرأس i بالرأس z بالزوج غير المرتب $[i, z]$.
 نعطي اللون الاول ، α_1 ، للحافات

$$[0,1], [2, n-1], [3, n-2], \dots, \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \right],$$



شكل (10-5)

وهي المرسومة بالخطوط السميكة في الشكل (10-5) ، وهذه تشكل المجموعة الجزئية المستقلة الاولى .

نضيف (بمعيار $n-1$) العدد 1 الى كل من أرقام الرؤوس ، ماعدا الصفر ، في المجموعة الجزئية المستقلة الاولى ، فنحصل على المجموعة الجزئية المستقلة الثانية ، وهي :

$$[0,2], [3,1], [4, n-1], \dots, [\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2],$$

وهي المرسومة بالخطوط الرفيعة في الشكل (10-5) ، ونعطي لهذه الحافات اللون α_2 واضح أننا نحصل على هذه الحافات من تدوير الحافات في المجموعة الجزئية الاولى حول الدائرة باتجاه حركة عقرب الساعة بزاوية مقدارها $2\pi / (n-1)$.

وهكذا ، من المجموعة الجزئية المستقلة الثانية نحصل على المجموعة الجزئية المستقلة الثالثة ، ونستمر في هذه العملية $(n-1)$ من المرات ، حتى نحصل على $(n-1)$ مسن المجموعات الجزئية المستقلة ، وفي كل منها $n/2$ من الحافات . وفي كل مرة ، يعين لون جديد لكل من الحافات في المجموعة الجزئية المستقلة التي تم الحصول عليها في تلك الخطوة . واضح أنه لا توجد حافات لونت مرتين ، والسبب هو أن الحافات في كل مجموعة جزئية مستقلة تصنع زاوية مع الاق تختلف عن الزاوية التي تصنعها الحافات في مجموعة جزئية مستقلة اخرى . ولما كان عدد حافات K_n هو $n(n-1)/2$ ، فإن كل حافة في K_n أعطيت لونا واحداً فقط . وبذلك ، فإن

$$\varepsilon(K_n) \leq n-1 .$$

وبما ان درجة كل رأس في K_n هو $(n-1)$ ، فإنه بموجب (1-5) ينتج ان

$$\varepsilon(K_n) = n-1 .$$

(ب) ليكن n عدداً فردياً . بموجب فرع (أ)

$$\varepsilon(K_{n+1}) = n .$$

وبإزالة رأس ما مع كافة الحافات الواقعة عليه من K_{n+1} نحصل على K_n وبذلك . فإنه بموجب (1-5)

$$n-1 \leq \zeta(K_n) \leq n .$$

ولكن . عدد الحافات في اية مجموعة جزئية مستقلة للبيان K_n لايزيد على $(n-1)/2$. عندما يكون n فردياً . لذلك . لايمكن ان يكون عدد تلوين الحافات $(n-1)$. والا أصبح عدد حافته K_n لايزيد على $(n-1)^2/2$. اذاً

$$\varepsilon(K_n) = n .$$

وبهذا يتم البرهان .

لاجل ان نستعرض عدد تلوين حافات بيان ثنائي التجزئة . نحتاج الى شرح سريع لموضوع التزاوج (اوالتوافق) التام (the complete matching) .

سنرمز للبيان الثنائي التجزئة الذي مجموعتا رؤوسه المستقلتان هما V_1 و V_2

$$G(V_1, V_2)$$

يعرف التزاوج التام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ بأنه تباین متقابل بين V_1 ومجموعة جزئية من V_2 بحيث ان الرؤوس المتقابلة متجاورة. واضح ان وجود تزاوج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ يعني وجود مجموعة مستقلة من الحافات $G(V_1, V_2)$ بحيث ان كل رأس في V_1 واقع على واحدة فقط من تلك الحافات في المجموعة المستقلة. بطبيعة الامر ، ان وجود تزاوج تام من V_1 الى V_2 يعني ان $|V_1| \leq |V_2|$ ، أي ان عدد رؤوس V_1 لايزيد على عدد رؤوس V_2 .

مبرهنة (5-10): يوجد تزاوج تام من V_1 الى V_2 في البيان الثنائي التجزئة البسيط $G(V_1, V_2)$ اذا واذا فقط

$$|A| \leq |\phi(A)| ,$$

لكل مجموعة جزئية A من V_1 ، حيث أن $\phi(A)$ مجموعة كل الرؤوس في V_2 التي يكون كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من الرؤوس في A .

البرهان :

واضح أن برهان الجزء الضروري مباشر . فاذا وجد تزاوج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ ، فان $|A| \leq |\phi(A)|$ لكل $A \subseteq V_1$. وذلك من تعريف التزاوج التام .

والان نبرهن على أن الشرط كافٍ وذلك باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي على عدد رؤوس V_1 . لنفرض أن $|V_1| = n_1$. المبرهنة صحيحة عندما $n_1 = 1$. نفرض أن الشرط كافٍ عندما يكون عدد رؤوس V_1 أقل من n_1 . ونبرهن على أنه كذلك عندما يكون عدد رؤوس V_1 هو n_1 . لأجل إثبات ذلك نلاحظ الحالتين الآتيتين :

(أ) عندما $|\phi(A)| \geq k + 1$ لكل مجموعة جزئية A مكونة من k من عناصر V_1 ، حيث أن $1 \leq k < n_1$. في هذه الحالة نأخذ أي رأس u_1 من V_1 مع أي رأس متجاوره u_2 من V_2 . البيان الثنائي التجزئة $G(V'_1, V'_2)$ الناتج من $G(V_1, V_2)$ بإزالة u_1 و u_2 مع كل الحافات الواقعة عليهما . يحقق شرط المبرهنة . لذلك . بموجب فرض الاستقراء الرياضي . يوجد تزاوج تام من V'_1 الى V'_2 في $G(V'_1, V'_2)$: الذي

يؤدي الى تزواج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ بعد إضافة التقابل $u_1 \leftrightarrow u_2$ اليه.

(ب) عندما توجد مجموعة جزئية A مكونة من k (حيث أن $k < n_1$) من عناصر V_1 بحيث أن $|\phi(A)| = k$. عندئذ ، يمكننا ايجاد تقابل متباين بين A و $\phi(A)$ بحيث أن كل رأس في A يقابل رأساً في $\phi(A)$ متجاوراً معه ، وذلك بموجب فرض الاستقراء الرياضي . ليكن $G(V_1'', V_2'')$ البيان الثنائي التجزئة الناتج من $G(V_1, V_2)$ بإزالة الرؤوس في كل من A و $\phi(A)$ مع كافة الحافات الواقعة عليها ، علماً أن $V_1'' = V_1 - A$ ، $V_2'' = V_2 - \phi(A)$. اذا كانت B أية مجموعة جزئية مكونة من h من عناصر V_1'' ، فان في البيان $G(V_1'', V_2'')$ يكون $|\phi(B)| \leq |B|$. لان خلاف ذلك يؤدي الى

$$|A \cup B| = h + k > |\phi(A)| + |\phi(B)| \geq |\phi(A \cup B)| \\ \geq |\phi(A \cup B)| .$$

وهو يناقض شرط المبرهنة المفروض صحيحاً في $G(V_1, V_2)$. وعليه . فان شرط المبرهنة يصبح على البيان الثنائي التجزئة $G(V_1'', V_2'')$. ولما كان عدد عناصر V_1'' هو $n_1 - k$. أي أقل من n_1 . فانه بموجب فرض الاستقراء الرياضي . يوجد تزواج تام من V_1'' الى V_2'' في $G(V_1'', V_2'')$: هذا التقابل المتباين مع التقابل المتباين من A الى $\phi(A)$ الذي سبق ذكره . ينتجان تزواجاً تاماً من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ وبهذا يتم البرهان . ■

يطلق على المبرهنة (5-40) «مبرهنة هول للزواج» (Hall's marriage theorem) وسنذكر في الفصلين السادس والسابع بعض استعمالات هذه المبرهنة في مواضيع اخرى في نظرية البيانات .

نتيجة (5-2) : اذا كان البيان الثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$ بسيطاً ومنتظماً بدرجة h . وأن $|V_1| = |V_2| = n$. فانه توجد في $G(V_1, V_2)$ مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة . في حقيقة الامر . كل رأس في $G(V_1, V_2)$ واقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة .

البرهان : لما كان $G(V_1, V_2)$ منتظماً بدرجة h ، فان لكل مجموعة جزئية A من رؤوس V_1 ، يكون مجموع درجات رؤوس A هو $h|A|$. اذا كانت $\phi(A)$ مجموعة الرؤوس في V_2 التي كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من رؤوس A ، فان

$$|\phi(A)| \geq h|A|/h = |A|,$$

لان درجي كل رأس هي h . وعليه ، فان $G(V_1, V_2)$ يحقق شرط المبرهنة (5-10) ، وبذلك يوجد تزاوج تام ، أي توجد مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة .

نتيجة (5-3) : اذا كان $G(V_1, V_2)$ بياناً ثنائي التجزئة ، وان p هي الدرجة العليا لرؤوسه ، فان هنالك مجموعة مستقلة من حافات $G(V_1, V_2)$ بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة من هذه الحافات .

البرهان مباشر وتركه للطالب كتمرين .

نحن الآن مهيوون لاثبات المبرهنة الآتية وهي التي تخص تلوين حافات البيانات الثنائية التجزئة .

مبرهنة (5-11) : اذا كان البيان الثنائي التجزئة G بسيطاً . وكانت p الدرجة العليا لرؤوسه ، فان

$$\varepsilon(G) = p.$$

البرهان : نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي على m . عدد حافات G .

واضح أن المبرهنة صحيحة اذا كان $m = 1$. ولنفرض انها صحيحة لكل بيان ثنائي التجزئة الذي عدد حافته أقل من m . ولناخذ البيان G الثنائي التجزئة الذي عدد رؤوسه m . بموجب النتيجة (5-3) . توجد مجموعة E من الحافات المستقلة بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة . ليكن G' البيان الثنائي التجزئة الناتج من G بإزالة كل حافات E . واضح أن $(p-1)$ هي الدرجة العليا لرؤوس G' . ولما كان عدد حافات G' هو $m - |E|$. فانه بموجب الاستقراء الرياضي .

يكون

$$\varepsilon(G') = p - 1.$$

وباعطاء لون جديد لكل من الحافات في المجموعة المستقلة نستنتج أن

$$\varepsilon(G) \leq p.$$

وهكذا ، بموجب (5-1) ، ينتج

$$\varepsilon(G) = p.$$

نتيجة (5-4)

$$\varepsilon(K_{m,n}) = \max\{m,n\}.$$

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (5-11) .

ملاحظة : المبرهنة (5-11) صحيحة أيضاً عندما يكون البيان الثنائي التجزئة G

مضعفاً . (انظر المصدر [2] .)

المبرهنة الآتية تعطينا أدق قيدين لعدد تلوين حافات بيان كفي .

مبرهنة (5-12) : - (تعود الى Vizing ، سنة 1964) - اذا كان G بياناً بدون

لفات ، وكانت p الدرجة العليا لرؤوس G ، فان

$$p \leq \varepsilon(G) \leq p + \pi, \quad \dots (5-2)$$

حيث إن

$$\pi = \max_{v,u \in V(G)} \pi(v,u)$$

وان $\pi(v,u)$ هو عدد الحافات التي تصل الرأسين v و u .

البرهان مطول بعض الشيء ويعتمد على نتائج لم تعط في هذا الكتاب ، ويمكن

للقارئ الاطلاع عليه في المصدر [11] .

واضح انه اذا كان G بسيطاً ، فان $\pi = 1$ ، وعند ذلك ينتج

$$p \leq \varepsilon(G) \leq p + 1. \quad \dots (5-3)$$

قبل أن يتم اثبات مبرهنة الالوان الاربعة للخرائط المستوية ، برهن المختصون في

نظرية البيانات العديد من العبارات المكافئة لمسألة الالوان الاربعة ، ومنها البرهنة :

« نكهن الالوان الاربعة للخرائط المستوية تكون صحيحة اذا واذا فقط $\varepsilon(G) = 3$ لكل خارطة مستوية تكعيبيية G . »

وبعد ان تم اثبات أن كل خارطة مستوية تكون قابلة للتلوين - 4 للاوجه ، أصبح من غير الضروري دراسة تلك العبارات المكافئة لقضية الالوان الاربعة . ولكن ، قد يكون مفيداً أحياناً ذكر بعضها بصيغة جديدة على ضوء مبرهنة الالوان الاربعة . فمثلاً ، المبرهنة المذكورة اعلاه نصوغ المبرهنة الاتية :

مبرهنة (5-13) : لكل خارطة مستوية تكعيبيية ، G ، يكون $\varepsilon(G) = 3$

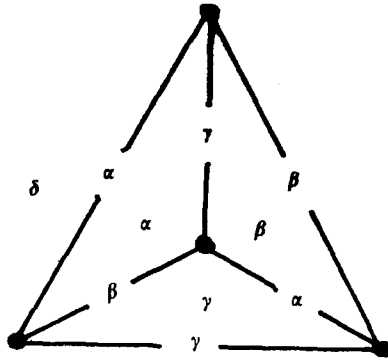
البرهان : لما كانت G خارطة مستوية ، فان G قابلة للتلوين - 4 للاوجه .
دعنا نعتبر عن الالوان الاربعة للاوجه بازواج مرتبة كالآتي :

$$\alpha = (1,0), \beta = (0,1), \gamma = (1,1), \delta = (0,0).$$

اذا كانت e حافة مشتركة بين تخميين وجهين احدهما بلون $\bar{\beta}$ والاخر بلون γ ، فاننا نعطي لـ e اللون $\beta + \gamma$ (معيار 2) ، أي α . وهكذا بالنسبة لكافة حافات G . ونظراً لعدم وجود برازخ في G ، فان الالوان التي سوف تستخدم لتلوين الحافات بهذه الطريقة هي α, β, γ ، كما موضح في الجدول الاتي :

+	α	β	γ	δ
α	-	γ	β	α
β	γ	-	α	β
γ	β	α	-	γ
δ	α	β	γ	-

بما أن G تكعيبيي ، فانه عند كل رأس توجد ثلاثة أوجه متجاورة مثني مثني ، وعليه كل حافتين متجاورتين تقعان سوية على تخم وجه واحد فقط [انظر الشكل (5-11)] وهكذا لا يمكن أن تأخذ حافتان متجاورتان نفس اللون بهذه الطريقة . وبهذا يتم البرهان ■



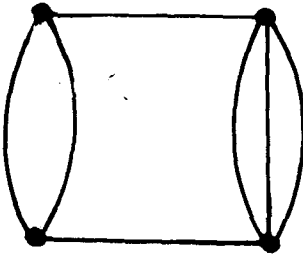
شكل (5-11)

تمارين (5-4)

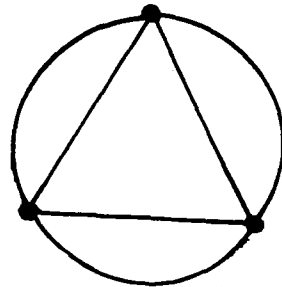
(1) احسب عدد تولين حافات البيان المعطى في الشكل (5-5) ، وكذلك بيان بيترسن .

(2) جد عدد تولين حافات كل من البيانين في الشكل (5-12) . ماذا تستنتج بالنسبة للعلاقة (5-2) ؟

(3) في مدرسة ما ، يجري امتحان شفهي في نهاية كل عام دراسي . اذا علمت ان كل صف يُمتحن من قبل مُدرّسه . كيف يمكن برمجة الامتحانات بحيث تنتهي الامتحانات بأقل عدد من الايام ، علماً بأن كل صف لا يُمتحن في أكثر من مادة واحدة في اليوم ، كما ان كل مدرس لا يُمتحن أكثر من مادة واحدة في اليوم . [تلميح : كَوْن بياناً ثنائي التجزئة وجد عدد تولين حافته .]



G_1



G_2

شكل (5-12)

(4) اثبت أن

$$\varepsilon(G) = \chi(I(G)),$$

حيث ان $I(G)$ هويان المناقلة للبيان G .

(5) جد كل البيانات التي عدد تلوين حافاتهما هو 2.

(6) ليكن G أي بيان نحصل عليه من K_{2n+1} بازالة ما لايزيد على $(n-1)$ من الحافات ، اثبت ان

$$\varepsilon(G) = 2n + 1.$$

(7) برهن النتيجة (3-5). [تلميح : اثبت ان هنالك بيانا ثنائي التجزئة بسيطا

منتظماً بدرجة p ويحتوي على $G(V_1, V_2)$ كبيان جزئي .]

(8) يقال لبيان مضاعف G انه حلقة (ring) اذا كانت عملية ابدال كل حافة

مضاعفة بحافة بسيطة واحدة فقط تختزل G الى دائرة بسيطة . ويقال للحلقة انها

زوجية (فردية) اذا كان طول الدائرة البسيطة التي تُختزل اليها الحلقة زوجيا (فرديا)-

اذا كانت p الدرجة العليا لرؤوس حلقة R ، فاثبت ان $\varepsilon(R) = p$ لكل

حلقة زوجية R .

(9) ليكن G بيانا مضاعفا بدون لفات ، الدرجة العليا لرؤوسه هي 3

اثبت ان $\varepsilon(G)$ هو 3 أو 4.

(5 - 5) حدوديات التلوين

سبق ان درسنا في البنود السابقة ثلاثة أنواع من تلوينات البيانات ، وكنا نبحت عن

تلوين لبيان بعدد معين من الالوان . وقد يكون من الطبيعي ان ندرس عدد الطرق لتلوين

بيان مابعدد معين من الالوان . وسوف نركز في هذا البند على تلوين الرؤوس فقط ،

ولهذا فسوف نفترض أن البيانات موضوعة هذه الدراسة هي بيانات بسيطة موسومة .

لقد درست حدوديات التلوين لأول مرة من قبل بيركوف (G. Birkhoff)

سنة 1912 في محاولة للوصول الى حل لتكهن الالوان الاربعة .

ليكن G بيانا بسيطا موسوماً . يقال لتلوينين c_1 و c_2 لرؤوس G ب λ من الالوان

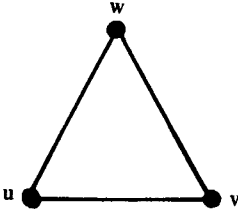
انهما مختلفان اذا وجد في G رأس موسوم أعطي لون في التلوين c_1 يختلف عما أعطي

له في التلوين c_2

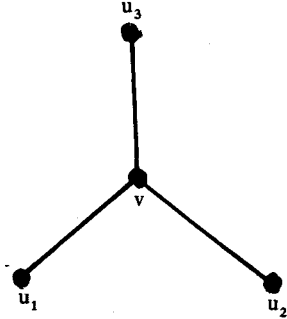
نعرف دالة تلوين بيان G ، التي نرمز لها $P(G; \lambda)$ ، بأنها عدد التلوينات المختلفة لرؤوس G بـ λ من الالوان. طبيعي ان في كل تلوين للرؤوس ، أي رأسين متجاورين يلوانان بلونين مختلفين ، كما سبق ان شرحناه في البند (5-1) .

واضح أن $P(G; \lambda) = 0$ اذا كان $\chi(G) > \lambda$ ؛ كما أن $\chi(G)$ هو أصغر قيمة صحيحة موجبة لـ λ بحيث ان $P(G; \lambda) > 0$. وعليه ، فان مبرهنة الالوان الاربعة تؤكد أن $P(G; 4) > 0$ لكل بيان مستوٍ G خالٍ من اللفات .

ولاجل توضيح مفهوم دالة التلوين ، نأمل البيان التام K_3 الموسوم والمبين في الشكل (5-13) . يمكن تلوين الرأس u بأي من الالوان λ . وعندما يعين لون لـ u ، يمكننا تلوين الرأس v بأي من الالوان الباقية التي عددها $(\lambda - 1)$. وهكذا يمكن تلوين الرأس w بأي من الالوان $(\lambda - 2)$. وعلمين ، يمكن تلوين رؤوس K_3 بـ $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ من التلوينات المختلفة . أي أن

$$P(K_3; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$


شكل (5-13)



شكل (5-14)

باتباع نفس الطريقة التي استخدمت لايجاد $P(K_3; \lambda)$ نحصل على

$$P(K_n; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1).$$

اذا كان K_n البيان المكون من n من الرؤوس المنعزلة ، فان كل رأس يلون بأي من الالوان التي عددها λ ، ولذلك فان

$$P(\bar{K}_n; \lambda) = \lambda^n.$$

ومثال توضيحي آخر ، تأمل الشجرة T المبينة في الشكل (5-14) ، تجد أنه يمكن تلوين الرأس v بأي من الالوان التي عددها λ ؛ وبعدها يمكن تلوين أي من الرؤوس الثلاثة الاخرى بأي من الالوان الباقية التي عددها $(\lambda - 1)$. وعليه ، فان عدد التلوينات المختلفة لهذه الشجرة هو

$$P(T; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3.$$

في حقيقة الامر ، هذه هي صيغة عامة لكل الاشجار ، كما مبين في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (5-14) : اذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n ، فان

$$P(T; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n . واضح أن المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس 1 أو 2 . لنفرض انها صحيحة لكل الاشجار التي عدد رؤوسها أقل من n ، ونأخذ T التي عدد رؤوسها n . معروف أن T تحتوي على رأس ، u ، درجته 1 . لتكن T' الشجرة الناتجة من T بإزالة u مع الحافة الواقعة عليه . بموجب فرض الاستقراء الرياضي

$$P(T'; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-2}$$

لكل تلوين لرؤوس T' ، يمكن تلوين الرأس u بـ $(\lambda - 1)$ من التلوينات المختلفة ، لان u متجاور مع رأس واحد فقط من رؤوس T' . لذلك ، فان

$$P(T; \lambda) = (\lambda - 1) \cdot P(T'; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

وبهذا يتم البرهان . ■

مما تقدم من شرح ومن المبرهنة (5-14) ، نلاحظ أن دالة تلوين البيان التام K_n ، ولاي شجرة ، هي حدودية من الدرجة n بـ λ ؛ وهذا ما سنبرهنه بصورة عامة على كل بيان G . ولكن قبل هذا ، نبدأ بالمبرهنة المساعدة الآتية .

