جامعة ديالى
كلية التربية الاساسية
قسم الحاسبات

هياكل متقطعة

المرحلة الاولى

(1)

كلية التربية الاساسية - جامعة ديالى

رياضيات مرحلة اولى / قسم العلوم

المنطق الرياضي Mathematical Logic

المنطق الرياضي: هو كتابة العبارات الرياضية في صورة رمزية مع وضع قواعد اساسية سهلة الاستخدام

وبمعنى اخر فان المنطق الرياضي ليس نظرية ولكنه لغة علمية تتفق عليها بين الرياضيين فالعلاقات التي تستخدم لها معنى واحد في مختلف انحاء العالم الا ان لغة الرياضيات تتفق عليها جميع العلماء في العالم.

العبارة statement

العبارة هي جملة خبرية مفيدة ذات معنى محدد تكون اما صادقة او كاذبة ولا تكون صادقة وكاذبة في آن واحد.

ويرمز للعبارات بالرموز $p, q, r, \ldots$ etc

قيم الصدق ((Truth values)) وهي صدق او كذب العبارات

ويرمز للعبارة الصادقة بالرمز ((T)) والعبارة الكاذبة ((F))

مثال

اي من العبارات التالية عبارة

أ- بغداد عاصمة العراق — عبارة صادقة

ب- $2+1=7$ — عبارة كاذبة

ج- الى اين انت ذاهب — هذه جملة استفهامية وليست عبارة

د- لا تلعب في الشارع — هذه جملة طلبية وليست عبارة

هـ- اذا كانت $f(x)=\sin x$ فان $f'(x)=\cos x$ — عبارة صادقة

و- من لاعب كرة قدم جيد — هذه عبارة تعريفية ليست عبارة

ز- $x-2$ — رمز رياضي $f(x)$ ليست عبارة

العبارات المركبة Compound statement

هي ربط عبارتين بأداة ربط لأجل تكوين عبارة جديدة يطلق عليها عبارة مركبة

فالعبارة ((المدرس احمد في الصف او في المكتبة)) تكونت من عبارتين

(2)

((اليوم ممطر في دمشق)) او ((اليوم ممطر في اللاذقية)) يطلق على كل من هاتين العبارتين عبارة بسيطة ((simple statment)) ويطلق على العبارة الحاصلة عبارة مركبة كما يطلق على ((او)) اداة ربط وهناك ادوات ربط اخرى منها ((و)) و ((اذا كان ... فان)) و ((اذا وفقط اذا)) ...

تعريف: العبارة البسيطة: هي عبارة خالية من ادوات الربط لا تحوي على عبارتين او اكثر مرتبطتين باحدى ادوات الربط

العبارة المركبة: هي عبارة مكونة من ارتباط عبارتين او اكثر باحدى ادوات الربط ولكن صدق العبارة المركبة يتوقف على قيم صدق العبارات المكونة لها وعلى نوع اداة الربط التي تربط بين مركباتها

مثال

عين أي من العبارات الآتية بسيطة وايهما مركبة

a- ذهب خالد الى المدرسة او ذهب الى الحديقة

b- العدد 7 عدد صحيح وفردي

c- الجو بارد

d- اذا كان $x>5$ فان $x>0$

e- تقع [illegible]

f- $16=4^2$ او $x.x^2=x^3$

الحل

a- العبارة مركبة من العبارتين ((ذهب خالد الى المدرسة)) و ((ذهب خالد الى الحديقة))

b- العبارة مركبة من العبارتين ((العدد 7 صحيح)) و ((العدد 7 فردي))

c- عبارة بسيطة

d- العبارة مركبة من العبارتين (($x>5$)) و (($x>0$))

e- عبارة بسيطة

f- العبارة مركبة من العبارتين (($16=4^2$)) و (($x.x^2=x^3$))

ادوات الربط

العطف Conjunction

تستعمل الحرف ((و)) ((and)) في العطف لربط عبارتين وتكوين عبارة مركبة واستعماله هنا يختلف قليلا عن استخدامه في اللغة اذ قد لا تكون

③

ثالثاً: ربط العبارتين الرياضيتين بالحرف "و" and

الذي يطلق عليه اداة العطف ويطلق على العبارة المركبة الناتجة عطف العبارتين الاصليتين ويرمز لاداة العطف "و" وعادة بـ " ∧ " وتكون عبارة العطف هنا صادقة في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون العبارتان الاصليتان المكونتان لها صادقتين وفيما عدا ذلك تكون كاذبة.