مبرهنة (5-15) : ليكن G بياناً بسيطاً فيه الرأسان u و v غيرمتجاورين . ليكن G_1 البيان الناتج من G بوصل u و v بحافة ، وليكن G_2 البيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v ، مع ابدال كل حافة مضاعفة ناتجة بحافة بسيطة . عندئذ

$$P(G; \lambda) = P(G_1; \lambda) + P(G_2; \lambda).$$

البرهان : في أي تلوين مقبول لرؤوس G ، إما أن يكون الرأسان u و v بنفس اللون

أويكونان بلونين مختلفين . عدد التلوينات المختلفة لـ G التي فيها الرأسان u و v بلونين مختلفين هونفس عدد التلوينات للبيان G_1 . كما أن عدد التلوينات المختلفة لـ G التي فيها الرأسان u و v بنفس اللون هونفس عدد التلوينات لـ G_2 . وبهذا يتم البرهان .

يمكن تطبيق هذه المبرهنة على أي بيان G غير تام ، فنحصل منه على بيانين G_1 و G_2 بحيث أن دالة تلوين البيان G تساوي مجموع دالتي تلوين G_1 و G_2 . فإذا كان G_1 أو G_2 غير تام ، نعيد تطبيق المبرهنة مرة أخرى على G_1 أو G_2 . وهكذا نستمر حتى نحصل في الاخير على بيانات تامة مجموع دوال التلوين لها يساوي دالة تلوين البيان G . ولما كانت دالة التلوين لأي بيان تام ، K_r ، هي حدودية بدرجة r ، فإن $P(G; \lambda)$ هي حدودية . وهكذا نحصل على النتيجة الآتية .

نتيجة (5-5) : دالة التلوين ، $P(G; \lambda)$ ، لبيان G هي حدودية بـ λ .

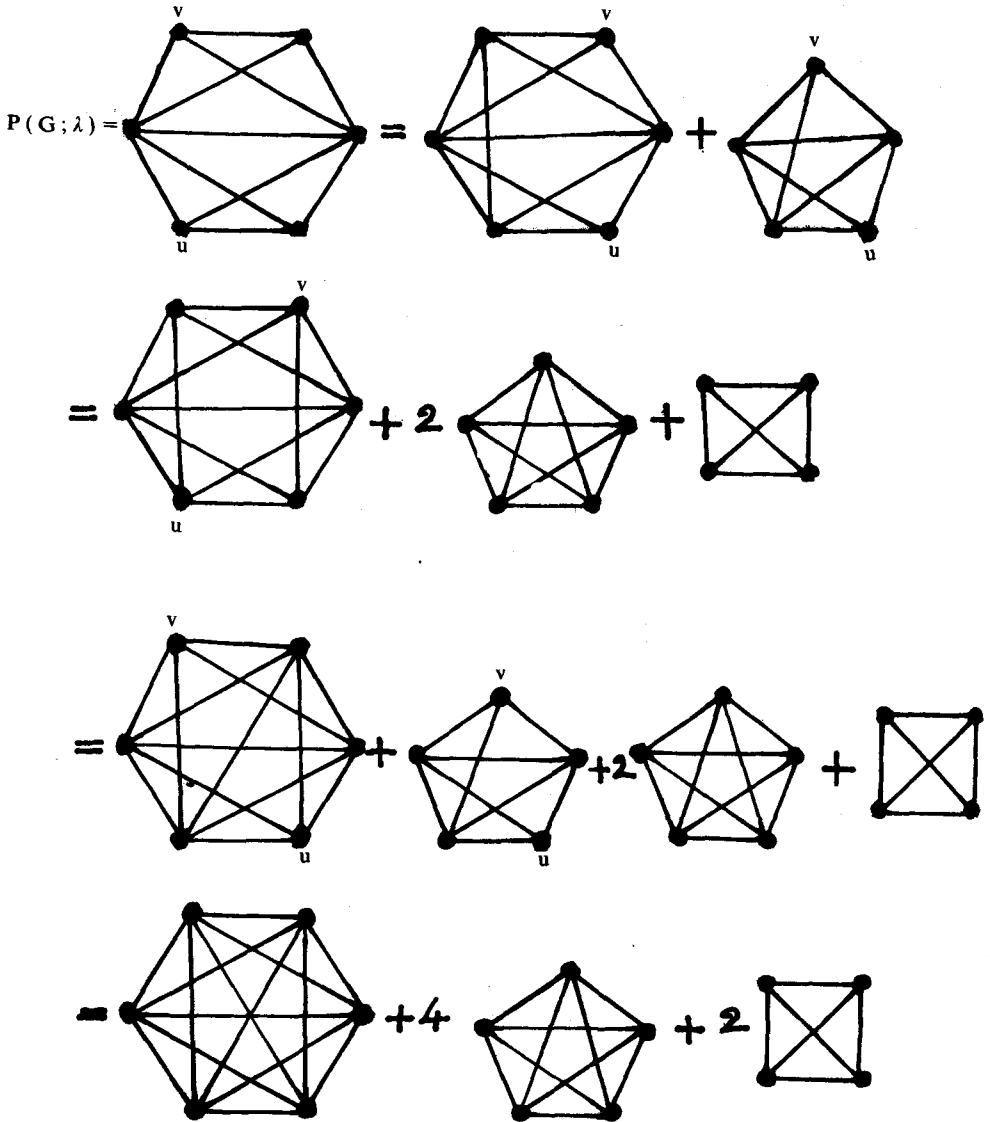
وبناء على ذلك ، سنطلق على $P(G; \lambda)$ حدودية تلوين البيان G .

ولاجل توضيح كيفية استعمال المبرهنة (5-5) لايجاد $P(G; \lambda)$ لبيان معلوم G ، نتبع وسيلة زيكوف (Zykov) التي يستعمل فيها البيان كمثل لحدودية التلوين له بـ λ من الالوان . سنؤشر على الرأسين غير المتجاورين المعينين في كل خطوة بـ u و v . ولقد ذكرنا في الشكل (5-5) خطوات ايجاد حدودية تلوين البيان G بدلالة حدوديات تلوين بيانات تامة . ومنها نحصل على

$$\begin{aligned} P(G; \lambda) &= P(K_6; \lambda) + 4P(K_5; \lambda) + 2P(K_4; \lambda) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)[(\lambda-4)(\lambda-5) + 4(\lambda-4) + 2] \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= \lambda^6 - 11\lambda^5 + 47\lambda^4 - 97\lambda^3 + 96\lambda^2 - 36\lambda . \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا البيان G هو بيان مستوي يحتوي على K_4 كبيان جزئي ، لذلك فإن $\chi(G) = 4$ ويتفق هذا مع الناتج الذي نحصل عليه من $P(G; \lambda)$ عندما نعوض $\lambda = 4$ ، حيث نجد أن $P(G; 4) = 48$.

وبذلك ، فان هنالك 48 طريقة مختلفة لتلوين رؤوس G بأربعة الوان .



شكل (5-15) ايجاد حدودية لونية

لحدوديات التلوين خواص عديدة ، محض منها بسيط وينتج مباشرة من المبرهنة (5-15) . المبرهنة الآتية تتضمن بعض هذه الخواص .

مبرهنة (5-16) : إذا كان G بيانا بسيطا عدد رؤوسه n ، وعدد حافته m ، وتتكون من المركبات G_1, G_2, \dots, G_k . فإن حدودية التلوين $P(G; \lambda)$ تحقق الخواص

التالية

(أ) درجة $P(G; \lambda)$ هي n

(ب) معامل λ^n هو 1

(ج) معامل λ^0 هو صفر ؛

(د) معامل λ^{n-1} هو $-m$ ؛

(هـ)

$$P(G; \lambda) = P(G_1; \lambda) \cdot P(G_2; \lambda) \dots P(G_k; \lambda)$$

البرهان : في برهان المبرهنة (5-15) لاحظنا انه يمكننا كتابة $P(G; \lambda)$ كمجموع حدوديات تلوين بيانات تامة عدد رؤوس كل منها لايزيد على n . وان أحدها هو K_n الذي يظهر في ذلك المجموع مرة واحدة فقط . من ذلك نستنتج صحة الخواص (أ) و (ب) و (ج) . لاثبات الخاصية (د) نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على m . فاذا كان $m = 1$ فان

$$P(G; \lambda) = \lambda^{n-1} (\lambda - 1) .$$

وبذلك يكون معامل λ^{n-1} مساويا ل -1 .

والآن نفرض ان هذه الخاصية صحيحة لكل بيان G عدد حافته لايزيد على $(m - 1)$ لنكن $[u, v]$ حافة في البيان G الذي عدد حافته m . وليكن G' البيان الناتج من G بإزالة الحافة $[u, v]$ وليكن G'' البيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v . عندئذ نحصل . بموجب المبرهنة (5-15) . على

$$P(G; \lambda) = P(G'; \lambda) - P(G''; \lambda).$$

بما أن عدد حافات G' هو $m-1$ وعدد رؤوسه هو n ، فإنه بموجب فرض الاستقراء الرياضي ، يكون معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G'; \lambda)$ مساوياً لـ $(m-1) -$ ؛ وبما أن عدد رؤوس G'' هو $(n-1)$ ، فإن معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G''; \lambda)$ هو 1 [بموجب الخاصية (ب)] . إذاً ، معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G; \lambda)$ هو $(-m)$. وهكذا ، تكون الخاصية (د) صحيحة دائماً .

واضح ان كل مركبة من مركبات G يمكن تلويها بانفصال عن المركبات الاخرى ، ولهذا فان عدد طرق تلوي G يساوي حاصل ضرب اعداد طرق تلوي المركبات G_1, G_2, \dots, G_k ، وبهذا ، فان الخاصية (هـ) صحيحة ايضا .

المبرهنة الآتية تعطينا خاصية أخرى لمعاملات حدوديات التلوي .

مبرهنة (5-17) : معاملات حدود $P(G; \lambda)$ تكون غير سالبة وغير موجبة بالتناوب .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على كل من عدد الرؤوس وعدد الحافات . فإذا كان عدد الرؤوس 1 ، فإن $P(G; \lambda) = \lambda$ ، وإذا كان عدد الرؤوس 2 . فإن $P(G; \lambda) = \lambda^2$ عندما يكون عدد الحافات صفراً . و $P(G; \lambda) = \lambda^2 - \lambda$ عندما يكون عدد الحافات 1 . وهكذا فان المبرهنة صحيحة اذا كان عدد الرؤوس 1 أو 2 . ولنفرض أنها صحيحة لكل البيانات التي عدد رؤوسها أقل من n . ولناخذ G الذي عدد رؤوسه n

واضح انه اذا كان عدد حافات G هو 1 . فان المبرهنة صحيحة . فاذا كانت المبرهنة صحيحة لكل البيانات التي عدد رؤوسها n وعدد حافاتهما تقل عن m فسنبهن على انها صحيحة أيضاً لكل بيان G الذي عدد رؤوسه n وعدد حافاتهما m . اذا كان u و v رأسين متجاورين في G . فلنرمز بـ G' للبيان الناتج من G بإزالة $[u, v]$. ونرمز بـ G'' للبيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v . بموجب المبرهنة (5-15) . يكون لدينا

$$P(G; \lambda) = P(G'; \lambda) - P(G''; \lambda).$$

لما كنا قد افترضنا صحة المبرهنة لكل البيانات التي عدد رؤوسها n وعدد حافاتها أقل من m فإنه توجد اعداد صحيحة غير سالبة

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \quad \text{بحيث ان}$$

$$P(G'; \lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda.$$

، إضافة الى ذلك ، فقد افترضنا صحة المبرهنة لكل البيانات التي عدد رؤوسها أقل من n ، ولذلك توجد اعداد صحيحة غير سالبة b_1, b_2, \dots, b_{n-2} بحيث ان

$$P(G''; \lambda) = \lambda^{n-1} - b_1 \lambda^{n-2} + b_2 \lambda^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} b_{n-2} \lambda.$$

وهكذا . نحصل على

$$P(G; \lambda) = \lambda^n - (a_1 + 1) \lambda^{n-1} + (a_2 + b_1) \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-2}) \lambda.$$

وعليه . فان معاملات حدود $P(G; \lambda)$ تكون غير سالبة وغير موجبة بالتناوب .

ملاحظة : لاحظ ان المبرهنتين (5-16) و (5-17) لا تعطيان وصفا كاملاً لحدوديات التلوين . [انظر التمرين (7) من مجموعة تمارين (5-5)] .

المبرهنة التالية تزودنا بمعلومات أكثر عن معاملات حدوديات التلوين .

مبرهنة (5-18) : لكل بيان متصل بسيط G يكون معامل λ في الحدودية $P(G; \lambda)$ غير صفري .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس .

واضح ان المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس 1 او 2. حيث ان $P(G; \lambda) = \lambda^2 - \lambda$ او λ . ولذلك نفرض أنها صحيحة لكل بيان متصل بسيط الذي عدد رؤوسه أقل من n . ونأخذ البيان المتصل البسيط G الذي عدد رؤوسه n .

إذا كان G خاليا من الدارات . أي انه شجرة . فعندئذ تكون المبرهنة صحيحة بموجب المبرهنة (5-14) : وفيما عدا ذلك . نفرض ان هنالك حافة $[u, v]$ ليست برزخاً في G . نعرف G' و G'' كما في المبرهنة السابقة (5-17) . فيكون لدينا

$$P(G; \lambda) = P(G'; \lambda) - P(G''; \lambda).$$

وبموجب المبرهنة (5-17)، توجد اعداد صحيحة a_1, a_2, \dots, a_{n-1} و b_1, b_2, \dots, b_{n-2} غير سالبة بحيث ان

$$P(G'; \lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda,$$

$$P(G''; \lambda) = \lambda^{n-1} - b_1 \lambda^{n-2} + b_2 \lambda^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} b_{n-2} \lambda.$$

وعليه، فان معامل λ في الحدودية $P(G; \lambda)$ هو $(-1)^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-2})$ ولما كان $a_{n-1} \geq 0$ و $b_{n-2} > 0$ بموجب فرض الاستقراء الرياضي، فان $(a_{n-1} + b_{n-2}) > 0$ ، وبهذا يتم البرهان.

نتيجة (5-6): اذا كان G بياناً بسيطاً، فان اصغر قوة لـ λ بمعامل غير صفري في حدودية التلوين $P(G; \lambda)$ ، تساوي عدد مركبات G .

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (5-18) ومن فرع (هـ) من المبرهنة (5-16).

يمكن ان نبرعن $P(G; \lambda)$ بصيغة أخرى باتباع الطريقة التي تعود الى بيركوف وهي التي نشرحها فيما يلي باختصار.

لنفرض أننا أعطينا الواناً للرووس بدون التقيد بشرط إختلاف لوني كل رأسين متجاورين؛ واضح انه يمكن اجراء ذلك بـ λ^n من الطرق المختلفة. لرمز بـ $\mu(e)$ لعدد التلوينات (بهذا الاسلوب) للبيان G التي فيها الحافة e تصل بين رأسين بنفس اللون. وبصورة عامة، نرمز بـ

$$\mu(H) = \mu(e_1, e_2, \dots, e_s)$$

لعدد تلوينات G التي فيها رأسي كل من الحافات e_1, e_2, \dots, e_s للبيان الجزئي H بنفس اللون.

من المبادئ المعروفة في نظرية المجموعات . يكون لدينا

$$P(G; \lambda) = \lambda^n - \sum_i \mu(e_i) + \sum_{i,j} \mu(e_i, e_j) - \dots \dots (4-5)$$

حيث ان المجموع الاول يشمل كل الاختيارات لحافة واحدة e_i والمجموع الثاني يشمل كل الاختيارات لحافتين مختلفتين e_i, e_j . وهكذا.

لتفرض ان H_1, H_2, \dots, H_c هي مركبات البيان الجزئي H الذي رؤوسه هي كل مجموعة رؤوس G . عندما يكون رأسا كل حافة في H بنفس اللون، فان كل الرؤوس في H_l ، حيث $l = 1, 2, \dots, c(H)$ ، يجب ان تكون بنفس اللون. وعليه فان

$$\mu(H) = \lambda^{c(H)}.$$

وهكذا، بالتعويض في (5-4)، نحصل على الصيغة

$$P(G; \lambda) = \sum_{s,c} (-1)^s N(s, c) \lambda^c, \quad \dots (5-5)$$

حيث ان $N(s, c)$ هو عدد البيانات الجزئية H للبيان G التي عدد حافاتها s وعدد مركباتها c ، وعدد رؤوس كل H هو n . وطبيعي أن هذه الصيغة قليلة الفائدة في ايجاد $P(G; \lambda)$ لبيان معلوم G ، ولكنها تفيد في دراسة بعض خواص $P(G; \lambda)$. ولمعرفة المزيد في هذا الموضوع يمكن الاطلاع على المصدر [12].

تمارين (5-5)

(1) جد حدوديات تلوين البيانات الافلاطونية [شكل (1-25)].

(2) اذا كانت C_n دائرة بسيطة طولها n ، فاثبت أن

$$P(C_n; \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n (\lambda - 1)$$

[تلميح: استعمل الاستقراء الرياضي مع المبرهنتين (5-14) و (5-15)].

(3) اذا كان G بيانا عدد رؤوسه n وحدودية تلوينة هي

$$P(G; \lambda) = \lambda (\lambda - 1)^{n-1}$$

فاثبت ان G شجرة. [تلميح: استعمل المبرهنة (5-16) لاثبات أن G

متصل وعدد حافاته $(n-1)$.]

(4) اثبت النتيجة (5-6) .

(5) اذا كانت v نقطة مفصل في البيان G ، وكانت H_1, H_2, \dots, H_k قطع G نسبة الى v ، فاثبت أن

$$P(G; \lambda) = \lambda^{1-k} P(H_1; \lambda) \cdot P(H_2; \lambda) \dots P(H_k; \lambda).$$

[تلميح : عندما يكون الرأس v باحد الالوان (التي عددها λ) يكون عدد طرق تلوين بقية رؤوس H_i بـ λ من الالوان هو $[P(H_i; \lambda)/\lambda]$ (6) ليكن e برزخاً في بيان متصل G . اذا كانت H_1 و H_2 مركبتي البيان الناتج من G بازالة e ، فاثبت ان

$$P(G; \lambda) = (1 - \frac{1}{\lambda}) P(H_1; \lambda) \cdot P(H_2; \lambda).$$

[تلميح : استعمل المبرهنة (5-15) وتمرين (5) أعلاه .]
(7) الحدودية $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2$ تحقق الخواص الواردة في المبرهنتين (5-16) و (5-17)، اثبت انها ليست حدودية تلوين أي بيان بسيط .
(8) اثبت أن

$$P(K_{n,1}; \lambda) = P(K_1; \lambda) \cdot (\lambda - 1)^n;$$

$$P(K_{n,2}; \lambda) = P(K_1; \lambda) \cdot (\lambda - 1)^n + P(K_2; \lambda) (\lambda - 2)^n$$

$$P(K_{n,3}; \lambda) = P(K_1; \lambda) (\lambda - 1)^n + 3 P(K_2; \lambda) (\lambda - 2)^n + P(K_3; \lambda) (\lambda - 3)^n.$$

هل يمكن تعميم هذه للحصول على صيغة لـ $P(K_{n,m}; \lambda)$ ؟

الفصل السادس

تطبيقات متنوعة لنظرية البيانات

ان دراسة نظرية البيانات بدون التعرف على بعض استخداماتها تعتبر دراسة ناقصة ولقد ذكرنا في بعض البنود التي سبق شرحها في هذا الكتاب تطبيقات متعلقة مباشرة بمواد تلك البنود. ونضيف في هذا الفصل تطبيقات اخرى غير مباشرة . فهي تحتاج الى المزيد من مواد نظرية البيانات المتعلقة بذلك الموضوع من التطبيقات .

في حالات معينة ، يكون استخدام المفاهيم والنتائج البسيطة عن البيانات . عندما يحسن اختيارها ، اداة فعالة واسلوباً مناسباً . تكون نظرية البيانات مفيدة في التعبير عن تلك القضايا بشكل رياضي واضح بحيث نستطيع تفسير نتائجها بدقة اكثر . هذا ، وفي مسائل اخرى ، قد نحتاج الى مفاهيم ومواضيع اكثر تعقيداً .

لقد أخذت بعض نتائج ومفاهيم نظرية البيانات طريقها للتطبيق في المعامل . كما هي الحالة في موضوع «وسيلة تقييم ومراجعة البرامج» المعروف بـ PERT

يتضمن هذا الفصل القليل من استخدامات نظرية البيانات . والهدف منه هو اعطاء القارئ فكرة عن اهمية هذا الموضوع ومجالات استخداماته . وفي واقع الامر . فان تطبيقات نظرية البيانات كثيرة جداً ومتنوعة بشكل يصعب حصرها في فصل واحد . فقد يحتاج بعضها الى فصول عديدة . بل ان للبعض منها كتباً . كما هي الحالة في شبكات السيول . وفي تحليل الشبكات الكهربائية . وعليه فان شرحنا لهذه التطبيقات سيكون مختصراً جداً ومقتصرأ على الحالات المبسطة .

(6 - 1) تقليل حوادث التقاطعات في المعامل

في بعض المعامل الكبيرة . توجد خطوط سكك نقل داخلي من مواقع الى مواقع اخرى . وقد تتقاطع تلك الخطوط مع بعضها . هذه التقاطعات تسبب الكثير من الحوادث كما انها تؤخر عملية النقل . وقد تؤدي في بعض الاحيان الى انقلاب عربات النقل . ومن

أوضح الامثلة على ذلك معامل صنع الآجر فلوفرضنا ان لدينا m من أفران تحميلص الآجر ، وان هنالك n من أرضفة التحميل ، حيث توجد الشاحنات لنقل الآجر الى خارج المعمل ؛ وفرض ان كل فرن يتصل بخط حديدي مع كل رصيف ، فان هنالك تقاطعات بين هذه الخطوط . والمطلوب انشاء خطوط المواصلات الداخلية هذه وتعيين مواقع الافران وأرضفة التحميل بحيث يكون عدد نقاط تقاطع الخطوط الحديدية أقل ما يمكن ، لأجل تقليل حوادث الاصطدام بينها ، وتقليل حوادث انقلاب العربات أو تأخرها عند مرورها بنقاط التقاطع .

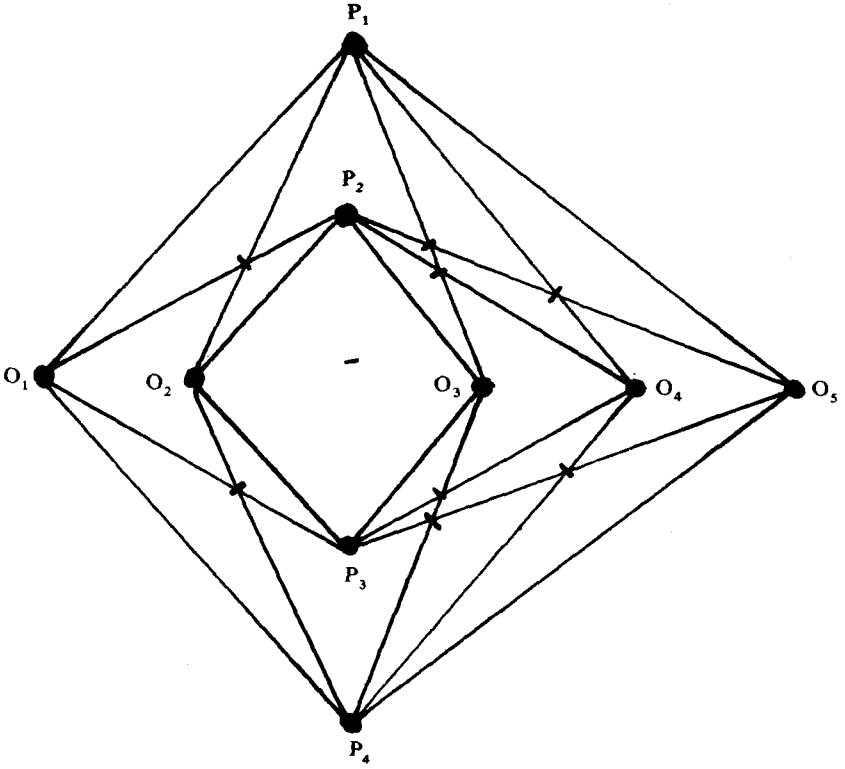
يمكن حل هذه المسألة ضمن اطار نظرية البيانات ؛ حيث تُمثّل الافران برؤوس O_1, O_2, \dots, O_m ، وتُمثّل أرضفة التحميل برؤوس أخرى P_1, P_2, \dots, P_n ، وتُمثّل خطوط السكك الحديدية بحافات ، وبما اننا افترضنا (لتسهيل الامور) أن كل فرن يتصل مع كل رصيف بخط حديدي واحد ، فان كل O_i يتصل بحافة واحدة فقط مع كل P_j . وهكذا ، فان البيان الذي يمثل هذه المسألة ثنائي التجزئة تام $K_{m,n}$. وعليه ، بموجب البرهنة (4 - 14) ، فان أقل عدد من التقاطعات هو

$$\gamma(K_{m,n}) = \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & m = 2r \text{ و } n = 2s & \text{عندما} \\ (r^2 - r)s^2, & m = 2r, n = 2s + 1 & \text{عندما} \\ r^2(s^2 - s), & m = 2r + 1, n = s & \text{عندما} \\ r^2s^2, & m = 2r + 1, n = s + 1 & \text{عندما} \end{cases}$$

كما ان انشاء هذا البيان بالعدد الاصغر من التقاطعات قد شرح في البرهنة (4 - 14) . فاذا كانت لدينا خمسة افران O_1, \dots, O_5 مع أربعة أرضفة تحميل P_1, \dots, P_4 ، فان تصميم المواقع المؤدي الى أقل عدد من التقاطعات يكون كما هو مبين في الشكل (6 - 1) . نلاحظ ان لدينا 8 تقاطعات وفقا للصيغة المذكورة أعلاه .

تمارين (6 - 1)

(1) ارسم الاتصالات في داخل معمل آجريحتوي على 5 أفران و3 أرضفة تحميل بحيث ان عدد التقاطعات أقل ما يمكن . هل توجد بيانات أخرى بأقل عدد من التقاطعات عندما يُستغنى عن بعض الاتصالات ؟



شكل (1-6)

- (2) ارسم الاتصالات في داخل معمل آجربحتوي على 6 أفران و 4 أرضفة تحميل بحيث ان عدد التقاطعات أقل ما يمكن . ما هو أقل عدد من التقاطعات عندما يستغنى عن اتصال واحد فقط ؟
- (3) يراد انشاء معمل يتكون من خمس وحدات متفرقة . فاذا علمت ان طبيعة العمل في هذه الوحدات يتطلب وصل كل وحدتين بخط حديدي (لا يشترط ان يكون مستقيما) . فبين كيفية وصل الوحدات ببعضها بحيث تقلل عدد التقاطعات الى الحد الادنى .
- (4) اعد التمرين (3) لمعمل يتكون من 6 وحدات .

(6 - 2) إستعمال التطابق الشجري في الكيمياء العضوية

نشرح في هذا البند طريقة ادmondز (J. Edmonds) في تطابق (indentification) شجرتين . طريقة ادmondز هي طريقة جيدة ، أي ان مقدار العمل اللازم لتنفيذ الطريقة يتزايد جبرياً (وليس أسياً) مع تزايد عدد حافات البيان .

من ناحية عملية ، فان تطابق البيانات أو البيانات الجزئية ذو أهمية كبيرة في الكيمياء العضوية ، حيث يمثل الجزيء كيان رؤوسه تمثل الذرات وحافته تمثل الأواصر (bonds) بين ذرات الجزيء . في حقيقة الامر ، وجود ذرات مختلفة في الجزيء لا يؤدي الى تعقيدات اضافية في مسألة التطابق هذه .

ان أهمية التطابق في الكيمياء العضوية تتعدى معرفة فيما اذا كان تركيبان كيميائيان هما تركيب واحد او ان أحدهما جزء من الآخر . فالعلماء المختصون يريدون عمل فهرس (cataloging) للمواد الكيميائية بحيث يمكن مباشرة معرفة موقع أية مادة في الفهرس ، وربما اضافة مواد جديدة اليه ، واكتشاف المواقع الشاغرة فيه . تتضمن طريقة التطابق الشجري نظاماً لعمل فهرس يعين ترتيباً خاصاً لكل الاشجار المنتهية . قبل كل شيء ، نشرح الاشجار الجذرية (rooted tress) وكيفية تعيين الجذر لشجرة (غير متجهة) ، أي نحدد رأساً من رؤوس الشجرة على أنه جذرها . لتكن $T (= T_0)$ شجرة ، ولتكن T_1 الشجرة الناتجة من T_0 بازالة كل الرؤوس ذات الدرجة 1 مع الحافات الواقعة عليها . وبصورة عامة ، نعرف T_{i+1} على أنها الشجرة الناتجة من T_i بازالة الرؤوس ذات الدرجة 1 مع الحافات الواقعة عليها . تنتهي هذه العملية عندما نتوصل الى الشجرة T_k المكونة من حافة واحدة اورأس واحد (يطلق عليه مذكر T) . فاذا كانت T_k مكونة من رأس واحد ، نعتبر هذا الرأس جذراً لـ T ، واذا كانت T_k مكونة من حافة واحدة ، يكون أحد رأسي تلك الحافة جذر T . في الحالة الاخيرة ، نعتبر الرأس الذي يؤدي الى شجرة جذرية ذات مرتبة (سوف نشرح المرتبة فيما بعد) أصغر هو الجذر ، وعندما يؤدي الرأسان الى شجرتين جذريتين متطابقتين (أي لهما نفس المرتبة) نعتبر أيّاً من الرأسين هو الجذر .

لكل شجرة جذرية توجد مقابلاً متتابعة منتهية عناصرها اعداد صحيحة موجبة ، ولا توجد شجرتان جذريتان مختلفتان لهما نفس المتتابعة ، ان طريقة تحديد اذا كانت شجرتان جذريتان ، T_i و T_j ، متطابقتين أم غير متطابقتين ، تتحول الى

عملية حساب المتابعين المقابلين للشجرتين T_i و T_j ثم مقارنتهما . علماً بان لدينا طريقه جيدة لمقارنة المتابعين المقابلين للشجرتين T_i و T_j ، كما سيتضح من تعريف هذه المتابعات .

نعطي مرتبة لكل من الاشجار الجذرية وفقاً لمتابعتها كالآتي :

الشجرة T_1 اقل مرتبة من الشجرة T_2 اذا وجد عدد طبيعي k بحيث ان لكل $j < k$ يكون الحدان بترتيب j في المتابعين المقابلين متساويين ، وبشرط : (أ) يوجد حد ترتيبه k في المتابعة المقابلة لـ T_2 ولا يوجد حد ترتيبه k في المتابعة المقابلة لـ T_1 ، او (ب) الحد الذي ترتيبه k في المتابعة المقابلة لـ T_1 اقل من الحد الذي ترتيبه k في المتابعة المقابلة لـ T_2 [انظر المثال (1)] .

ليكن r جذر الشجرة T . اذا ازلنا r مع كل الحافات الواقعة عليه ، نحصل على عدد من الاشجار الجزئية ، يطلق عليها عوامل (factors) الشجرة الجذرية T . عدد عوامل T يساوي درجة جذرها r ، وكل عامل يحتوي على رأس واحد فقط متجاور مع r ، ويعتبر هذا الرأس جذر الشجرة الجزئية . وعليه ، فان كل شجرة جذرية T ، والتي تتكون من أكثر من رأس واحد ، تتحلل بطريقة وحيدة الى عامل أو أكثر ، وكل عامل هو شجرة جذرية أصغر من T .

والان نشرح كيفية تعيين المتابعة المقابلة لشجرة جذرية T . اذا كانت T مكونة من رأس واحد فقط ، فان المتابعة المقابلة لها تتكون من عنصر واحد هو العدد 1 . لنفرض ان T_1, T_2, \dots, T_h هي عوامل T ، وان S_1, S_2, \dots, S_h هي متابعاتها على الترتيب . عندئذ ، نكون المتابعة S المقابلة لـ T كالآتي :

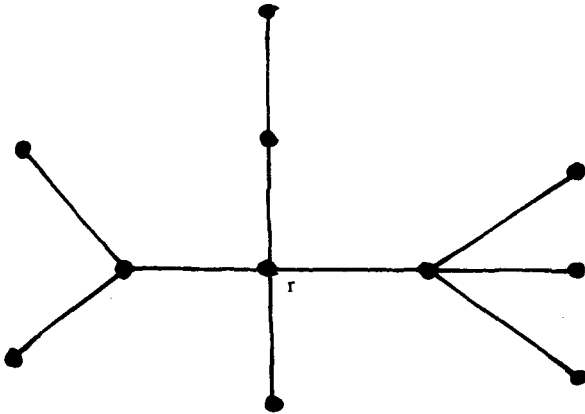
الحد الاول في S هو عدد رؤوس T ويليهِ المتابعات S_1, S_2, \dots, S_h حسب مراتبها ، تصاعدياً . بالطبع ، اذا كانت مرتبة S_i هي نفس مرتبة S_j فان ترتيبها في S يمكن ان يكون S_i ثم S_j او بالعكس

وبذلك ، فان كافة حدود S_1, S_2, \dots, S_h تكون حدود S ماعدا الحد الاول . في الحقيقة ، الحد الاول هو مجموع الحدود الاولى في المتابعات S_1, S_2, \dots, S_h .

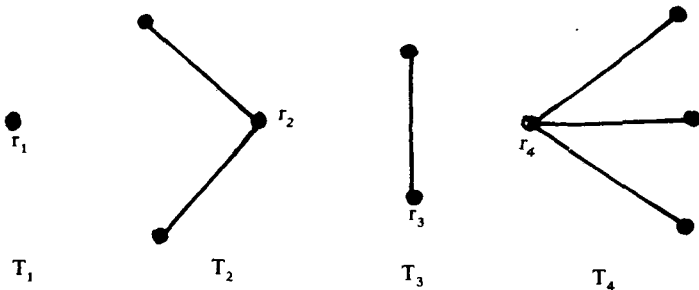
زائداً واحداً بطبيعة الحال ، يجب ان نكون قد اوجدنا كلاً من S_1, S_2, \dots, S_n وكل من هذه المتتابعات اصغر من S . كما ان ايجاد S_i يكون وفق نفس هذه الطريقة ، وهكذا بالنسبة لمكونات S_i . قبل ان نواصل شرحنا لهذا الموضوع نوضح ما تقدم ذكره بمثال .

مثال (1) : جد متتابعة الشجرة T المعطاة في الشكل (6 - 2)

الحل : من السهولة ان نجد ان الرأس r_i هو جذر T . بازالة الجذر r مع الحافات الواقعة عليه نحصل على العوامل T_1, T_2, T_3, T_4 للشجرة T ، وهذه مبيئة في الشكل (6 - 3) ، حيث r_i هو جذر T_i ، لكل $i = 1, 2, 3, 4$.



شكل (6 - 2) الشجرة الجذرية T



شكل (6 - 3) عوامل T

نجد مباشرة أن متتابعات T_1, T_2, T_3, T_4 هي بالترتيب

$$S_1 = (1), S_2 = (3, 1, 1), S_3 = (2, 1), S_4 = (4, 1, 1, 1)$$

الترتيب التصاعدي لهذه المتتابعات حسب المراتب هو S_1, S_3, S_2, S_4 أي أن مرتبة T_1 أقل من مرتبة T_3 . ومرتبة T_3 أقل من مرتبة T_2 . ومرتبة T_2 أقل من مرتبة T_4 . وسنبرهن ذلك بالصيغة

$$T_1 < T_3 < T_2 < T_4$$

وهكذا نخلص على المتابعة للشجرة T .

$$S = (11; 1; 2, 1; 3, 1, 1; 4, 1, 1, 1).$$

لاحظ أن هنالك تقابلاً متبايناً وحيداً بين حدود S ومجموعة رؤوس T بحيث إن الحد الأول في S يقابل جذر T ، والحدود الأخرى في S تقابل نفس رؤوس T_i التي تقابل حدود S_i . وكل رأس v في T هو جذر شجرة واحدة فقط التي هي عامل من عوامل T ، أو عامل لعامل ... لـ T . كما أن قيمة الحد في S الذي يقابل الرأس v يساوي عدد الرؤوس في الشجرة الجزئية التي جذرها v .

من أهم خواص المتابعة S الخاصة بتطابق الأشجار الجذرية هو وحدانية ترتيب حدودها . بالرغم من عدم وجود ترتيب ثابت لرؤوس الشجرة الجذرية T .

وصح . من تعريف S . أنه لاجل أن تتطابق شجرتان فإنه من الضروري تطابق متتابعتهما . وسنبين الآن أن تطابق المتابعين S_1 و S_2 للشجرتين الجذريتين T_1 و T_2 على الترتيب . كاف لجعل T_1 و T_2 متطابقتين . ولجل ذلك . نثبت أنه نستطيع أن ننشأ شجرة جذرية وحيدة T إذا أعطيت S . بحيث تصبح S المتابعة المقابلة لـ T .

إذا كانت S مكونة من حد واحد . فإن هذا الحد هو العدد 1 . وعندئذ تكون T مكونة من رأس واحد فقط . أما إذا كانت S مكونة من عدة حدود . فنجزئ S إلى متتابعات جزئية منفصلة . S_i . حيث إن $i = 1, 2, \dots, k$. من حدود متتالية في S وتحقق الشرطين :

(أ) إذا كان u_i . حيث إن $i = 1, 2, \dots, k$. هو الحد الأول في S_i . فإن u_1 هو الحد الثاني في S . وأن $u_i > u_{i-1}$. هو أول حد في S بعد u_{i-1} ولا يقل عنه .

(ب) لا يوجد، في S يأتي بعد u_k ولا يقل عنه .
 المتتابعات S_1, S_2, \dots, S_k هي الحقيقية المتتابعات المقابلة للعوامل
 T_1, T_2, \dots, T_k للشجرة T . وهذه تنتج من حقيقتين :

- (1) الحد الاول في المتابعة التي تمثل شجرة جذرية هو اكبر من كل حدودها الاخرى ،
 (2) المتتابعات التي تقابل عوامل T تكون مرتبة في S وفق تزايد مراتبها .

بعد تركيب T_i التي تتمثل بـ S_i ، لكل $i = 1, 2, \dots, k$ ، نركب
 الشجرة الجذرية T من T_1, T_2, \dots, T_k باضافة رأس v ، وهو جذر
 T ، ووصله بحافة مع جذر كل من T_1, T_2, \dots, T_k . ان تركيب كل من
 T_i يتم بهذا الاسلوب أيضاً ، اي نتبع الاستقراء على حجم المتابعة ، فاذا لم تكن
 S_i مكونة من حد واحد ، فنجزئها بالطريقة التي وصفت فيما تقدم ، وهكذا .
 والمثال الآتي يوضح الطريقة .

مثال (2) : جد الشجرة الوحيدة التي تمثلها المتابعة

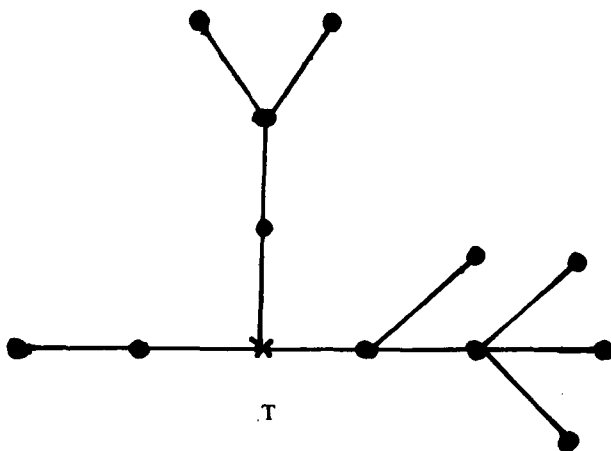
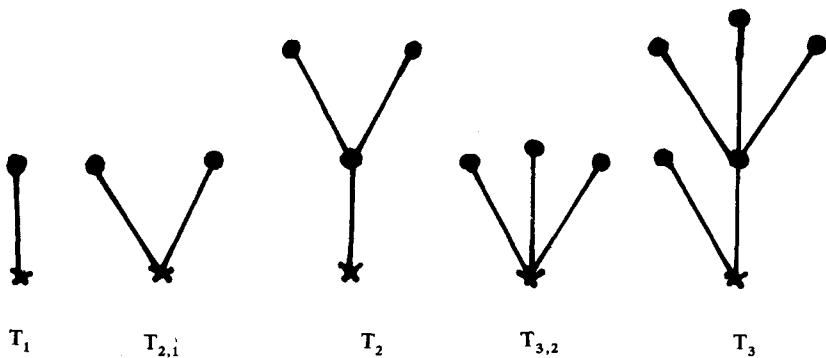
$$S = (13, 2, 1, 4, 3, 1, 1, 6, 1, 4, 1, 1, 1) .$$

الحل : باتباع طريقة تجزئة S الى متتابعات جزئية تحقق الشرطين (أ) و(ب) ،
 نتوصل الى

$$S_1 = (2, 1), S_2 = (4, 3, 1, 1), S_3 = (6, 1, 4, 1, 1, 1) .$$

واضح أن S_1 تمثل شجرة جذرية T_1 مكونة من حافة واحدة . ولاجل ايجاد
 الشجرة الجذرية T_2 التي تمثلها S_2 ، نستخرج من S_2 متتابعة جزئية واحدة
 هي $S_{2,1} = (3, 1, 1)$ والتي تمثل الشجرة الجذرية $T_{2,1}$ المبينة في الشكل
 (6 - 4) ، ومنها نحصل على T_2 . لاحظ أننا رمزنا للجذور بعلامة \times .
 ولاجل ايجاد الشجرة الجذرية T_3 التي تمثلها المتابعة الجزئية S_3 ، نجزيء
 هذه الى $S_{3,2} = (4, 1, 1, 1)$ ، $S_{3,1} = (1)$ ، ومنها نحصل على $T_{3,1}$
 (وهي رأس واحد) و $T_{3,2}$. ومن $T_{3,1}$ و $T_{3,2}$ نحصل على T_3

واخيراً ، نركب T من عواملها T_1, T_2, T_3 ، كما موضح في الشكل



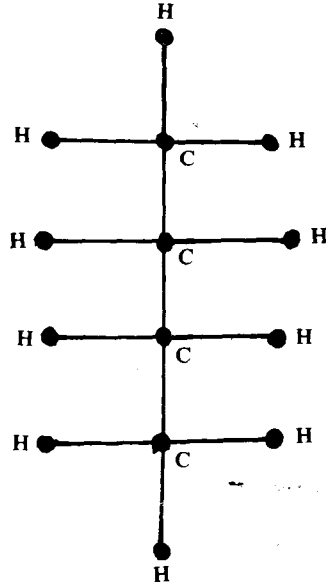
شكل (4-6)

نعود الان الى شرح كيفية الاستفادة من التطابق الشجري في موضوع الكيمياء العضوية. يمكن تمثيل بعض الجزئيات العضوية كبيانات مستوية رؤوسها هي الذرات وحافاتهما هي الاواصر بين تلك الذرات. من الجزئيات البسيطة التركيب هي جزئيات هيدروكربونات سلسلة البرافين ، $C_k H_{2k+2}$ التي في كل جزيء منها يوجد k من ذرات الكربون و $(2k + 2)$ من ذرات الهيدروجين. كل ذرة كاربون لها أربع اواصر وكل ذرة هيدروجين لها اصرة واحدة ، ولهذا فان الرؤوس التي تمثل ذرات الكربون هي ذات درجة 4 ، والتي تمثل ذرات الهيدروجين هي ذات درجة 1 ، أما الاواصر فهي الحافات . فمثلاً ، عندما $k = 4$ يكون لدينا C_4H_{10} (وهو البيوتان butane) ، ويمثل هذا الجزيء بالشجرة

المبيّنة في الشكل (6 - 5). وبما أن عدم ذكر الرؤوس التي تمثل ذرات الهيدروجين يُبسّط البيان ، فسوف نقتصر على تعيين ذرات الكربون فقط ؛ وهكذا يمكننا تمثيل C_4H_{10} كما في الشكل (6 - 6). بطبيعة الحال ، يمكن الحصول على أحدهما من الآخر مباشرة ، لان درجة كل رأس C هي 4 ودرجة كل رأس H هي 1.