اذا كانت كل من p ، q عبارتان فان ($p \wedge q$) هي عطف العبارة "p" و "q" "p and q"

عندئذ نأخذ قيم الصدق لكل من العبارتين p و q وسنحصل على الاربع احتمالات هي

العبارة p صادقة ، العبارة q صادقة

العبارة p صادقة ، العبارة q كاذبة

العبارة p كاذبة ، العبارة q صادقة

العبارة p كاذبة ، العبارة q كاذبة

ويوضح هذه الاحتمالات في جدول يطلق عليه جدول صدق العبارة المركبة Truth table الذي فيه نضع حرف T كلمة صادقة Truth و F كلمة كاذبة False

p	q	$p \wedge q$	محلية ظاهرة
T	T	T	and و
T	F	F	
F	T	F	
F	F	F	

مثال

a- العبارة المركبة "تقع بغداد على نهر دجلة و $3 < 5$" صادقة لان كلا العبارتين صادقتين

b- تقع بغداد على نهر دجلة و $3 = 5$ كاذبة لان الاولى صادقة والثانية كاذبة

c- تقع بغداد على نهر النيل و $3 < 5$ كاذبة لان الاولى كاذبة والثانية صادقة

d- تقع بغداد على نهر النيل و $3 = 5$ كاذبة لان كلا العبارتين كاذبتين

(4)

الانفصال Disjunction

تستعمل اداة العطف التفصيلية ((أو)) ((OR)) في المنطق لربط عبارتين وتكوين عبارة مركبة جديدة تدعى انفصال العبارتين الاصليتين ويرمز لها ((V)) وعلى هذا الاساس تكون العبارة المركبة (P V q) التي تقرأ ((P او q)) ((P or q)) كاذبة في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون كل من P، q كاذبة وهكذا يكون جدول صدق العبارة المركبة ((P V q)) كما في الجدول الآتي

P	q	P V q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عملية أو OR

مثال: تأمل العبارات المركبة التالية

a- يدور القمر حول الارض او 2+3=5 صادقة لأن كلاهما صادقة

b- يدور القمر حول الارض او 2+3=23 صادقة لأن احداهما صادقة (الاولى)

c- تدور الارض حول القمر او 2+3=5 " " "

d- تدور الارض حول القمر او 2+3=23 كاذبة لأن كلاهما كاذبتان

النفي Negation

تأمل العبارتين ((الجو بارد)) ((ليس الجو بارد)) نلاحظ انه اذا كانت العبارة الاولى صادقة فان العبارة الثانية كاذبة وبالعكس اذا كانت العبارة الاولى كاذبة فان العبارة الثانية صادقة لذا يقال للعبارة الثانية هي نفي العبارة الاولى

(ى)

وبصورة عامة إذا كانت p أية عبارة فإن "ليس p" هي نفي العبارة p ويرمز عادة لأداة النفي "ليس" بالرمز (~) ونفي العبارة (~p) التي تقرأ (ليس p) عبارة مركبة ويكون جدول صدق هذه العبارة المركبة (~p) كما يلي

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

تمارين

1) حدد قيم صدق كل من العبارات الآتية

a- ... $4+5=9$

b- العدد ... $5 > 8$

c- ليس صحيحاً أن القاهرة تقع على نهر النيل

d- ليس صحيحاً أن $2+2=4$ و $7+5=15$

2) لتكن p العبارة "الماء نقي" و q العبارة "الماء صالح للشرب" اكتب كلاً من العبارات الآتية بصيغة رمزية

a) الماء صالح للشرب لكنه غير نقي F

b) الماء غير نقي أو أنه صالح للشرب T

c) ليس صحيحاً أن الماء غير نقي T

3) لتكن p العبارة "السمرة كبيرة اللون" و q العبارة "... " اكتب عبارة واضحة لكل من العبارات الرمزية الآتية