شكل (6-6)



شكل (5-6) C_4H_{10}

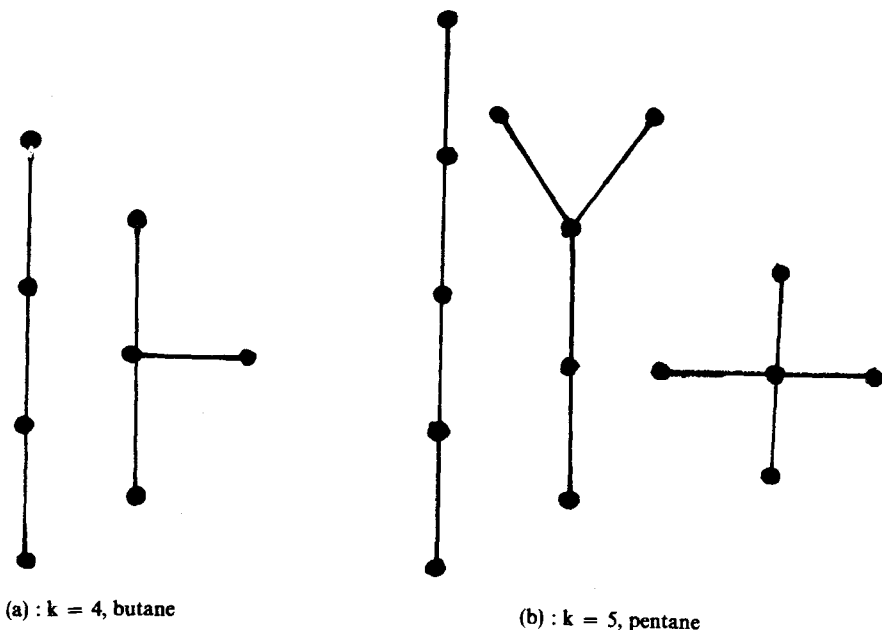
لما كان عدد الرؤوس n في البيان الذي يمثل $C_k H_{2k+2}$ هو $(3k + 2)$. وان مجموع درجات هذه الرؤوس هو $4k + (2k + 2)$. فان عدد حافته m هو $(3k+1)$. وهكذا ، فان

$$m = n - 1 .$$

وبما أن هذا البيان متصل ، فانه شجرة : أي أن البيان الذي يمثل جزيء $C_k H_{2k+2}$ هو شجرة ، وبذلك لا توجد أواصر مضاعفة .

كل الاشجار التي لها k من الرؤوس ودرجة كل رأس لا تزيد على 4 تتضمن كل الاشكال الممكنة لاتصالات ذرات الكربون في الجزيء $C_k H_{2k+2}$. فعندما $k = 4$ تكون لدينا الشجرتان في (a) من الشكل (6 - 7) . وعندما $k = 5$ يكون لدينا ثلاث

أشجار وهي مرسومة في (b) من الشكل (6-7) . وبالطبع ، يمكن إضافة ذرات هيدروجين بعدد كاف بحيث تصبح درجة كل رأس من الرؤوس التي تمثل ذرات الكربون مساوية لـ 4 . يطلق على كل من الأشكال (الأشجار) في (6-7) آيسومر (isomer) .



شكل (6-7)

يطلق على الآيسومر المتكون من درج واحد هيدروكربون درج - مستقيم

(straight - chain hydrocarbon) ، ويطلق على كل الأشكال الأخرى

للآيسومرات هيدروكربونات درج - غصني (branched - chain hydrocarbons)

عندما تزداد قيمة k ، فإن خواص الآيسومرات المختلفة تصبح مختلفة تماماً ؛

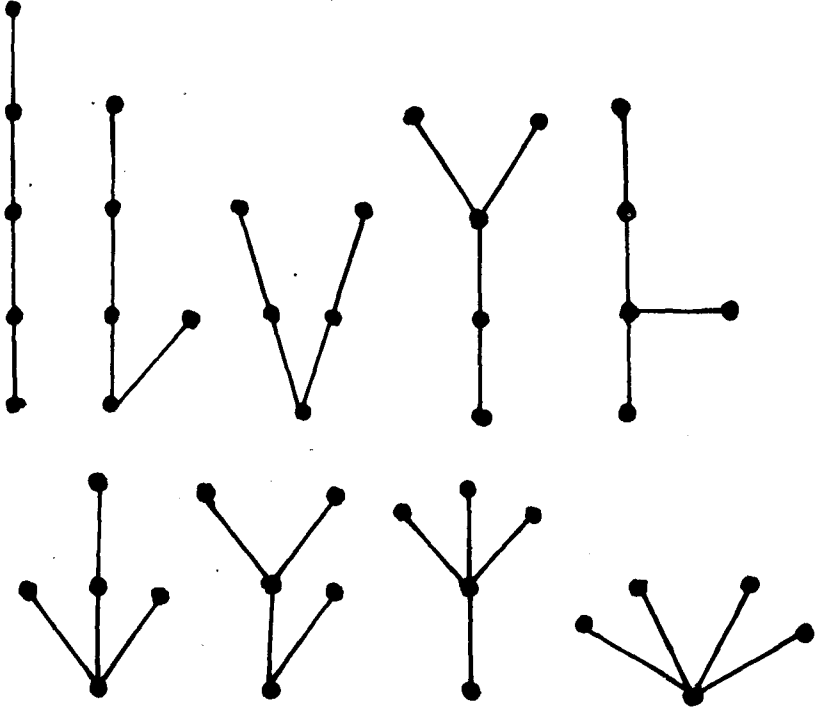
ولاجل التمييز بينها ، تصبح من الضروري معرفة عدد الآيسومرات الموجودة لكل k .

ولقد كان كييلي (سنة 1875) أول من استعمل نظرية البيانات في الكيمياء لاجل حل هذه

المسألة بدون أخطاء وبدون تكرار بعض الآيسومرات . ولقد مثل جزيئات الهيدروكربونات

بأشجار جذرية ثم اخذ كل الأشكال الممكنة ، واخيراً أوجد تلك التي تكون متطابقة

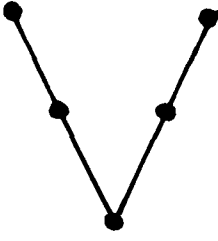
كيميائياً (أي تمثل نفس المركب الكيميائي) بطريقة اولية لاتصلح عندما تكون k كبيرة . فمثلاً ، عندما $k = 5$ ، يوجد لدينا تسع اشجار جذرية وهي مبيّنة في الشكل (6-8) . ويمكن أن نبرهن على أن ستاً منها متطابقة كيميائياً مع الاخرى . وعليه ، توجد ثلاثة ايسومرات فقط عندما $k = 5$ ، وهي تلك المبينة في (b) من الشكل (6-7) .



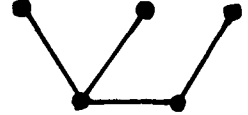
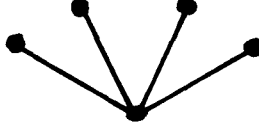
شكل (6-8)

يمكن حل مسألة التخلص من تكرار الاشجار الجذرية المتطابقة بتمثيل كل الاشكال الممكنة وتقسيمها الى اشجار ووحيدة المركز . واشجار ثنائية المركز . كما في الشكل (6-9) الاشجار الوحيدة المركز هي التي لها جذر واحد مع أغصان تبدأ من الجذر ونفس الطول (أي دروب بسيطة متساوية الطول تبدأ من الجذر وتفصل . الا عند الجذر) . أما الاشجار الثنائية المركز فهي التي لها جذران مع غصن رئيسي واحد او اكثر عند كل من الجذرين ونفس الطول . وعندئذ نستطيع بسهولة ازالة التكرار .

برسم كافة الايسومرات الممكنة حسب القاعدة الآتفة الذكر . تمكن كيبي من تعيين



شجرتان وحيدتا المركز



شجرة ثنائية المركز

شكل (6-9)

الايسومرات المختلفة التراكيب لسلاسل البرافين لحد $k = 13$. وقد اعطينا نتائجه هذه في الجدول الآتي :

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
عدد الايسومرات	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802

هنالك نتائج اخرى في هذا المجال لجزيئات ثنائية الاواصر . $C_k H_{2k}$. أو ثلاثية الاواصر $C_k H_{2k-2}$. وليس لدينا المجال لشرحها في هذا الكتاب .

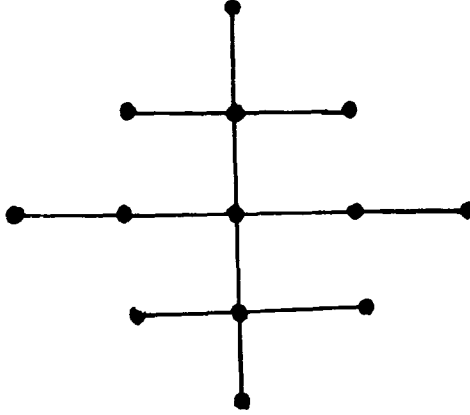
تمارين (6 - 2)

(1) عين جذر الشجرة T المعطاة في الشكل (6 10) . ثم اكتب المتتابعة المقابلة لها . قارن مرتبة هذه الشجرة مع مرتبة الشجرة المعطاة في المثال (2) .

(2) لتكن S المتتابعة المقابلة لشجرة جذرية T . ولتكن S' المتتابعة الناتجة من S بحذف كل الحد وذات القيمة 1 . اثبت أن S' تصلح لفرض تطابق الاشجار الجذرية تماماً كما هي الحالة بالنسبة للمتتابعة S' .

(3) لتكن $S = (14, 2, 1, 5, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 2, 1, 2, 1)$ متتابعة

لشجرة جذرية T . ارسم T مؤشراً على جذرها .
 (4) اتبع طريقة كيلى لتعيين الأشجار الوحيدة المركز والثنائية المركز عندما $k = 4$ و
 $k = 6$



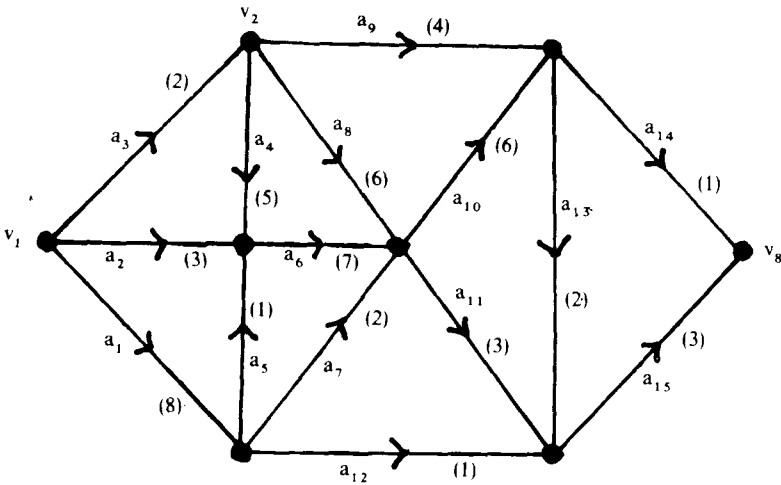
شكل (6 - 10)

(3 - 6) وسيلة تقييم ومراجعة البرامج

البيان الموجه هو أداة طبيعية لوصف وتحليل نماذج المشاريع المعقدة والمكونة من عدد كبير من الفعاليات ذات علاقات مترابطة بعضها مع بعض. المشروع باعتباره كلاً يمكن أن يكون، مثلاً، العملية الاجمالية للتصميم وللبناء ولأختبار اجزاء المعدات ؛ أو عملية تصميم وانشاء بناء ما، متضمنه الاعتبارات ذات العلاقة مع تعيين الموقع وتحضيره. وبصورة عامة، نفرض أن لدينا مشروعاً متكاملأ ومعينأ تعينأ تامأ، وأنه يمكن تجزئة مجموعة كل الاعمال المرتبطة به الى فعاليات a_1, a_2, \dots, a_n غيرمتداخلة مع بعضها. بطبيعة الحال، هنالك طرق عديدة لتجزئة مشروع ما الى فعاليات. إن تحديد تلك التجزئة يخضع لأعتبارات تمكنا من تعيين كل العلاقات الضرورية التي سوف يتطلبها شرحنا.

بعض الفعاليات المعينة تكون مستقلة عن البقية، بينما توجد فعاليات أخرى تعتمد على اكتمال إنجاز غيرها، أي أنها تعتمد على أخر من ناحية الوقت، بالصيغة: الفعالية a_i

يجب أن تتم قبل أن تبدأ الفعالية a_j . اذا علمت علاقة الاعتماد هذه لكل الفعاليات مع الزمن اللازم لانجاز كل فعالية . فيمكننا عند ذلك تمثيل المشروع بواسطة بيان موجه كل حافة موجهة فيه تمثل فعالية واحدة . رأس الأبتداء لها يمثل وقت ابتداء الفعالية . ورأس الانتهاء يمثل وقت انتهائها . وهكذا . فان كل رأس في هذا البيان يمثل حدثاً (event) ويحدد زمناً معيناً نسبة الى وقت ابتداء المشروع . سوف نعتبر الرأس v_1 وقت ابتداء المشروع . و v_n وقت إنجاز المشروع كله . حيث إن n هو عدد الرؤوس . أما الرؤوس الأخرى فهي تمثل وجود الفعاليات والعلاقة بينها وفق ما يأتي : اذا كانت a فعالية تبدأ من الرأس v . فان الفعالية a لا يمكن أن تبدأ بالعمل إلا بعد انجاز كل الفعاليات المنتهية عند v بالطبع . يمكن ابتداء العمل بالفعالية a في أي وقت بعد ذلك . فمثلاً . في الشكل (6 - 11) لا يمكن ابتداء العمل بالفعالية a_{15} إلا بعد الانتهاء من انجاز الفعاليات $a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13}$ ولا يمكن العمل بالفعالية a_{10} (وكذلك a_{11}) إلا بعد انجاز الفعاليات $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$ وعندما يتم انجاز الفعالتين a_{14} و a_{15} تكون كل الفعاليات الأخرى قد أنجزت . وعندئذ يتم المشروع .



شكل (6 - 11)

هنالك اساليب ادارية . منها ما هو معروف بـ « وسيلة تقييم ومراجعة البرامج (Program Evaluation and Review Technique) ويختصر

« PERT » . وآخر يعرف بـ « طريقة الدرب الحرج (Critical Path Method) » . ووسائل أخرى ذات علاقة بالموضوع . تستعمل بيانات الفعاليات كاساس تركيبى يستند اليها تحليل مشاريع معقدة . لتوضيح التحليل

الاساسي ، نفرض ان كل فعالية a_i تستغرق زمناً معيناً $t(a_i)$. نفترض هنا ان $t(a_i)$ ثابت ، ولكن عملياً يعتبر زمن انجاز كل فعالية متغيراً خاضعاً لتوزيع احتمالي صيغته العامة معروفة ويمكن تخمين متغيراته الوسيطة .

لاحظ ان الارقام المحصورة بين قوسين والمرافقة للحافات الموجهة في الشكل (6-11) تمثل ازمة تلك الفعاليات .

يقصد بزمن درب موجه من v_1 الى v_i مجموع ازمة الحافات الموجهة الواقعة على ذلك الدرب . واضح ان زمن الدرب الموجه من v_1 الى v_i الذي له اطول زمن يمثل حداً أدنى للزمن الذي يجب ان يمضي قبل ان يصبح ممكناً الابتداء بالفعاليات التي فيها v_i رأس ابتدائي . وعليه . فان المناسب ان نقرن مع كل رأس عدداً (هوزمن) كالآتي

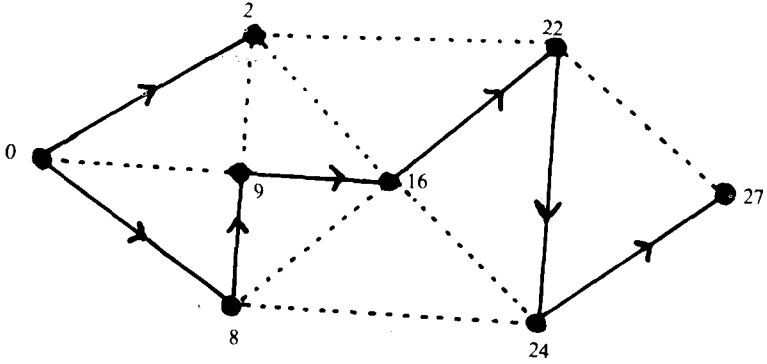
$$T(v_i) = 0$$

$$T(v_i) = \max \{ t(P) \} . \quad i \neq 1 \quad \text{عندما}$$

حيث ان $t(P)$ هوزمن الدرب الموجه P . وان الاعظم (\max) يؤخذ نسبة الى ازمة كل الدروب الموجهة من v_1 الى v_i

لاحظ انه من الطبيعي ان يكون بيان الفعاليات خالياً من الدارات الموجهة (لماذا؟) . كما ان هنالك على الاقل درباً موجهاً واحداً من كل رأس v_i الى الرأس v_n وهكذا . باستخدام الطريقة المعطاة في البند (3-3) مع اجراء التعديلات اللازمة [انظر تمرين (7) من مجموعة تمارين (3-3)] يمكن الحصول على شجرة القياس الاكبر العظمى نسبة للمصدر v_1 . اي ايجاد شجرة مولدة بحيث ان الدرب الموجه من v_1 الى v_i هو الاطول زمناً . بطبيعة الحال . القياس للحافات الموجهة هنا هو الزمن . فمثلاً . الشكل (6-12) يبين شجرة القياس الاكبر العظمى لبيان الفعاليات المعطى في الشكل (6-11) . علماً بان الاعداد المثبتة على الرؤوس هي قيم $T(v_i)$ المعرفة فيما تقدم .

كما سبق ان ذكرنا . فان اقرب وقت ممكن ان تبدأ منه الفعالية (v_i, v_j) هو بعد مضي مالا يقل عن $T(v_i)$ من الوحدات الزمنية من وقت ابتداء المشروع . واذ



شكل (6-12)

برمجنا المواعيد بحيث ان كل فعالية (v_i, v_j) تبدأ في الوقت $T(v_i)$ وتنتهي في الوقت $T(v_i) + t(v_i, v_j)$. حيث ان $t(v_i, v_j)$ هو الزمن اللازم لانجاز الفعالية (v_i, v_j) . فعندئذ سوف ينجز المشروع بأكمله في زمن $T(v_n)$ من الوحدات وهذا هو أقصر زمن ممكن لانجاز المشروع: ففي المثال السابق . نجد ان أقصر زمن لانجاز المشروع هو $T(v_8) = 27$ وحدة زمنية .

يطلق على درب موجة من v_1 الى v_n ذي الزمن الاطول اسم درب موجه حرج . زمن أي درب موجه حرج هو الزمن الاقصر اللازم لانجاز المشروع بأكمله . اضافة الى ذلك . فان هذا الزمن الاقصر يتحقق اذا ابتدأنا بكل فعالية من فعاليات الدرب الموجه الحرج مباشرة بعد انجاز الفعالية السابقة لها على ذلك الدرب . بصورة عامة . الدرب الموجه الحرج ليس وحيداً . فقد يكون هنالك اكثر من درب موجه حرج واحد . ولكن كلها متساوية الزمن .

اذا افترضنا اننا نرغب في انجاز المشروع بالزمن الاقصر . فانه لايزال هنالك مجال اوسع في برمجة الفعاليات غير الحرجة . وهي تعرف بالفعاليات المتراخية (slacks)

كل حدث v_i يجب أن يتحقق بوقت يكفي لانجاز كل الفعاليات بالتتابع في اي درب موجه من ذلك الحدث v_i الى الحدث النهائي v_n . هذه الفكرة تقودنا الى أن نقرن مع كل حدث v_i زمناً آخر بجانب الزمن $T(v_i)$. وهذا الزمن يعرف

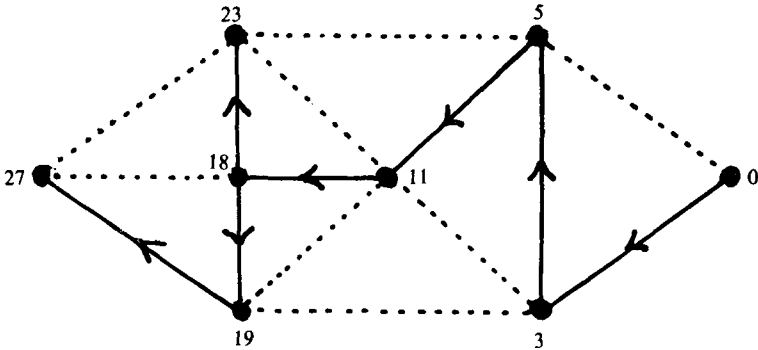
$$X(v_i) = 0 \quad \text{كالاتي :}$$

$$X(v_i) = \max \{ t P \} , \quad i \neq n \quad \text{عندما}$$

حيث ان $t(\bar{P})$ هو زمن الدرب الموجه \bar{P} من v_i الى v_n ، وأن الاعظم يوخذ نسبة الى زمرة كافة الدروب الموجهة من v_i الى v_n . وهنا أيضاً نستعمل طريقة البند (3-3) لإيجاد $X(v_i)$ وذلك بعكس الاتجاه (وقتياً) لكل حافة موجهة ، ثم نجد شجرة القياس الأكبر العظمي بالنسبة الى المصدر v_n ، وبعد ذلك نرجع اتجاهات الحافات الى وضعها الاصلي . ولأجل توضيح ذلك ، استخرجنا $X(v_i)$ للبيان المعطى في الشكل (6-11) ، وهي موضحة في الشكل (6-13) بما أن الزمن $X(v_i)$ مقيس من نهاية المشروع الذي ينجز بعد $T(v_n)$ من الوحدات الزمنية من وقت ابتداء المشروع ، فانه من المناسب تعريف الاعداد

$$L(v_i) = T(v_n) - X(v_i).$$

واضح أن $L(v_i)$ يمثل الوقت الاخير الذي فيه يجب ان يتم تحقيق الحدث v_i دون زيادة الزمن الكلي الاقصر اللازم لانجاز المشروع . يمكن أن نثبت أن لكل v_i ،

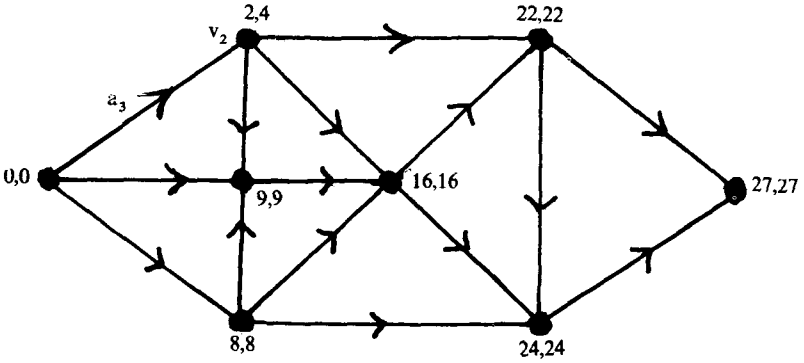
$$T(v_i) \leq L(v_i) . \quad \dots (1-6)$$


شكل (6-13)

الشكل (6-14) يظهر بيان الفعاليات المعطى في شكل (6-11) مع العددين $T(v_i)$ و $L(v_i)$ لكل رأس v_i . بالطبع . في حالة اختلاف هذين العددين . فان العدد الكبير هو $L(v_i)$ والعدد الصغير هو $T(v_i)$. وذلك بموجب المتباينة (6-1)

تفيدنا قيم $T(v_i)$ و $L(v_i)$ في تعيين مجال حرية برمجة الفعاليات المتراخية بدون زيادة الزمن الاقصر اللازم لانجاز المشروع . فمثلاً . يمكن أن نبدأ بتنفيذ الفعالية

المتراخية a_3 في أي وقت بين 0 و 2 (باعتبار أن وقت ابتداء المشروع هو 0) . وبما أن انجاز الفعالية a_3 يستغرق وحدتين ، فإن الحدث v_2 يتحقق في الوقت 4 أو قبله . وهكذا بالنسبة للفعاليات المتراخية الأخرى ، وبذلك يمكن تحقيق كل حدث v_i في وقت بين $T(v_i)$ و $L(v_i)$ معتمدين على كيفية توزيع زمن التراخي حسبما يناسب العوامل الأخرى (مثل الكلفة ، توفر المواد ، توفر الأيدي العاملة ، . . .) اللازمة لتنفيذ المشروع .



شكل (6 - 14)

لقد سبق أن ذكرنا ان البيانات الموجهة تستخدم في العديد من المشروعات ، وفيما يأتي مثال على احد هذه التطبيقات .

مثال : الجدول الاتي يظهر فعاليات مشروع تخطيط لبناء مصنع مع المدة اللازمة لانجاز كل فعالية وما يجب أن يسبقها من فعاليات قبل المباشرة بها . وقد رمز لكل فعالية بحرف لاجل التبسيط . ارسم بيان هذا المشروع وجد الزمن الاقصر لانجازه .

رمز الفعالية الفعالية الفعاليات السابقة لها الزمن المقدر
بالاسابيع

3	-	الحفر	a
5	a	الاساسات	b
10	b	الجدران	c
6	c	السقف	d
9	c	التأسيسات الصحية	e
11	c	الاعمال الكهربائية	f
7	d	تكحيل السقف	g
8	g,e	تكحيل الجدران	h
4	d	بناء السور	k
3	k	تكحيل السور	l
5	f,h	رصف الارضية	m
13	m	نصب المكائن	n
7	f,h	الصيغ الداخلي	p
4	l	الصيغ الخارجي	q
6	p,n	التشطيب الداخلي	r
2	q	التشطيب الخارجي	s

الحل : نرسم للاحداث (الرؤوس) بـ

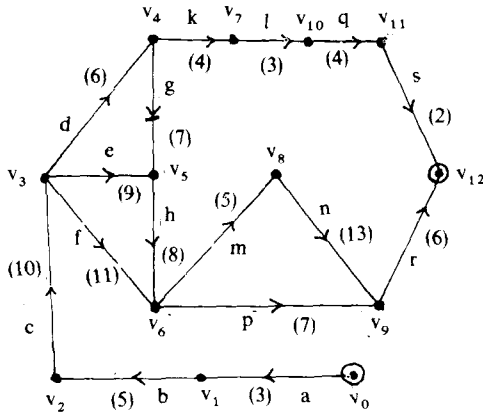
حيث ان v_0 يمثل ابتداء المشروع وأن v_{12} يمثل اتمام المشروع . سن الجدول نرسم بياناً
يمثل هذا المشروع . وهو المبين في الشكل (6 - 15) .

ولقد كتبت أزمنة الفعاليات بين قوسين على البيان الذي يمثل المشروع .

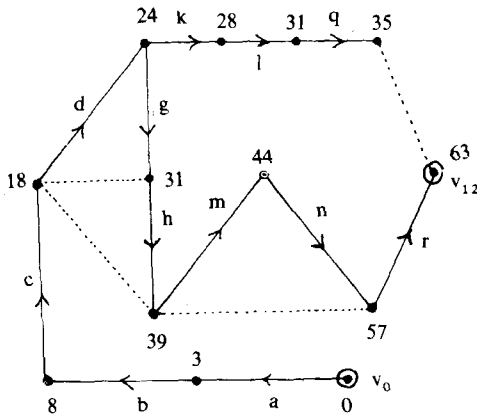
نبدأ بالشجرة المولدة المكونة من الفعاليات a, b, c, d, e, h, m, n, k, l, q, s
ومنها نحصل على شجرة القياس الاكبر العظمى نسبة للمصدر v_0 . وهي مبينة في الشكل

(6 - 16) . وقد ثبت على رؤوسها الوقت المبكر لانجاز كل حدث . ومن هذه الشجرة نجد أن الزمن الأقصر لاكمال المشروع هو 63 إسبوعاً ، وان الدرب الموجه الحرج هو

(a , b , c , d , g , h , m , n , r)



شكل (6 - 15) بيان مشروع بناء مصنع



شكل (6 - 16)

تمارين (6 - 3)

- (1) إثبت صحة المتباينة (1-6) .
 (2) برهن على أن $L(v_i) = T(v_i)$ اذا واذا فقط v_i يقع على درب موجه حرج .
 (3) جد $L(v_i), T(v_i)$ لكل حدث v_i في بيان الفعاليات الناتج من البيان المعطى في الشكل (11-6) بعكس إتجاه الفعالية a_4 .
 (4) جد زمن التراخي $L(v_i) - T(v_i)$ لكل حدث v_i في مشروع بناء المصنع في المثال المعطى في الشرح . ثم ناقش كيفية الاستفادة من زمن التراخي في تنفيذ الفعاليات المتراخية .
 (5) ظهرت المعلومات الآتية في شركة لصنع المكائن الزراعية :

العمل العمل السابق نه الوقت المقدر بالايام

6	—	a
4	—	b
9	a	c
8	a	d
5	b	e
7	d,e	f
15	d,e	g
5	c,f	h

ارسم بيان الفعاليات (الاعمال هنا) لهذا المشروع . واحسب الدرب الحرج بماهو الزمن الاقصر لتمام المشروع ؟ هل يتغير الدرب الحرج اذا كان العمل g يأخذ 10 أيام بدلا من 15 يوماً ؟

(6 - 4) تطبيقات مبرهنة هول :

هنالك تطبيقات عديدة لمبرهنة هول (Hall's Theorem) [مبرهنة (5-10)] . وقد أوضحنا في البند (5-4) كيفية الاستفادة منها في تلوين حافات بيان ثنائي التجزئة . ونذكر في البند تطبيقاً آخر لهذه المبرهنة . كما أننا سوف نذكر في الفصل السابع استخداماتها في مواضيع اخرى في نظرية البيانات .

يطلق أيضاً على مبرهنة هول اسم مبرهنة الزواج . لان فيليب هول أثبت مبرهنته هذه سنة 1935 جواباً عن مسألة معروفة باسم « مسألة الزواج » وهي تنص على : « اذا كان لدينا مجموعة منتهية من البنين . وكل واحد منهم يعرف عدداً من البنات ، فهل يمكن تزويج كل البنين بحيث ان كللاً منهم يتزوج من بنت يعرفها - بفرض عدم السماح بتعدد الزوجات أو الأزواج ؟ »

يمكن أن نعبر عن مسألة الزواج هذه بصيغة ملائمة لواقع مجتمعنا كالاتي :
 « لنفرض ان لدينا مجموعة من الرياضيين الهوايين لواحدة أو أكثر من الالعب الرياضية وان كلاً منهم يرغب في ان يكون رئيساً لاحدى الفرق الرياضية التي يهواها ، فهل يمكن تنصيب كل من هؤلاء الرياضيين لرئاسة فرقة واحدة فقط من الفرق التي يهواها بشرط ألا يكون هنالك اكثر من رئيس واحد لكل فرقة ؟

يمكن تمثيل هذه المسألة ببيان ثنائي التجزئة . فاذا كانت مجموعة الرياضيين الهواة هي $V_1 = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$ ومجموعة الفرق الرياضية هي $V_2 = \{ t_1, t_2, \dots, t_m \}$ فان البيان الذي يمثل هذه المسألة هو بيان ثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$ بحيث ان الرأس p_i متجاور مع الرأس t_j اذا واذا فقط كان الرياضي p_i من هواة الفرقة الرياضية t_j .

وهكذا . يمكننا كتابة المبرهنة (5 - 10) بالصيغة الآتية : (الشرط الضروري والكافي لحل مسألة رئاسة الفرق الرياضية هو « كل مجموعة من k من الرياضيين يهون . مجتمعين ، مالا يقل عن k من الفرق الرياضية ، لكل $1 \leq k \leq n$. ») وعندما نضع هذه المبرهنة بمصطلحات مسألة الزواج . تصبح بالصيغة الآتية . التي تعرف بمبرهنة هول للزواج :

(الشرط الضروري والكافي لحل مسألة الزواج هو (كل مجموعة من k من البنين يعرفون مجتمعين . مالا يقل عن k من البنات . لكل $1 \leq k \leq n$. »)

وهكذا ، فان مبرهنة هول تزودنا بالحل المطلوب لمسألة الزواج (أورئاسة الفرق

الرياضية) ، وكل المسائل المشابهة لها . كما هو موضح في المثال الاتي .

مثال : لنفرض أن لدينا خمسة مهندسين . A, B, C, D, E . ينتمون الى

جمعيات علمية هي $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ كما هو مبين فيما يأتي :

المهندس A ينتمي الى الجمعيتين α, ϵ

α, β	ينتمي الى الجمعيتين	B	المهندس
β, γ, δ	ينتمي الى الجمعيات	C	المهندس
α, γ, ϵ	ينتمي الى الجمعيات	D	المهندس
β	ينتمي الى الجمعية	E	المهندس

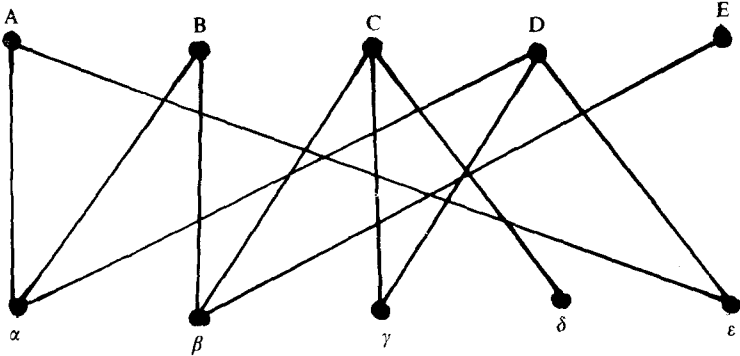
فاذا علمت أن رئيس الجمعية يعين من بين الاعضاء المنتمين لها والراغبين في ذلك . وأن كلاً من هؤلاء المهندسين يرغب في أن يكون رئيساً لأحدى الجمعيات التي ينتمي اليها، فهل يمكن إختيار رئيس من بين المهندسين A, B, C, D, E لكل من الجمعيات الخمس المذكورة؟

الحل: نرسم البيان الثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$. حيث أن

$$V_1 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \},$$

$$V_2 = \{ A, B, C, D, E \}.$$

ونصل الرأس الذي يمثل مهندساً بالرؤوس التي تمثل الجمعيات التي ينتمي اليها بموجب ما أعطي في نص المثال . فنحصل على البيان المبين في الشكل (6-17) .



شكل (6-17)

من هذا البيان نلاحظ أن كل k . حيث ان $k = 1, 2, 3, 4, 5$. من هذه الجمعيات ينتمي اليها ما لا يقل عن k من هؤلاء المهندسين . لذلك . فان شرط مبرهنة هول يتحقق . وهكذا يمكن اختيار رئيس من بين هؤلاء المهندسين لكل من الجمعيات الخمس . وعلى

سبيل المثال . نختار رؤساء الجمعيات كالاتي :

الرئيس	الجمعية
B	α
E	β
D	γ
C	δ
A	ϵ

تمارين (6 - 4)

- (1) اعلنت احدى الدوائر عن وجود خمس وظائف شاغرة وهي :
- كاتب طباعة باللغة العربية . كاتب طباعة باللغة الانكليزية . كاتب حسابات ، كاتب ذاتية ، ومحاسب . وقد قدمت لها ستة طلبات وهي : واحد باختصاص كاتب طباعة باللغة العربية . اثنان باختصاص كاتب طباعة باللغتين العربية والانكليزية ، اثنان لوظيفة محاسب . واحد باختصاص كاتب حسابات او ذاتية . هل تستطيع الدائرة سد الشواغر من هذه الطلبات ؟ اذكر السبب بموجب فحوى مبرهنة هول .
- (2) اذا كان المهندس D في المثال المحلول في الشرح ينتمي الى الجمعيتين α, ϵ فقط ، فهل يمكن ان يكون كل واحد من المهندسين A, B, C, D, E رئيساً لجمعية واحدة فقط من الجمعيات $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ؟ ولماذا ؟
- (3) لنفرض ان لدينا مجموعة من الرياضيين p_1, p_2, \dots, p_n الهاويين لواحدة أو أكثر من الالعاب الرياضية ، وان اللاعب الرياضي p_i ، لكل $i = 1, 2, \dots, n$ ، يرغب في ان يكون رئيساً لـ h_i من الفرق الرياضية التي يهواها ، فهل يمكن حل هذه المسألة ؟ وما هو الشرط الضروري والكافي لحلها ؟

(6 - 5) شبكات السيول (Network Flows)

إن موضوع شبكات السيول (أو شبكات الجريان) من المواضيع الأكثر تطبيقاً لنظرية البيانات . ففي المرور مثلاً . قد نرغب في معرفة أكبر عدد من المركبات التي

يمكن أن تنتقل من نقطة تقاطع (دورة) إلى أخرى داخل شوارع مدينة معينة خلال ساعة واحدة ، علماً أننا نعرف القيد الأعلى لعدد السيارات التي يمكن أن تمر في كل شارع وحيد الاتجاه في ساعة واحدة (الشوارع المزدوجة الاتجاه تعتبر شارعين كل منهما وحيد الاتجاه ، واتجاه أحدهما هو عكس اتجاه الآخر) . تمثل هذه المسألة كياناً موجه D ، رؤوسه هي نقاط تقاطع الشوارع ، وحافته الموجهة هي الشوارع ، مع اقتران كل حافة موجهة بعدد صحيح غير سالب يمثل سعة الشارع المقابل لتلك الحافة .

ومثل آخر الدوائر الكهربائية ، فقد نريد معرفة أعلى تيار يصل من عقدة (رأس) إلى عقدة أخرى ، إذا علمنا القيد الأعلى لوحدة التيار التي يمكن أن يتحملها كل عنصر لوحده في اتجاه معين . يمكن تمثيل هذه المسألة أيضاً كياناً موجه رؤوسه هي عقد الشبكة الكهربائية وحافته الموجهة هي العناصر الكهربائية مع اقتران كل حافة موجهة بعدد غير سالب يمثل القيد الأعلى للتيار الذي يمكن أن يمر في العنصر المقابل لها .

وهناك أمثلة تطبيقية عديدة يمكن تمثيلها كبيانات موجهة حافاتها مقترنة بأعداد غير سالبة . ولأجل التمهيد لدراسة هذه المسائل بصورة عامة ، نشرح بعض المفاهيم

تعرف الشبكة (the network) N ، على أنها بيان موجه ، كل حافة موجهة (u, v) ، فيه مقترنة بعدد حقيقي غير سالب ، يرمز له $\psi(u, v)$ ويطلق عليه سعة (capacity) الحافة (u, v) بمعنى آخر ، الشبكة N تعرف بأنها زوج مرتب (D, ψ) ، علماً أن D هو بيان موجه وأن ψ هي دالة من مجموعة الحافات الموجهة D إلى مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة . يطلق على ψ دالة السعة . لكل رأس v في الشبكة N ، نعرف $\psi^+(v)$ بأنه مجموع ساعات كل الحافات الموجهة (v, x) في N التي رأسها الابتدائي هو v ، وبالمثل ، نعرف $\psi^-(v)$ بأنه مجموع ساعات كل الحافات الموجهة (x, v) في N التي رأسها النهائي هو v . يمكن بسهولة أن نبرهن على أن

$$\sum_{v \in V} \psi^+(v) = \sum_{v \in V} \psi^-(v), \quad \dots \dots \dots (2-6)$$

علماً أن V هي مجموعة رؤوس N .

إذا كانت S مجموعة من حافات N ، فإننا نرمز بـ $\psi(S)$ لمجموع ساعات

الحافات الموجهة المنتمية إلى S .

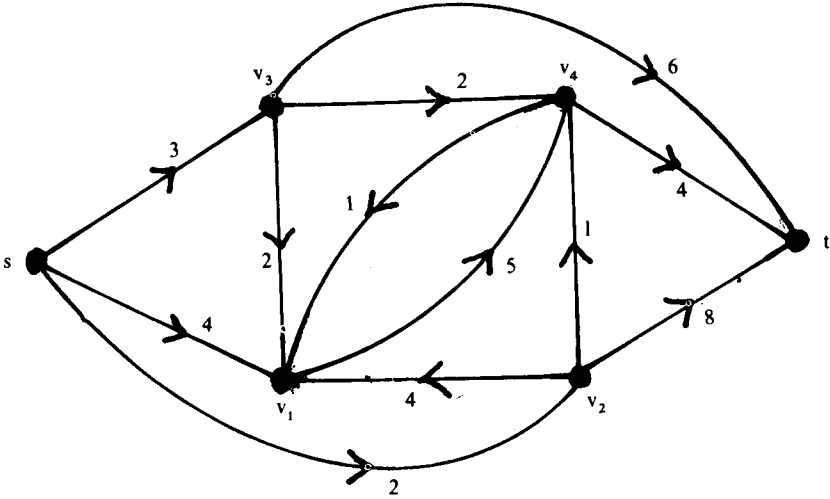
مثال (1) . الشكل (6-18) يبين شبكة N ، علماً أن الأعداد المقترنة بالحافات

الموجهة هي ساعاتها ومنه نجد أن

$$\psi^+(v_1) = 5, \psi^-(v_1) = 1 + 2 + 4 + 4 = 11,$$

$$\psi^+(s) = 3 + 4 + 2 = 9, \psi^-(s) = 0,$$

$$\psi^+(t) = 0 \quad \psi^-(t) = 8 + 4 + 6 = 18.$$



شكل (6-18)

سوف نُمَيِّزُ في كل شبكة N رأسين معينين نطلق على أحدهما المنبع أو المصدر (the source) ورمزه s ، ونطلق على الآخر المصب (the sink) ورمزه t . قد يكون هنالك أكثر من مصدر واحد أو أكثر من مصب واحد. ولكن هذه الحالة يمكن معالجتها وتحويلها إلى حالة وجود مصدر واحد ومصب واحد. كما سنبين فيما بعد.

إذا كانت $N = (D, \psi)$ شبكة. فإننا نعرف السيل في N على أنه دالة ϕ من مجموعة حافات D إلى مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة. نتحقق الشرطين الآتيين:

$$(أ) \text{ لكل حافة موجهة } (v, u) \cdot \phi(v, u) \leq \psi(v, u)$$

(ب) لكل رأس v ، ماعدا المصدر s والمصب t .

$$\phi^+(v) = \phi^-(v).$$

$$\phi^+(v) = \sum_x \phi(v, x), \phi^-(v) = \sum_x \phi(x, v), \dots (3-6) \quad \text{علما أن}$$

كما أن المجموع يؤخذ لكل الرؤوس x في v المتجاورة مع v .
الشرط (ب) يعني ان مجموع السيول التي تخرج من v يساوي مجموع السيول التي تدخل اليه .

يقال لسيل ϕ في N انه سيل صفري اذا كان $\phi(v, u) = 0$ لكل حافة موجهة (v, u) في N . وفيما عدا ذلك يقال للسيل انه غير صفري . ويقال لحافة موجهة (v, u) انها مشبعة (saturated) بالسيل ϕ اذا كان $\phi(v, u) = \psi(v, u)$.