a) $p \vee q$ b) $\sim p \vee \sim q$ c) $\sim(p \wedge q)$

4) انفِ كلاً من العبارات الآتية

a) ذهب سمير إلى المكتبة

b) لا يوجد سكر في السيارة

c) $4 > 3$

d) ليس صحيحاً أن هذا الجواب صحيح

Propositions of truth tables القضايا وجداول الصدق

باستعمال ادوات الربط المنطقية المارة الذكر ($\wedge$ ، $\vee$ ، $\sim$) يمكننا الحصول على قضايا مركبة تتكون من العبارات p ، q ، r عندئذ نطلق عليها اسم قضية مركبة كون العبارات p ، q ، r متغيرة فنطلق على العبارات المركبة التالية قضية Variables مركبة في p ، q ، r مثال ذلك

$(\sim p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q) \wedge q$ ، $(\sim p \wedge q) \wedge r$

ان قيم صدق اية قضية تعتمد على قيم صدق مكوناتها وعلى ادوات الربط المستعملة في تركيبها

علما ان كل عبارة p في مكونات القضية يكون لها حالتين صادقة او كاذبة فاذا كانت القضية مكونة من n من العبارات p ، q فان قيم صدق هذه القضية تتبع $((2^n))$ من الحالات

مثال (1) كون جدول صدق القضية $p \wedge (\sim p \vee q)$

الحل:

بما ان هناك عبارتين في القضية هما (p, q) اذن 2^n

$2^2 = 4$ اذن جدول صدق هذه القضية يتكون من اربع صفوف كما في الجدول ادناه وعليه فان العمود الاول من اليمين يكون قيم صدق القضية وان جدول صدق هذه القضية يتكون من الاعمدة الثلاث التي في الجدول

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

مثال (2) كون جدول صدق القضية $p \vee (q \wedge r)$

الحل

(8)

نجدها كاذبة في حالة واحدة فقط وهي عندما
لو تأملنا هذه العبارة الحديقة اما في الحالات الثلاثة الباقية
يكون الجو صحواً ولا يذهب سعيد الى
فانها تكون صادقة وهذه الحالات

1- "الجو صحو" و "سعيد يذهب الى الحديقة"
2- "الجو غير صحو" و "سعيد يذهب الى الحديقة"
3- "الجو غير صحو" و "سعيد لا يذهب الى الحديقة"

نطلق على هذه العبارة "العبارة الشرطية" وتعرف هكذا
اذا كانت p, q عبارتين فانه نطلق على العبارة "اذا كانت p فان q" عبارة شرطية ونطلق على اداة الشرط "اذا ... فان" اداة الشرط ونكتب العبارة الشرطية ((If --- then ---))
بالرمز بالشكل التالي

$$((p \rightarrow q))$$

ويكون جدول صدق $p \rightarrow q$ كما مبين في الجدول التالي

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال 1
حدد قيم صدق كل من العبارات المركبة الآتية

1- اذا كانت $9 = 2+7$ فان بيروت تقع على البحر الاحمر
2- اذا كان $3 \neq 3$ فان بيروت تقع على البحر الاحمر
3- اذا كان $5 < 7$ فان بيروت تقع على البحر الابيض المتوسط
4- اذا كان $1+2=5$ فان بيروت تقع على البحر الابيض المتوسط

الحل
من جدول صدق العبارة المركبة $(p \rightarrow q)$ نستنتج ان العبارة المركبة الاولى كاذبة وان العبارات الثانية والثالثة والرابعة صادقة

(7)

لما كان هناك ثلاث متغيرات (p, q, r) في تركيب القضية فان جدول صدقها يتكون من $2^3 = 8$ حالات ممكنة كما مبين في الجدول الاتي

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

تمارين

كون جدول صدق كل من القضايا الاتية

1- $\sim p \wedge q$

2- $\sim (p \vee \sim q)$

3- $(p \wedge \sim q) \wedge r$

4- $(\sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

5- جد قضية $P(p,q)$ لها قيم الصدق المبينة

p	q	$P(p,q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

$(p \vee \sim q)$

العبارات الشرطية conditional statements

تستعمل اداة ربط (اذا كان ... فان ...) (then) للربط بين اي عبارتين لاجل تكوين عبارة جديدة مثال ذلك "اذا كان الجو صحوا" "فانا سوف اذهب الى الحديقة"