وفيما عدا ذلك يقال للحافة الموجهة انها غير مشبعة (unsaturated) . اضافة الى ذلك . اذا كانت S مجموعة من حافات N . فنعرف

$$\phi(S) = \sum_{a \in S} \phi(a)$$

يمكن ان نثبت بسهولة . كما في (2-6) . أن

$$\sum_{v \in V} \phi^+(v) = \sum_{v \in V} \phi^-(v), \dots (4-6)$$

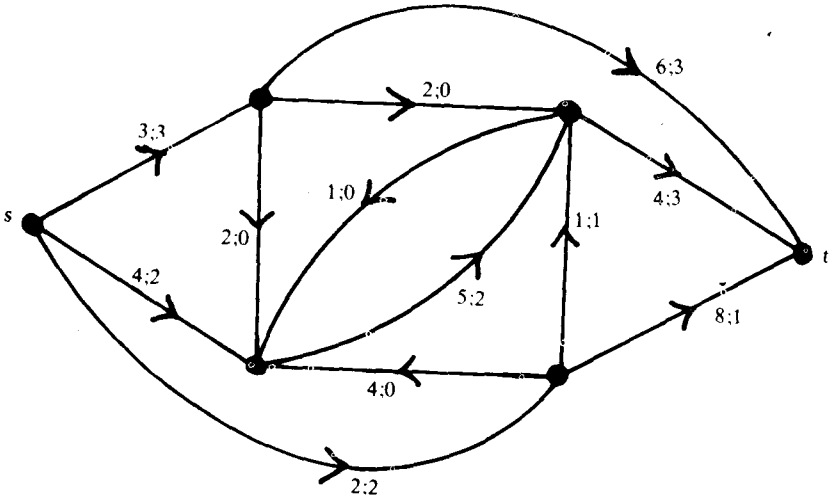
وهكذا . ينتج من الشرط (ب) أن

$$\phi^+(s) - \phi^-(s) = \phi^-(t) - \phi^+(t) = q ;$$

يطلق على q قيمة (value) السيل ϕ من s الى t

لقد ذكرنا في الشكل (6-19) سبلاً للشبكة المعطاة في الشكل (6-18) . قيمة هذا السيل هي 7 . [لاحظ أن العدد الأول - من اليسار - المقترن بالحافة هو سعتها اما العدد الثاني فهو السيل الذي يمر فيها .]

المسألة المهمة في هذا الموضوع هي مسألة ايجاد سيل من المصدر الى المصب بحيث ان قيمته اعظم . يمكن . يطلق على اي سيل ذي قيمة عظمى سيل اعظمي (maximal flow) من s الى t في الشبكة N . بطبيعة الحال . يمكن ان يكون لشبكة N عدة سيول اعظمية مختلفة من المصدر s الى المصب t . ولكن من الواضح ان كلها ذات قيمة واحدة .



شكل (6 - 19)

ان دراسة مسألة السيول الاعظمية مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمفهوم المجموعات القاطعة لبيانات موجهة . ولجل ذلك نعطي التعريف الآتي .

لتكن N شبكة فيها الرأس s هو المصدر والرأس t هو المصب . يقال لمجموعة S من حافات موجهة للشبكة N انها قاطعة (cut) اذا احتوت S على حافة موجهة واحدة على الاقل من كل درب موجه من المصدر s الى المصب t . اي ان ازالة حافات S من N يؤدي الى قطع كل الدروب الموجهة من s الى t . ولا يوجد في S مجموعة جزئية فعلية لها هذه الخاصية . لاحظ أن تعريف القاطعة يكون نسبة الى s و t . أي انها « قاطعة تفصل s عن t » [راجع البند (2 3)] . ولما كان هذا واضحاً . فلا نجد ضرورة لذكر العبارة « تفصل s عن t » كلما ذكرنا قاطعة في الشبكة N

ولجل التوضيح . نأخذ الشبكة N المعطاة في الشكل (6 18) فنجد أن كلا من

$$S_1 = \{ (s, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_2, t) \}$$

$$S_2 = \{ (s, v_1), (s, v_2), (s, v_3) \}$$

قاطعة لـ N

بطبيعة الحال ، كل قاطعة للشبكة $N = (D, \psi)$ هي مجموعة - قاطعة تفصل s عن t في البيان الموجه D .

يقصد بسعة القاطعة S للشبكة N مجموع ساعات الحافات الموجهة المتمية الى S .

$$\text{وسرمز لذلك بـ } \psi(S) : \text{ أي أن } \psi(S) = \sum_{a \in S} \psi(a)$$

فمثلاً ، بالنسبة للشبكة N المعطاة في الشكل (6-18) .

$$\psi(S_1) = 17 \quad , \quad \psi(S_2) = 9 .$$

يقال لقاطعة في الشبكة N انها قاطعة أصغرية (minimal cut) اذا كانت سعتها

أصغراً ما يمكن نسبة لكافة القاطعات الاخرى في N . فمثلاً S_1 هي ليست أصغرية .

من تعريف السيل والقاطعة نستنتج الحقيقة البسيطة الآتية :

« قيمة اي سيل في N من المصدر s الى المصب t لا تزيد على سعة أية قاطعة ل N . »
ولكن الاله من هذه الحقيقية هي المبرهنة (6-3) المعروفة بمبرهنة السيل الأعظمي والقاطعة الأصغرية (max-flow min-cut) والتي كان قد برهنها لأول مرة العالمان فورد وفولكيرسون (Ford and Fulkerson) سنة 1955 . ان برهان هذه المبرهنة يتطلب استعمال الماخوذة (6-1) والتي بدورها تتطلب بعض الرموز والتعاريف .

لتكن S قاطعة للشبكة $N = (D, \psi)$. وليكن D' البيان الناتج من D بازالة حافات S . ولتكن V مجموعة رؤوس D . عندئذ . نعرف المجموعة X بانها مجموعة رؤوس تحتوي على المصدر s وعلى كل الرؤوس x . في D بحيث يوجد درب موجه واحد على الاقل من s الى x في D' . كما نعرف

$$\bar{X} = V - X .$$

واضح من تعريف القاطعة ان المصب t ينتمي الى \bar{X} . ولذلك نرمز في بعض الاحيان لهذه القاطعة S كزوج مرتب (X, \bar{X}) ، اي ان (X, \bar{X}) هي مجموعة كل الحافات الموجهة والتي رأسها الابتدائي في X ورأسها النهائي في \bar{X} .

اذا كان ϕ اي سيل في N . فان (X, \bar{X}) هو مجموع سيول الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس \bar{X} . وبالمثل نعرف (\bar{X}, X) .

مأخوذة (1-6): إذا كان ϕ سبيلاً في شبكة $N=(D, \psi)$ من المصدر s الى
 المصب t بقيمة q . فان لكل قاطعة S يكون
 $q = \phi(X, \bar{X}) - \phi(X, X)$.

البرهان: بما ان $t \notin X, s \in X$ وبموجب (3-6) نتوصل الى

$$q = \phi^+(s) - \phi^-(s) = \sum_{v \in X} [\phi^+(v) - \phi^-(v)]$$

$$= \sum_{v \in X} \sum_x \phi(v, x) - \sum_{v \in X} \sum_x \phi(x, v)$$

نجزيء الحافات الموجهة والواردة في المجموعين اعلاه الى ثلاث اصناف :

(أ) كل الحافات الموجهة التي تصل بين رأسين في X . كل من هذه الحافات
 الموجهة يظهر مرة واحدة فقط في كل من المجموعين. وبذلك فان السيل الذي يمر
 فيه يختصر.

(ب) كل الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس في \bar{X} . وهذه تظهر فقط
 في المجموع الاول.

(ج) كل الحافات الموجهة من رأس في \bar{X} الى رأس في X . وهذه تظهر فقط
 في المجموع الثاني.
 وعليه فان الناتج يختصر الى

$$q = \phi(X, X) - \phi(X, X).$$

مبرهنة (1-6) - مبرهنة السيل الاعظمى والقاطعة الأصغرية - في أية شبكة سيول
 تكون قيمة أي سيل أعظمى مساوية لسعة أية قاطعة اصغرية.

البرهان: بموجب المأخوذة (1-6). فان قيمة أي سيل أعظمى لاتزيد على سعة
 أية قاطعة أصغرية. لذلك. فانه يكفي ان نبرهن على وجود قاطعة سعتها تساوي القيمة
 لسيل أعظمى معطى

ليكن سبيلاً أعظميةً من المصدر s الى المصب t في الشبكة $N=(D, \psi)$
 قيمته q . نعرف المجموعة W من رؤوس N كالآتي: المصدر s ينتمي الى W :

وإذا كان G البيان الناتج من D باهمال اتجاهات الحافات . فان رأساً x في W اذا واذ افقط وجد في G درب من s الى x بالصيغة

$$([v_0, v_1], [v_1, v_2], \dots, [v_{k-1}, v_k]),$$

علماً بان $x = v_k = s, v_0 = s$ له الخاصية وهي ان كل حافة $[v_i, v_{i+1}]$ فيه تقابل اما (أ) حافة موجّهة $[v_i, v_{i+1}]$ غير مشبعة بالسيل ϕ . أو (ب) حافة موجّهة (v_{i+1}, v_i) ذات سيل غير صفري .

نرمز لمجموعة رؤوس N التي لا تنتمي الى W بالرمز \bar{W} . اي ان

$$\bar{W} = V - W.$$

سوف نبرهن على ان $t \in \bar{W}$. اذا . لم تكن t في \bar{W} . فانها في W . وعندئذ يوجد في G درب بالصيغة

$$([s, v_1], [v_1, v_2], \dots, [v_{k-1}, t])$$

يحقق الخاصية التي ذكرت فيما تقدم . يطلق على هكذا درب اسم درب ازدياد السيل (flow augmenting path) بالنسبة للسيل ϕ . ليكن ε عدداً حقيقياً موجباً يحقق الشرطين :

$$(1) \quad \varepsilon \leq \psi(a) - \phi(a) .,$$

لكل حافة موجّهة a من الصنف (ج) . و

$$(2) \quad \varepsilon \leq \phi(a) .,$$

لكل حافة موجّهة a من الصنف (ب) في درب ازدياد السيل المذكور فيما تقدم .

والان . يمكننا ان نزيد السيل بمقدار ε في الحافات الموجّهة من الصنف (ج) . وننقص بمقدار ε السيل في الحافات الموجّهة من الصنف (ب) . وعندئذ سوف تزداد قيمة السيل فتصبح $\varepsilon + q$. ولكن هذا يناقض فرضنا أن ϕ هو سيل أعظمي . وعليه . فان $t \in \bar{W}$.

والان . نرمز بـ S لمجموعة الحافات الموجّهة (x, y) بحيث ان $x \in W$ و $y \in \bar{W}$. واضح ان S قاطعة لـ N . وان كل حافة موجّهة في S هي مشبعة بالسيل ϕ . لان خلاف ذلك يؤدي الى ان يصبح y في W . كما ان السيل في كل حافة موجّهة من رأس y في \bar{W} الى رأس x في W هو صفر . لان خلاف ذلك يؤدي الى انتماء y الى W . وهكذا

بموجب المأخوذة (6-1) ينتج .

$$q = \phi(W, W) - \phi(W, W) = \phi(W, W) = \psi(S).$$

وبهذا يتم البرهان . ■

تفيدنا مبرهنة السيل الاعظمي والقاطعة الاصغرية في التحقق فيما اذا كان سيل ما اعظماً او انه غير اعظمي ، ولكنها لا تفيدنا في ايجاد سيل اعظمي . وهكذا ، من الضروري ايجاد طريقة منظمة تمكننا من ايجاد سيل اعظمي ، وخاصة عندما تكون الشبكة غير بسيطة .

الطريقة التي نذكرها فيما يأتي تصح لشبكات فيها دالة السعة ψ دالة صحيحة القيمة ، اي ان (a) ψ هو عدد صحيح غير سالب ، لكل حافة موجهة (a). اذا كانت الشبكة ذات ساعات نسبية ، فانه يمكن بسهولة تغيير وحدة قياس السعة بحيث تصح سعة كل حافة موجهة عدداً غير سالب ، ويتم ذلك باختيار وحدة قياس جديدة تساوي $1/m$ وحدة أصلية ، علماً بان m هو المضاعف البسيط لمقامات الساعات بالوحدات الالوية .

خطوات ايجاد سيل اعظمي :

(1) بالاستناد الى الشبكة المعطاة $N = (D, \psi)$ نرسم بياناً موجهاً مساعداً ، نرمز له I ، رؤوسه هي رؤوس D نفسها ، ولكل حافة موجهة (x, y) في D نرسم في I حافتين موجهتين (x, y) و (y, x)

(2) نبدأ بسيل صحيح القيمة ، ونرمز له ϕ_0 . يمكن ان نأخذ ϕ_0 صفرياً ، ولكن كلما بدأنا بسيل ذي قيمة اكبر كلما قلبت خطوات الوصول الى سيل اعظمي . سوف نجد متتابعة من السيول $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ بحيث ان كلاً منها ذو قيمة اكبر من قيمة السيل الذي يسبقه .

(3) إذا كنا قد وجدنا السيل ϕ_i ذا قيمة q_i ، فإننا نعين لليان المساعد I دالة

قياس λ_i معرفة نسبة الى ϕ_i كالآتي : لكل حافة موجهة (x, y) في D .

$$\lambda_i(x, y) = \begin{cases} 0 , \phi_i(x, y) < \psi(x, y) & \text{عندما} \\ \infty , \phi_i(x, y) = \psi(x, y) & \text{عندما} \end{cases}$$

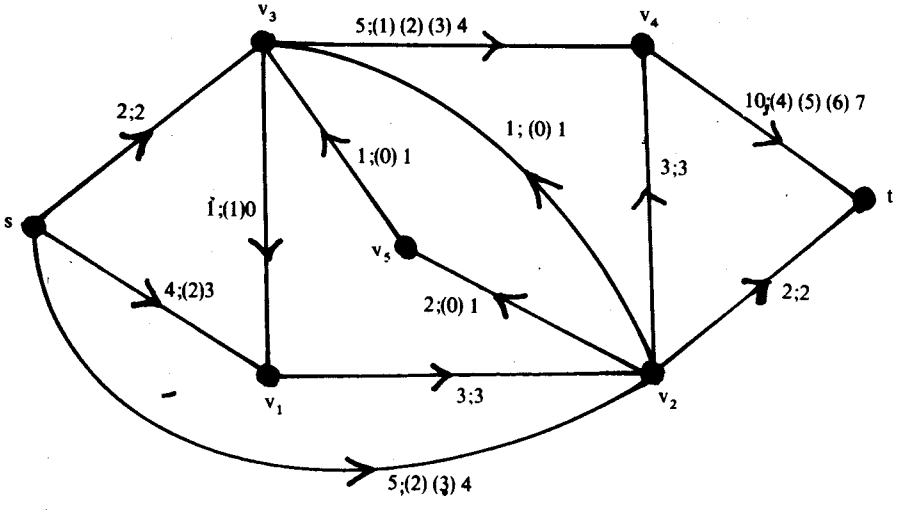
$$\lambda_i(y, x) = \begin{cases} 0 , \phi_i(x, y) > 0 & \text{عندما} \\ \infty , \phi_i(x, y) = 0 & \text{عندما} \end{cases}$$

(4) في I . نجد درباً موجهاً P_i . من المصدر s الى المصب t باصغر قياس P_i [يمكن استعمال الطريقة المشروحة في البند (3-3)] . فإذا كان قياس P_i هو ∞ . تنتهي الخطوات ويكون عندئذ ϕ_i سيلاً أعظماً . أما إذا كان قياس P_i صفراً . فعندئذ تنتقل الى الخطوة (5)

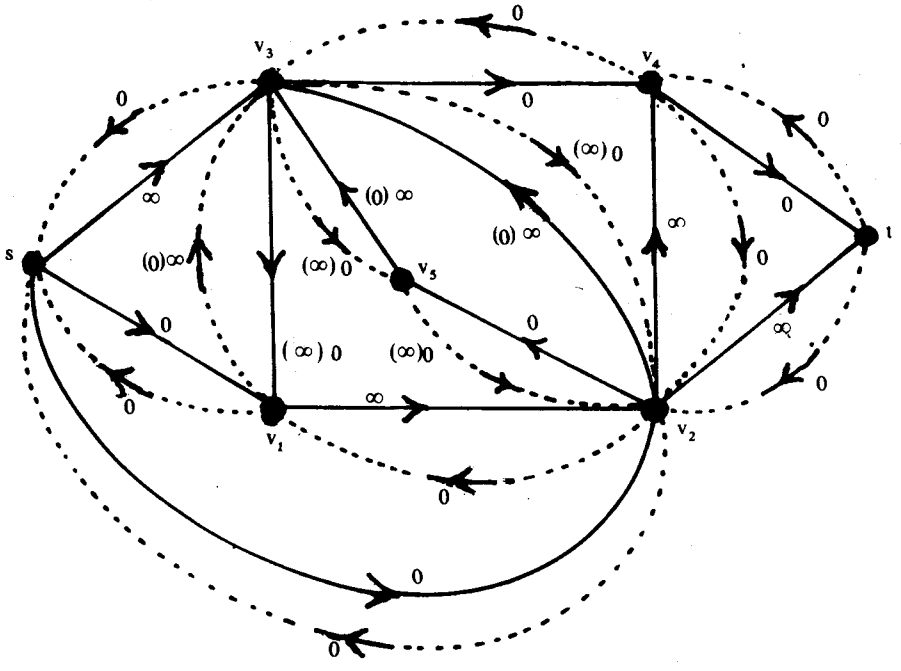
(5) عندما يكون قياس P_i صفراً . فإن P_i يؤدي الى درب ازدياد السيل ϕ_i في N بقيمة ε_i [كما سبق شرحه في برهان المبرهنة (6-1)] . وعندئذ نتوصل الى سيل ϕ_{i+1} . قيمته $q_i + \varepsilon_i$. لاحظ ان سيل الحافات الموجهة التي لاتقع على درب ازدياد السيل ϕ_i لا يتغير . وانما يتغير سيل الحافات الواقعة عليه فقط . فإذا كانت الحافة بالاتجاه من s الى t تزيد سيلها بمقدار ε_i . اما اذا كانت بالاتجاه المعاكس فنقص سيلها بمقدار ε_i .

(6) نكرر الخطوات (3) . (4) . و(5) بالنسبة للسيل ϕ_{i+1} . وهكذا حتى نحصل في الخطوة (4) على درب موجه P_k . ذي قياس ∞ . وعندئذ لا يوجد درب ازدياد للسيل ϕ_k . وبذلك يكون ϕ_k سيلاً أعظماً [انظر التمرين (3)] .

ولتوضيح خطوات طريقة ايجاد سيل أعظمي . نأخذ الشبكة N المعطاة في الشكل (6-20) . ونبدأ بالسيل ϕ_0 المعين عليها والذي قيمته 6 وحدات . ثم نرسم اليان المساعد I . كينا في الشكل (6-21) ونعين على كل حافة موجهة القياس بموجب الخطوة (3) بالنسبة للسيل ϕ_0 . لاحظ ان الحافات المستحدثة في I (اي التي لا توجد في D) وقد رسمت بخطوط منقطة لاجل التمييز .



شکل (6 - 20)



شکل (6 - 21)

بعد ذلك نجد ان هنالك في I ، وبالنسبة للسيل ϕ_0 ، درباً موجهاً

$$P_0 = \left((s, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \right)$$

قياسه يساوي صفراً . وبذلك ، فان هذا هودرب ازدياد السيل ϕ_0 بمقدار وحدة واحدة . وعليه نحصل على ϕ_1 بقيمة 7 ، وقد اجريت التغيرات على سيول حافات P_0 وكتبت الى يمين السيل ϕ_0 مع وضع السيل للقديم بين قوسين [وذلك في الشكل (6-20)] . والآن ، نغير القياسات تبعاً للسيل الجديد ϕ_1 على حافات I ، وهنا ايضاً نضع القياس القديم (في حالة تبدله) بين قوسين ، وذلك لكي لا نعيد رسم I مع قياسات جديدة لاجل اختصار الوقت والجهد .
والان ، بالنسبة للسيل ϕ_1 ، نجد في I الدرب الموجه

$$P_1 = \left((s, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \right)$$

والذي قياسه يساوي صفراً . وبذلك نحصل على درب ازدياد السيل ϕ_1 (وهو الدرب P_1 نفسه) بمقدار 1 وحدة ايضاً . وبذلك ، فان قيمة السيل الجديد ϕ_2 هي 8 وحدات . ومن ثم نغير قياسات حافات I تبعاً للسيل ϕ_2 .

واخيراً ، بالنسبة للسيل ϕ_2 . نجد في I الدرب الموجه

$$P_2 = \left((s, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \right)$$

والذي قياسه يساوي صفراً . وبذلك نحصل على درب ازدياد السيل ϕ_2 في N وهو

$$\left((s, v_1), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, t) \right)$$

والذي قيمة السيل فيه هي 1 . وهكذا . نحصل على السيل ϕ_3 الذي قيمته 9 . ومن ثم نغير قياسات حافات I تبعاً للسيل ϕ_3 .
ويمكننا الآن ان نلاحظ ان I لا يحتوي على درب موجه من s الى t بقياس صفري . وهكذا . فان ϕ_3 هو سيل أعظمي . لاحظ أن

$$\{ (s, v_3), (v_5, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, t) \}$$

هي قاطعة أصغرية . كل حافة موجهة فيها مشعبة . والحافة الموجهة (v_3, v_1) عديمة السيل

إذا كانت دالة السعة لشبكة $N = (D, \psi)$ صحيحة القيمة (أي سعة كل حافة هي عدد صحيح غير سالب) . وبدأنا بسيل ϕ_0 صحيح القيمة . وأخذنا $\varepsilon_i = 1$ في كل خطوة لزيادة السيل . فاننا نتوصل الى سيل أعظمي صحيح القيمة أيضاً . وعليه . فان لدينا البرهنة الآتية :

مبرهنة (2-6) : - مبرهنة السيل الصحيح القيمة -

إذا كانت دالة السعة ψ في شبكة $N = (D, \psi)$ صحيحة القيمة فإنه يوجد سيل أعظمي صحيح القيمة .

لدينا العديد من المبرهنات المهمة التي تنتج مباشرة من المبرهنتين (1-6) و (2-6) . نذكر بعضاً منها فيما يأتي .

يقال لدرين بين رأسين s و t في بيان G انهما متفصلا الحافات إذا لم يشتركا بأية حافة . وبالمثل نعرف الدروب الموجهة المتفصلة الحافات في بيان موجه . يقال لمجموعة S من حافات موجهة لبيان موجه D انها مجموعة قاطعة $(s:t)$ إذا كان كل درب موجه من s الى t في D يشترك بحافة موجهة واحدة على الاقل مع S . كما يقال لمجموعة قاطعة $(s:t)$ انها صغرى إذا احتوت على اقل عدد من الحافات الموجهة نسبة لكافة المجموعات القاطعة $(s:t)$. وبالمثل . نعرف مجموعة قاطعة $(s:t)$. ومجموعة قاطعة $(s:t)$ صغرى في بيان G غير موجه

مبرهنة (3-6) : اكبر عدد من الدروب البسيطة الموجهة من الرأس s الى الرأس t . علما بان $s \neq t$. والمتفصلة الحافات في بيان موجه D . يساوي عدد الحافات الموجهة في مجموعة قاطعة $(s:t)$ صغرى .

البرهان : لتكن N شبكة (D, ψ) بحيث ان $\psi(a) = 1$ لكل حافة موجهة a في D . وليكن ϕ سيلاً أعظماً من s الى t قيمته q في N . عندئذ . يكون عدد الحافات الموجهة في مجموعة قاطعة $(s:t)$ صغرى مساوياً لـ q . بموجب مبرهنة السيل الأعظمي والقاطعة الأصغرى والمبرهنة (2-6) .

ليكن p اكبر عدد من الدروب البسيطة الموجهة من s الى t والمتفصلة

الحافات في D . بما أن سعة كل حافة موجهة هي 1 . فإن كل درب موجه من s الى t يزودنا بوحدة واحدة فقط من السيل ϕ . كما أن كل وحدة سيل تشغل درباً موجهاً واحداً من مجموعة الدروب البسيطة والموجهة من s الى t والمنفصلة الحافات وعليه . فإن $p = q$. ■

يطلق احسباً على المبرهنة (3-6) صيغة الحافات الموجهة لمبرهنة منجر (Menger's theorem) . كما يطلق على المبرهنة (4-6) الآتية صيغة الحافات

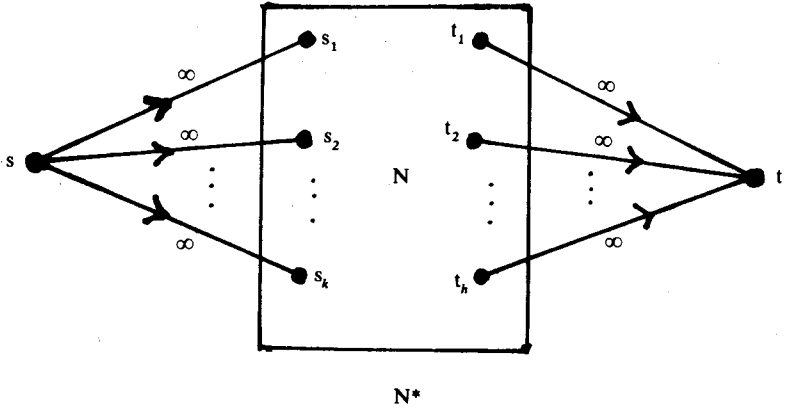
لمبرهنة منجر .

مبرهنة (4-6) : أكبر عدد من الدروب البسيطة بين رأسين s و t والمنفصلة الحافات في بيان غير موجه G يساوي عدد الحافات في مجموعة قاطعة $[s;t]$ صغرى .

البرهان : ليكن D بياناً موجهاً رؤوسه هي رؤوس G . ولكل حافة $[x,y]$ في G نرسم حافتين موجهتين (x,y) و (y,x) في D . واضح ان كل درب موجه بسيط من P من s الى t في D يقابل درباً بسيطاً واحداً فقط بين s و t . ونفس رؤوس P في G ، والعكس بالعكس . كما ان كل مجموعة قاطعة $(s;t)$ في D تقابل مجموعة قاطعة $[s;t]$ بنفس عدد الحافات في G : والعكس بالعكس . وعليه استناداً الى المبرهنة (3-6) ، فإن أكبر عدد من الدروب البسيطة بين الرأسين s و t في G والمنفصلة الحافات يساوي عدد الحافات في مجموعة قاطعة $[s,t]$ صغرى . ■

بالرغم من افتراضنا ان شبكات السيول تحتوي على مصدر واحد ومصب واحد فقط . فانه يمكننا معالجة شبكات السيول التي تحتوي على عدد من المصادر وعدد من المصببات مع السماح للسيل بالجريان من أي مصدر من هذه المصادر الى أي مصب من هذه المصببات . فاذا كانت N شبكة سيول فيها المصادر s_1, s_2, \dots, s_k والمصببات t_1, t_2, \dots, t_n ، فيمكننا ان ننشئ شبكة جديدة N^* باضافة رأس s . واعتباره مصدراً ، واطافة رأس آخر t ، واعتباره مصباً للشبكة N^* . مع اضافة حافات موجهة من s الى كل من s_1, s_2, \dots, s_k واطافة حافة موجهة من كل من المصببات t_1, t_2, \dots, t_n الى t ، واطافة سعة ∞ الى كل من هذه الحافات المضافة [انظر الشكل (6-22)] . عندئذ ، نلاحظ ان اي سيل اعظمي من s الى t في N^* هو سيل اعظمي من المصادر s_1, s_2, \dots, s_k الى المصببات t_1, t_2, \dots, t_n في الشبكة N ، والعكس بالعكس .

كما ان أية قاطعة أصغرية ، بالنسبة الى s و t ، في N^* هي قاطعة أصغرية في N تقطع كل الدروب الموجهة من أي مصدر الى أي مصب .



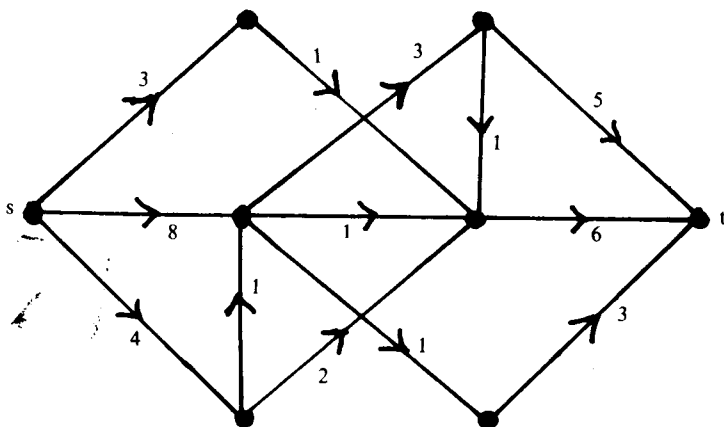
شكل (6 - 22)

أن ماذكرناه في هذا البند عن شبكات السيول هو جزء يسير مما هو معروف عن هذا الموضوع ويمكن للقارئ الراغب الاطلاع على المزيد في المصدر [4] .

تمارين (6 - 5)

- (1) جد سبلاً أعظمية للشبكة المعطاة في الشكل (6 - 18) . ثم اذكر القاطعة الاصغرية المقابلة للسبيل الاعظمي الذي وجدته .
- (2) جد سبلاً أعظمية للشبكة المعطاة في الشكل (6 - 23) واثبت أنه يحقق مبرهنة السبيل الاعظمي والقاطعة الاصغرية .
- (3) اثبت أن ϕ سبيل أعظمي اذا واذا فقط لا يوجد درب ازدياد السبيل في الشبكة N بالنسبة ل ϕ
- (4) اثبت أن قاطعة (X, \bar{X}) في شبكة N تكون اصغرية اذا واذا فقط كل سبيل أعظمي ϕ يُشعب كل الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس

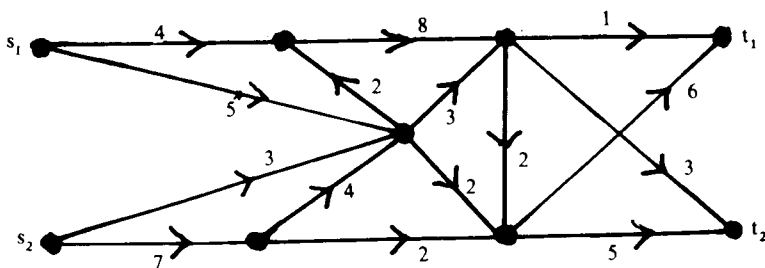
في \bar{X} ؛ بينما كل الحافات الموجهة من رأس في \bar{X} الى رأس في X تكون
 عديمة السيل بالنسبة الى ϕ .



شكل (6-23)

(5) جد كل الدروب البسيطة الموجهة من s الى t والمنفصلة الحافات للبيان
 الموجه المعطى في الشكل (6-23) . مع اهمال ساعات حافته .

(6) جد سيلاً اعظماً للشبكة المعطاة في الشكل (6-24) وهي التي فيها مصدران
 s_1, s_2 ومصبات t_1, t_2 . علماً بأنه يسمح للسيل بالجريان من اي من
 المصدرين الى اي مصب من المصبين . بعد ذلك . اذكر القاطعة الاصغرية التي
 تفصل s_1, s_2 عن t_1, t_2 والمقابلة للسيل الأعظمي الذي وجدته .



شكل (6-24)

(6 - 6) تحليل الشبكات الكهربائية

(Analysis of Electrical Networks)

نشرح في هذا البند كيفية استخدام البيانات الموجهة لاستنباط معلومات اساسية عن مجمل شبكة كهربائية عندما تتوفر لدينا معلومات عن عناصرها (مركباتها) وعن طريقة ارتباط تلك العناصر فيما بينها .

تتألف الشبكة الكهربائية التي نبحثها من عناصر ذات طرفين . وهذه العناصر هي :
 مقاومات (resistors) ، ومتسعات (capacitors) ومحثات (inductors) ومولدات فولتية أوتارية (voltage or current generators) .
 لكل من هذه العناصر متغيران هما التيار (the current) والفولتية (the voltage) .
 ولكل منها معادلة دستورية تربط الفولتية مع التيار . في واقع الحال ، كل من التيار والفولتية دالة للزمن t حقيقية القيمة .

نرمز للشبكة الكهربائية بالحرف N ولعناصرها بـ E_1, E_2, \dots, E_m كما نرمز لمتغير تيار العنصر E_k بـ i_k ، ولمتغير فولتيته بـ v_k . تعرف المعادلات الدستورية لعناصر N كالآتي :

$$v_k = R_k i_k \quad \text{مقاومة} \quad E_k \quad \text{إذا كان}$$

$$v_k = L_k \frac{d}{dt} i_k \quad \text{محثاً} \quad E_k \quad \text{إذا كان}$$

$$v_k = C_k \int_{t_0}^t i_k dt \quad \text{متسماً} \quad E_k \quad \text{إذا كان}$$

$$v_k = f_k(t) \quad \text{مولداً للفولتية} \quad E_k \quad \text{إذا كان}$$

$$i_k = g_k(t) \quad \text{مولداً للتيار} \quad E_k \quad \text{إذا كان}$$

علماء بان R_k, L_k, C_k ثوابت

يمكننا تمثيل الشبكة الكهربائية كبيان موجه حافته هي عناصر N ورؤوسه هي نقاط ارتباط (junction points) تلك العناصر. كما تقرن كل حافة موجهة بمتغير التيار ومتغير الفولتية للعنصر الذي تمثله. يمكن اختيار اتجاه الحافات للبيان الذي يمثل N كيفياً. على أن تبقى تلك الاتجاهات دون تغيير لحين انتهاء تحليل الشبكة الكهربائية. يزودنا هذا التمثيل بوصف مناسب لتركيب الشبكة الكهربائية. الميزة الجوهرية لمتغيرات التيار هي أنها تحقق الفرضية المعروفة بقانون كرشوف (Kirchhoff law) للتيار. والتي تنص على

فرضية الرؤوس (قانون كرشوف للتيار) :

لكل رأس u . يكون المجموع الجبري لمتغيرات التيار المقترنة بالحافات الموجهة الواقعة على u صفراً «

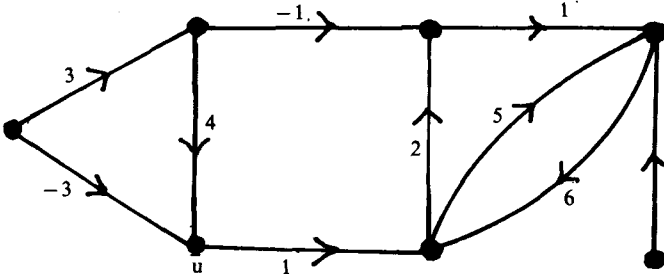
يقصد بالمجموع الجبري ما يأتي : يضاف متغير التيار اذا كانت الحافة الموجهة المقترن بها خارجة من الرأس u . ويطرح اذا كانت داخلة اليه .

فمثلاً، في الشكل (6-25) تتحقق هذه الفرضية عند الرأس u ، لان

$$1 - (-3) - 4 = 0.$$

كما يمكن التأكد من أنها تتحقق عند كل رأس من الرؤوس الباقية في هذا البيان .

لاحظ أن الاشارة السالبة لقيمة التيار تدل على أنه يمر بالاتجاه المعاكس لاتجاه الحافة المقترن بها .



شكل (6-25)

المتغيرات الفولتية تحقق أيضاً فرضية تعرف بقانون كرشوف للفولتية . وهي التي

تنص على

فرضية الدارات (قانون كرشوف للفولتية) :

« لكل دارة بسيطة . يكون المجموع الجبري لمتغيرات الفولتية المقترنة بالحافات .

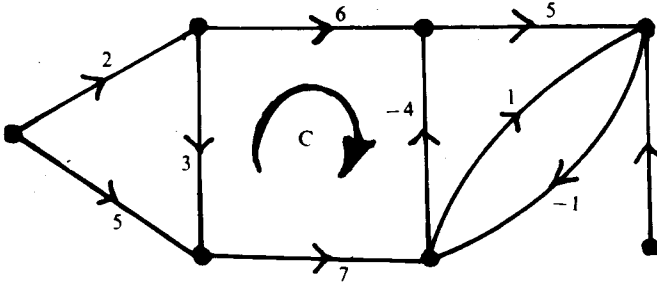
الموجهة لتلك الدارة صفراً. »

في هذه الحالة . نفترض أن لكل دارة بسيطة اتجاهها معيناً بالاسلوب الذي سبق أن ذكرناه في البند (3 - 4) وعندئذ . يضاف متغير الفولتية إذا اتفق اتجاه الحافة الموجهة المقترن بها مع اتجاه الدارة . ويطرح إذا كان اتجاه الحافة معاكساً لاتجاه الدارة . فمثلاً .

في الشكل (6 - 26) تتحقق هذه الفرضية بالنسبة للدارة البسيطة C . لان

$$6 - (-4) - 7 - 3 = 0 .$$

كما يمكن التأكد من أنها تتحقق نسبة لكل دارة بسيطة في « ا. البيان .



شكل (6 - 26)

سنفرض أن الشبكة الكهربائية متصلة . أي أن البيان الموجه الذي يمثلها هو بيان

متصل .

يمكن وضع فرضية الدارات بصيغة أخرى مكافئة لها . وهي : « إذا كان u_1 رأساً

معيناً . وكان u_2 أي رأس آخر . فإن المجموع الجبري لمتغيرات الفولتية المقترنة بالحافات

الموجهة لأي درب بسيط من u_1 الى u_2 (أي . نقرن بالدرب اتجاههاً من u_1 الى u_2)

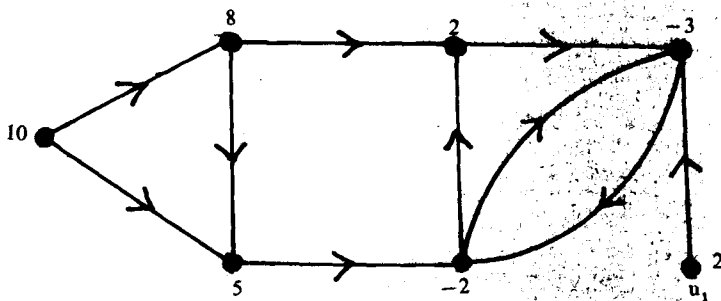
لا يعتمد على الدرب الذي اخترناه . « استناداً الى هذه الصيغة لفرضية الدارات . يمكننا

تعيين مقدار لكل رأس u_1 . كما هو مبين فيما يأتي :

نعين مقداراً كيفياً S_i ، للرأس u_i ، وهو الذي نعتبره المصدر ، واستناداً إلى u_1 نعين لكل رأس آخر u_i ، المقدار

$$S_i = S_1 - K_i .$$

علماً أن K_i هو المجموع الجبري للمتغيرات الفولتية المقترنة بالخافات الموجهة لأي درب من u_1 إلى u_i . في واقع الامر ، تعتبر القيمة S_i جهداً لـ u_i نسبة إلى جهد المصدر u_1 . وعليه ، فإن قيم المتغيرات الفولتية هي فروق في الجهد الكهربائي . فمثلاً ، الاعداد المقترنة برؤوس البيان الموجه المبين في الشكل (6-27) تمثل جهود تلك الرؤوس للبيان المعطى في الشكل (6-26) نسبة إلى المصدر u_1 ، بافتراض أن جهد u_1 هو 2 .



شكل (6-27)

تكون طريقة استنباط معادلات عامة تصف مجمل الشبكة الكهربائية N (من المعادلات الدستورية ومن تركيب N) من خطوتين اساسيتين .

الخطوة الاولى : استخدام فرضيتي الرؤوس والدارات لاختزال متغيرات التيار (أو متغيرات الفولتية) إلى أصغر مجموعة مستقلة من المتغيرات بحيث يمكن التعبير عن كافة المتغيرات بـ N .

الخطوة الثانية : استعمال المعادلات الدستورية لعناصر N لاجل التوصل إلى علاقة متبادلة بين متغيرات التيار ومتغيرات الفولتية .

نبدأ الآن بالخطوة الاولى

لتكن B مجموعة الرؤوس للبيان الموجه D الذي يمثل N ، ولتكن

$$I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}$$

عندئذ يمكن التعبير عن فرضية الرؤوس بالصيغة المصفوفية

$$\bar{B}I = O, \quad \dots (1)$$

علماً ان m هو عدد حافات D وان \bar{O} مصفوفة عمودية صفرية سعتها $m \times 1$.

بما ان مرتبة \bar{B} هي نفس مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة \bar{K} [بموجب المبرهنتين (1-2) و (3-13)]، وبما ان أسطر \bar{B} هي تشكيلات خطية لاسطر \bar{K} ، فان فضاء المتجهات المتولد باسطر \bar{B} هو ذاته فضاء المتجهات المتولد باسطر \bar{K} . ولذلك، فان اسطر \bar{K} هي تشكيلات خطية لاسطر \bar{B} . وهكذا فان العلاقة (1) تؤدي الى

$$\bar{K}I = \bar{O}, \quad \dots (2)$$

لتكن T أية شجرة مولدة للبيان D . باستعمال رموز ومفاهيم البند (3-4)، يمكننا كتابة مصفوفة المجموعات القاطعة الاساسية، \bar{K}_f ، ومصفوفة الدارات الاساسية، \bar{C}_f نسبة للشجرة T ، بالصيغة الآتية:

$$\bar{K}_f = [\bar{K}_{f11} \quad U_{n-1}],$$

$$\bar{C}_f = [U_{m-n+1} \quad \bar{C}_{f12}].$$

والان، نجزيء مصفوفة التيار، I ، وفقاً لتجزئة اعمدة كل من \bar{K}_f و \bar{C}_f ، اي ان

$$I = \begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix},$$

علمًا ان I_c تمثل تيارات اوتار T، وان I_b تمثل تيارات اغصانها .

من العلاقة (2) ، نجد ان فرضية الرؤوس تؤدي الى

$$[\bar{K}_{f11} \quad U_{n-1}] \begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix} = \bar{O}.$$

ومنها نتوصل الى

$$I_b = -\bar{K}_{f11} I_c = \bar{C}'_{f12} I_c, \quad (3)$$

وذلك بموجب (3 - 3).

وهكذا . يمكننا التعبير عن تيارات الاغصان بدلالة تيارات الاوتار . اي ان معرفة تيارات الاوتار يكفي لتعيين تيارات الاغصان بالاستعانة بـ \bar{C}'_{f12} التي يمكن كتابتها مباشرة من البيان D .

وبالمثل ، فان فرضية الدارات تنص على

$$\bar{C} V = \bar{O},$$

علمًا ان \bar{C} هي مصفوفة الدارات للبيان D . وان V هي المصفوفة العمودية التي تمثل متغيرات الفولتية . اي ان

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

ولذلك فان

$$\bar{C}_f V = \bar{O}.$$

(4)

وبتجزئة V كما اجرينا لـ I . أي

$$V = \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix}$$

علمًا ان V_c تمثل متغيرات الفولتية لاوتار الشجرة المولدة T . وان V_b تمثل متغيرات الفولتية لاغصانها .

من العلاقة (4) . نجد ان فرضية الدارات تؤدي إلى

$$[U_{m-n-1} \bar{C}_{f12}] \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix} = \bar{O},$$

أي ان

$$V_c + C_{f12} V_b = \bar{O}.$$

وهكذا ، بموجب العلاقة (3 - 3) ، نتوصل إلى

$$V_c = - \bar{C}_{f12} V_b = \bar{K}'_{f11} V_b. \dots (5)$$

أي ، يمكن التعبير عن متغيرات الفولتية للأوتار بدلالة متغيرات الفولتية لأغصان الشجرة المولدة T.

إن تطبيق العلاقتين (3) ، (5) يشكل الخطوة الأولى في تحليل الشبكة الكهربائية ، وهي اختزال عدد متغيرات التيار ومتغيرات الفولتية التي يجب معالجتها إلى أقل عدد ممكن . بالطبع إن إيجاد هذه المتغيرات ، لكل من الفولتية والتيار ، يعتمد على الشجرة المولدة التي نختارها .

نشرح فيما يأتي الخطوة الثانية من تحليل الشبكة الكهربائية .

من المناسب استعمال صيغة المصفوفات للتعبير عن المعادلات الدستورية لعناصر الشبكة الكهربائية .

ف عندما لا تحتوي N على مولدات للتيار ، يمكننا أن نعبّر عن متغيرات الفولتية بدلالة متغيرات التيار ، أي أن

$$V = Z I + V_g, \dots (5 - 6)$$

علماً أن Z هي مصفوفة قطرية بسعة $m \times m$ ، فيها العنصر في الموقع (k, k) هو R_k إن كان E_k مقاومة ، $L_k \frac{d}{dt}$ إن كان E_k ، محثاً ، $C_k \int_{t_0}^t dt$ إن

كان متسعاً ، وصفراً إن كان E_k مولد فولتية . أما V_g فهو مصفوفة عمودية عنصرها في السطر k هو $f_k(t)$ إن كان العنصر E_k مولد فولتية ، ويكون صفراً فيما عدا ذلك (أي عندما يكون العنصر غير مولد - passive) . يطلق على العلاقة (5 - 6) تحويلات العقد (node transformations) .

وعندما لا تحتوي N على مولدات للفتولية ، فيمكننا ان نعتبر عن متغيرات التيار بدلالة متغيرات الفتولية ، أى ان

$$I = YV + I_g \quad (6-6)$$

علماً ان Y هي مصفوفة قطرية بسعة $m \times m$ فيها العنصر في الموقع (k, k) هو $1/R_k$ ان كان E_k مقاومة ، $\int_{t_0}^t (1/L_k) dt$ ان كان E_k محثاً $(1/C_k) \frac{d}{dt}$

ان كان E_k متسماً ، و صفرأً ان كان E_k مولد تيار . أما I_g فهو مصفوفة عمودية عنصرها في السطر k هو $g_k(t)$ عندما يكون E_k مولد التيار ، ويكون صفرأً فيما عدا ذلك . يطلق على المعادلة (6-6) تحويلات اللغات (loop transformations) .

في تحليل العقد (node analysis) للشبكات الكهربائية ، نستعمل المعادلة (5-6) مع العلاقة (3) فتتوصل الى

$$V = Z \begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix} + \underline{V}_g = Z \begin{bmatrix} I_c \\ \bar{C}_{f12} I_c \end{bmatrix} + \underline{V}_g .$$

وهكذا ، نستنتج أن

$$V = Z \bar{C}'_f I_c + \underline{V}_g .$$

ويضرب الطرفين من اليسار بـ C_f ، ينتج

$$C_f V = C_f Z C_f I_c + C_f \underline{V}_g$$

وباستعمال العلاقة (4) ، نتوصل الى

$$(C_f Z C_f) I_c = - C_f \underline{V}_g \quad \dots (7-6)$$

والتي فيها المجاهيل هي متغيرات تيارات الاوتار فقط . واضح أن (6-7) هي معادلات تفاضلية - تكاملية (integro-differential equations) ،

ويستعمل عادة تحويل لابلاس لاجل تحويلها الى جملة معادلات جبرية خطية مجاهيلها هي تحويلات لابلاس لتيارات الاوتار . وبحلها نحصل على تيارات الاوتار ، ثم باستعمال العلاقة (3) نحصل على تيارات الاغصان ، وبذلك يتم تحليل الشبكة الكهربائية . ولمعرفة المزيد عن هذا الموضوع ، يمكن للقارئ الاطلاع على المصدرين [8, 10] .

وفي تحليل اللغات (loop analysis) للشبكات الكهربائية ، نستعمل المعادلة (6-6) مع العلاقة (5) فتتوصل الى

$$I = Y \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix} + I_g = Y \begin{bmatrix} \bar{K}'_{f11} & \\ & V_b \end{bmatrix} + I_g$$

$$I = Y \bar{K}'_f V_b + I_g.$$

وهكذا .

ويضرب الطرفين من اليسار بـ \bar{K}_f ، ينتج

$$\bar{K}_f I = (\bar{K}_f Y \bar{K}'_f) V_b + \bar{K}_f I_g$$

وباستعمال العلاقة (2) ، نتوصل الى

$$(\bar{K}_f Y \bar{K}'_f) V_b = - \bar{K}_f I_g \quad \dots (8-6)$$

والتي فيها المجاهيل هي متغيرات الفولتية للاغصان فقط . وبحلها واستعمال العلاقة (5) نحصل على متغيرات الفولتية لكافة عناصر الشبكة الكهربائية .

الفصل السابع

تطبيقات اخرى على مبرهنة هول

نذكر في هذا الفصل القصير بعض استخدامات مبرهنة هول في مواضيع اخرى في رياضيات . كنظرية المستعرض والمستطيلات اللاتينية .

(1 - 7) نظرية المستعرض (Transversal Theory) :

إذا كانت E مجموعة منتهية غير خالية . وكانت

$$S = (S_1 . S_2 \dots S_m)$$

عائلة من مجموعات جزئية غير خالية - لا يشترط أن تكون مختلفة - للمجموعة E . فان مستعرض S هو مجموعة T مكونة من m من عناصر E المختلفة بحيث إن :

- (أ) كل عنصر في T ينتمي الى إحدى المجموعات الجزئية $S_1 . S_2 \dots S_m$
 (ب) يوجد في T عنصر واحد على الأقل من كل من هذه المجموعات الجزئية .

واضح أن مسألة الزواج ماهي الامثال في نظرية المستعرض . ومثل آخر . تأمل المجموعة

$$E = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11 \} .$$

ولكن

$$S_1 = \{ 1, 5 \} . S_2 = S_3 = \{ 3, 5, 7 \} . S_4 = \{ 5 \}$$

$$S_5 = \{ 1 \} . S_6 = \{ 3, 9 \} .$$

تلاحظ عدم وجود ستة عناصر مختلفة بحيث أن كل عنصر ينتمي الى احدى هذه المجموعات الجزئية الست . وبذلك لا يوجد للعائلة

$$S = (S_1 . S_2 \dots S_6)$$

مستعرض . ولكن . اذا أخذنا العائلة الجزئية

$$(S_1 . S_2 . S_3 . S_4 . S_6)$$

من العائلة S . نجد أن لها مستعرض $\{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$.

يطلق عادة على مستعرض العائلة الجزئية من S اسم مستعرض جزئي (partial transversal) . في واقع الحال . كل مجموعة جزئية من مستعرض S هي مستعرض جزئي

S لـ

من الطبيعي أن يسأل عن الشروط التي تحققها عائلة S لمجموعات جزئية بحيث يكون لها مستعرض . إن الصلة بين هذه المسألة ومسألة الزواج واضحة جداً ، وذلك بأخذ E مجموعة كافة البنات ، وأخذ S_i مجموعة البنات اللاتي يعرفهن الابن b_i . وبذلك فإن مبرهنة هول تزودنا بشرط ضروري وكاف لوجود مستعرض لـ S . وهكذا ، يمكننا إعادة صياغة مبرهنة هول باستعمال مفاهيم نظرية المستعرض كالتالي :

«لتكن E مجموعة منتهية غير خالية ، ولتكن
 $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$

عائلة مجموعات جزئية من E غير خالية . عندئذ يكون لـ S مستعرض اذا واذا فقط مجموعة اتحاد أي k من المجموعات الجزئية S_i تحتوي على الاقل على k من العناصر، لكل

$$1 \leq k \leq m$$

(7-2) المستطيلات اللاتينية (Latin Rectangles) :

من الاستخدامات الاخرى لمبرهنة هول استعمالها في المستطيلات اللاتينية.

يقال لمصفوفة $M = [m_{ij}]$ بسعة $m \times n$ إنها مستطيل لاتيني $m \times n$ اذا كان :

- (أ) عناصر M اعداد صحيحة . وان $1 \leq m_{ij} \leq n$ ؛
 (ب) لا يوجد عنصران متساويان يقعان في نفس السطر أو في نفس العمود . أي أن عناصر كل سطر (عمود) تكون مختلفة .

بما ان

$$1 \leq m_{ij} \leq n .$$

فان الشرط (ب) يؤدي الى $m \leq n$

اذا كان $m = n$. فعندئذ يطلق على المستطيل اللاتيني مربع لاتيني (latin square)

مثال : المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مستطيل لاتيني 6×4 . وان المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

هي مربع لاتيني 4×4 .

باعتراضنا الآن السؤال الآتي: «إذا كان لدينا مستطيل لاتيني $m \times n$ ، $m < n$. فهل يمكننا ان نضيف اليه $(n-m)$ من الاسطر الجديدة بحيث ينتج مربع لاتيني $n \times n$ ؟»
المبرهنة الآتية تبين ان ذلك ممكناً دائماً.

مبرهنة (1-7): ليكن M مستطيلاً لاتينياً $m \times n$ مع $m < n$. عندئذ يمكن توسيع M الى مربع لاتيني $n \times n$ باضافة $(n-m)$ من الاسطر الجديدة.

البرهان: سنبرهن على انه يمكن توسيع M الى مستطيل لاتيني $(m+1) \times n$ باضافة سطر جديد الى M .

لتكن

$$E = \{ 1, 2, \dots, n \}, S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$$

علماً أن S_i هي مجموعة كل عناصر E التي لاتنتهي الى العمود i رقم i في M . سنبرهن على وجود مستعرض L في S .

بموجب مبرهنة هول . يكفي أن نبرهن على أن مجموعة الاتحاد U لاي k من المجموعات الجزئية S_i يحتوي على ما لا يقل عن k من عناصر E . في

واقع الامر، كل S_i تحتوي على $(n - m)$ من العناصر المختلفة . وبذلك فان عائلة اتحاد k من المجموعات الجزئية تحتوي على $k(n - m)$ من العناصر (بسبب احتساب تكرار العناصر) . ولما كانت عناصر أي سطر في M مختلفة . فانه لا يوجد عنصر في عائلة الاتحاد هذه متكرر اكثر من $(n - m)$ من المرات . وهكذا فان العناصر في مجموعة الاتحاد U لا يقل عن k . وبهذا . فانه يوجد مستعرض لـ S . يضاف كسطر برقم $m + 1$ الى المصفوفة M . فنحصل على مستطيل لاتيني $(m + 1) \times n$.

وهكذا . يمكننا توسيع M الى مربع لاتيني $n \times n$ وذلك بتكرار تطبيق الاسلوب الذي شرحناه في أعلاه $(n - m)$ من المرات مبتدئين بـ M . وبإضافة سطر جديد واحد في كل مرة . ■

❀ (7 - 3) مبرهنة كونيك - اجيرفاري

هنالك استخدام آخر لمبرهنة هول نشرحه فيما يأتي. لتكن $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ عائلة من مجموعات جزئية غير خالية لمجموعة $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مصفوفة الوقوع للعائلة S تعرف بانها مصفوفة $A = [a_{ij}]$ بسعة $m \times n$ بحيث ان $a_{ij} = 1$ اذا كان $e_j \in S_i$. وفيما عدا ذلك فان $a_{ij} = 0$. يطلق على هكذا مصفوفة . وهي التي عناصرها 0 أو 1 مصفوفة $(0,1)$.

يعرف الرمز $R(A)$. وهو الذي يطلق عليه مرتبة A ، بانه اكبر عدد من عناصر A التي قيمة كل منها 1 والتي لا يقع اي اثنين منها في نفس السطر او في نفس العمود . عندئذ . يكون لـ S مستعرض اذا واذا فقط كان $R(A) = m$. إضافة الى ذلك . فان $R(A)$ هو بالضبط عدد العناصر في أوسع مستعرض جزئي ممكن لـ S . والآن نستخدم مبرهنة هول لاثبات المبرهنة الآتية المعروفة بمبرهنة كونيك - اجيرفاري (König - Egervary theorem) .

مبرهنة (2-7) - مبرهنة كونيك - اجيرفاري (سنة 1931) :

اذا كانت A مصفوفة $(0,1)$. فان $R(A)$ هو العدد الاصغر . μ . لاسطر واعمدة A التي تحتوي سوية على كل عناصر A غير الصفرية .

البرهان : واضح ان

$$R(A) \leq \mu.$$

لا ثبات ان

$$\mu \leq R(A)$$

يمكننا ان نفرض . بدون تخصيص . ان كل العناصر غير الصفرية في A محتواة في r من الاسطر و s من الاعمدة . حيث ان $\mu = r + s.$

يمكننا ترتيب الاسطر والاعمدة بحيث تصبح A بالصيغة

$$A = \left[\begin{array}{ccc} M_1 & \vdots & M_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{O} & \vdots & M_3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r \\ \\ m-r \end{array}$$

حيث ان \bar{O} مصفوفة صفرية بسعة $(m-r) \times (n-s)$

والآن . نعرف S_i . حيث $1 \leq i \leq r$. بأنها مجموعة الاعداد الصحيحة بحيث أن $a_{ij} = 1$ و $j \leq n-s$

اذا كان اتحاد k من المجموعات S_i يحتوي على t من العناصر . وان $t < k$. فانه يمكن اخذ الاعمدة التي تقابل هذه العناصر مع اعمدة M_2 . ويتبع ذلك وجود k من الاسطر الصفرية في الجزء الباقي من M_1 وهذه تؤخذ مع اسطر \bar{O} وهكذا يمكننا اعادة تجزئة A . بعد اعادة ترتيب الاسطر والاعمدة . بالصيغة :

$$\left[\begin{array}{ccc} M'_1 & \vdots & M'_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{O}' & \vdots & M'_3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r-k \\ \\ m-(r-k) \end{array}$$

ومنه نستنتج أن هناك $(r+s)-(k-t)$ من الاسطر والاعمدة التي تحتوي سوية على كل العناصر ذات القيمة 1 في A . وهذا يناقض افتراضنا ان

$$\mu = r + s$$

هو العدد الاصغر من الاسطر والاعمدة التي تحتوي سوية على كل العناصر ذات القيمة 1 في A . و لذلك . فان اتحاد أي k من المجموعات S_i يحتوي على ما لا يقل عن k من

العناصر. وهكذا ، بموجب مبرهنة هول ، فإنه يوجد مستعرض لـ

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_r)$$

وهذا يؤدي الى أن المصفوفة الجزئية M_1 تحتوي على r من العناصر ذات القيمة 1 بحيث لا يقع أي اثنين منهم في نفس السطر أو في نفس العمود. وبالمثل ، نبرهن على أن المصفوفة الجزئية M_3 تحتوي على s من العناصر ذات القيمة 1 بحيث لا يقع أي اثنين منها في نفس السطر أو في نفس العمود.

وهكذا ، فإن المصفوفة A تحتوي على $(r + s)$ من العناصر ذات القيمة 1 بحيث لا يقع أي اثنين منها في نفس السطر أو في نفس العمود. وبذلك ، فإن

$$\mu \leq R(A)$$

وبهذا يتم البرهان

لقد أثبتنا مبرهنة كونيك - اجيرفاري باستخدام مبرهنة هول ، ويمكننا أيضاً أن نثبت [انظر تمرين (6)] مبرهنة هول باستخدام مبرهنة كونيك - اجيرفاري .

تمارين

(1) العوائل في كل من الفروع الآتية مكونة من مجموعات جزئية من المجموعة

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} .$$

عين منها العوائل التي لها مستعرضات :

- (a) $(\{ 2 \} , \{ 3, 4 \} , \{ 1, 5 \} , \{ 3, 5 \}) :$
 (b) $(\{ 1, 2 \} , \{ 2 \} , \{ 2, 3 \} , \{ 1, 3 \} , \{ 4, 5, 6 \}) :$
 (c) $(\{ 1, 2 \} , \{ 3, 4 \} , \{ 2, 5 \} , \{ 4, 5 \} , \{ 3, 4, 6 \} , \{ 1, 5, 6 \}) :$
 (d) $(\{ 2 \} , \{ 2, 3 \} , \{ 1, 3 \} , \{ 2, 3 \}) .$

(2) اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة E . وأن S عائلة لمجموعات

جزئية غير خالية لـ E . فاثبت انه يوجد مستعرض لـ S يحتوي على A اذا واذا فقط (أ) يوجد لـ S مستعرض . (ب) وأن A هي مستعرض جزئي لـ S .

(3) وسع المستطيل اللاتيني المعطى في المثال الى مربع لاتيني 6×6 .

(4) - لتكن C زمرة ضربية منتهية . بين انه يمكن اعتبار جدول ضربها مربعاً

لاتينياً .

ب- هل أن المربع اللاتيني

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

يمثل (وفق الكيفية التي سوف تتبعها في -أ-) جدول ضرب زمرة ؟

(5) اثبت أن هنالك على الاقل $(1!)(2!) \dots (n-1)!$ مربعاً لاتينياً

$n \times n$. واثبت ان هنالك على الاقل $1!(n-m+1) \dots (n-1)!$

مستطيلاً لاتينياً $m \times n$. علماً بان $n > m$.

(*8) برهن مبرهنة هول باستخدام مبرهنة كونيك - اجيرفاري

المصطلحات العلمية

Abstract - dual	إثنيني مجرد
Activity	فعالية
Adjacency matrix	مصفوفة التجاور
Adjacent	متجاور
Algorithm	خوارزمية
Anti - symmetric	لاتناظري
Arbitrary	كيفي (اختياري)
Arborscence	شجرانية
Articulation point	نقطة مفصل
Automorphism	تشاكل ذاتي
Bipartite graph	بيان ثنائي التجزئة
Bond	أصرة
Branch	غصن
Capacitor	متسع
Capacity	سعة
Chain	درب
Chord	وتر
Chromatic polynomials	حدوديات التلوين
Circuit	دائرة
Coforest	تنمة غابة
Coloration	تلوين
Complete graph	بيان تام
Complementary	متمم
Composition	تركيب
Connected	متصل
Connectedness	إتصال
Cotree	تنمة شجرة

Counter example	مثال مناقض (مصاد)
Critical	حرج
Crossing	تقاطع
Cubic graph	بيان تكعيبي
Current	تيار
Curve	منحنٍ
Cut – set	مجموعة قاطعة
Cycle	دائرة (أودورة)
Cyclomatic number	رقم دوراني
Degree	درجة
Demi – degree	شبه درجة
Diameter	قطر
Directed	موجه
Disconnected	غير متصل (منفصل)
Disjoint	منفصل
Distance	مسافة
Dodecahedron	ذوالاثني عشر سطحاً
Dual graph	بيان اثنيبي
Duality	اثنيبية (ثنوية)
Eccentricity	اختلاف مركزي
Edge	حافة
Embedding	غمر
Event	حدث
Exterior face	وجه خارجي
Face	وجه
Family tree	شجرة العائلة
Finite	منتهي
Flow	سيل
Forest	غابة
Four – color problem	مسألة الالوان الاربعة

Generator	مولد
Genus	جنس
Girth	خصر
Graph	بيان
Handle	مقبض
Hand shaking lemma	مأخوذة المصافحة
Homeomorphic	متكافئ توبولوجياً
Identification	تطابق
Incidence matrix	مصفوفة الوقوع
Incident with	واقع على
Independent	مستقل
Inductor	محث
Infinite	غير منته
Initial vertex	رأس ابتدائي (رأس الابتداء)
Inter change	مناقلة (تحويل داخلي)
Isolated	منعزل
Isomorphic	متشاكل
Isthmus	برزخ
Labelled graph	بيان موسوم
Latin rectangle	مستطيل لاتيني
Lemma	مأخوذة (مصادرة)
Loop	لفة
Map	خارطة
Matching	تواوج (أو توافق)
Maximal	أعظمي
Measure	قياس
Metric axioms	بديهيات المتر (او البعد)
Minimal	أصغري
Minimal covering	تغطية اصغرية
Multigraph	بيان مضاعف

Multiple edge	حافة مضاعفة
Network	شبكة
Node	عقدة
Non – separable	غير قابل للانفصال
Null – graph	بيان تافه
Octahedron	ثمانى السطوح
Order	رتبة
Orientable surface	سطح موجه
Partial	جزئي
Passive	غير فعال (خامل)
Path	درب (او درب موجه)
Planar graph	بيان مستو
Platonic graphs	بيانات أفلاطونية
Polyhedra	متعدد السطوح
Projection	إسقاط
Rank	مرتبة
Reachable	قابل الوصول
Reduced	مختصر
Reducible	قابل الاختزال (الاختصار)
Reference	مصدر
Region	منطقة
Regular	منتظم
Removal	ازالة
Ring	حلقة
Root	جذر
Rooted tree	شجرة جذرية
Saturated	مشبع
Section graph	بيان مقطعي
Self – complementary	متمم ذاتي
Self – dual	اثنيني – ذاتي
Separable	قابل الانفصال

Simple graph	بيان بسيط
Simplex	مبسط
Sink	مصب
Skeleton	هيكل
Slack activity	فعالية متراخية
Source	مصدر أو منبع
Spanning tree	شجرة مولدة
Status	منزلة
Subgraph	بيان جزئي
Surface	سطح
Symmetric	متناظر
Terminal vertex	رأس نهائي (رأس الانتهاء)
Thickness	سمك
Toroidal graph	بيان طري
Torus	طرة
Transformation	تحويل
Transversal	مستعرض
Traversable	قابل الاجتياز
Tree	شجرة
Unavoidable set	مجموعة لا تجنبيه
Unbounded face	وجه غير محدود
Undirected graph	بيان غير موجه
Union	اتحاد
Unsaturated	غير مشبع
Vertex	رأس
Voltage	فولتية
Walk	مسار
Wheel	عجلة

المراجع

- (1) Appel, K., and Haken, W. : "Every Planar Map is Four Colorable," Illinois J. Math., Vol.21, (1977).
- (2) Berge, C.: "Theory of Graphs and Its Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
- (3) Berge, C.: "Graphs and Hypergraphs," North- Holland, London, 1973.
- (4) Busacker, R. G., and Saaty, T.L.: "Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications," Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1965.
- (5) Ford, L.R., Jr., and Fulkerson, D.R.: "Flows in Networks," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962.
- (6) Harary, F.: "Graph Theory," Addison-Wesley, Reading, 1971.
- (7) Harary, F., editor : " New Directions in the Theory of Graphs ," Academic Press, New York, 1973.
- (8) Kim, W. H., and Chien, R. T. W. : "Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks", Columbia University Press, New York, 1962.
- (9) Maxwell, L. M. & Reed, M. B. : " The Theory of Graphs : A Basis for Network Theory " , Pergamon Press, New York, 1971.
- (10) Seshu, S. & Reed, M. B. : " Linear Graphs and Electrical Networks, " Addison -Wesley, Inc. Reading, 1961 .
- (11) Ore, O. : " The Four - Color Problem, " Academic Press, New York, 1967.
- (12) Ore, O. : " Theory of Graphs, " 3 rd. ed., Am. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. 38, Providence, 1967.
- (13) Wilson, R. J. : " Introduction to Graph Theory, " Oliver and Boyd, 1972.