(9)

لاحظ أن جدول صدق $(p \rightarrow q)$ تكون العبارة المركبة خاطئة فقط عندما تكون المقدمة صائبة (صادقة) والنتيجة خاطئة ما عدا ذلك تكون صادقة

مثال (2)

كون جدول صدق القضية $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

الحل

عدد العبارات اثنان (p, q) إذن عدد الصفوف $2^2 = 4$

نكتب الحالات الأربعة لقيم صدق العبارتين (p, q) ثم نوجد قيم صدق $\sim p$ وقيم صدق $(p \vee q)$ وأخيراً نحصل على قيم صدق القضية $[\sim p \rightarrow (p \vee q)]$ كما موضح بالجدول التالي

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

Biconditional statements العبارة الشرطية الثنائية

توجد أداة ربط أخرى هي أداة الشرط الثنائية التي نوضحها بـ "إذا كان n عدد صحيح فإن n^2 عدد صحيح وإذا كان n^2 عدد صحيح فإن n عدد صحيح"

يطلق على العبارات المركبة من هذا النوع العبارات الشرطية الثنائية ونعرفها كالآتي

لتكن (p, q) أي عبارتين، يطلق على العبارة "إذا كان p فإن q وإذا كان q فإن p" عبارة شرطية ثنائية ويرمز لهذه العبارة المركبة بالرمز التالية

(10)

والتي تقرأ ((p اذا وفقط اذا q)) ((p if and only if q))

في الحقيقة ان العبارة الشرطية الثنائية هي عطف عبارتين شرطيتين اي انها

$$(p \to q) \wedge (q \to p)$$

وعليه فان جدول صدق $(p \leftrightarrow q)$ يبين في الجدول التالي

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

اي ان $p \leftrightarrow q$ تكون صادقة في حالتين فقط هما اذا كانت كل من العبارتين المركبتين لها (p, q) صادقة معاً او كاذبة معاً

مثال

كوّن جدول صدق القضية $(p \to q) \leftrightarrow (q \to \sim p)$

الحل

بما ان عدد العبارات اثنان (p, q) فان عدد الصفوف $2^2 = 4$

اذن يكون جدول صدق هذه القضية من اربع صفوف وبنفس الطريقة كما مبين في الجدول ادناه

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to \sim p)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

(11)

تمارين

(1) اذكر قيم صدق كل من العبارات الآتية

(a) اذا كان $2+1=2$ فان $3 \neq 3$

(b) اذا كانت الارض تدور حول القمر فان $5-1=4$

(c) $3 < 5$ اذا وفقط اذا $5 > 3$

(d) $2 < 3 \longrightarrow 2 < 1$

(e) 5 عدد حقيقي $\longleftrightarrow$ $\frac{2}{3}$ عدد نسبي

(f) 2 عدد صحيح $\longleftrightarrow$ الفرات نهر في القطر العراقي

(2) انفِ كلاً من العبارات المركبة الآتية

(a) اذا كان سوق المال مزدهر فان $5 \neq 5$

(b) تغلي الماء في درجة 100 مئوية اذا وفقط اذا وضعت تحت ضغط ...

(c) العدد ... اذا وفقط اذا $3 < 7$

(3) لتكن p العبارة «الجو بارد»، q العبارة «يرتدي احمد معطف» اكتب كلاً من العبارات الآتية بصيغة رمزية

(a) اذا كان الجو بارداً فان احمد يرتدي معطف

(b) اذا ارتدى احمد معطف فان الجو بارد

(c) يرتدي احمد معطف اذا وفقط اذا كان الجو بارد

(d) لا يرتدي احمد معطفه اذا وفقط اذا كان الجو غير بارد

(4) كوّن جدول صدق كل من القضايا التالية

(a) $p \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(b) $\sim p \longrightarrow (p \vee q)$

(c) $p \longrightarrow (q \vee r)$

(d) $\sim (p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(e) $(p \longleftrightarrow q) \longrightarrow (p \longleftrightarrow r)$

مثال: جد اداة الربط المستخدمة في جدول الصدق الآتي ... اكمل ... جميع الحالات

p	q	$p ? q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F

... and

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F

جبر القضايا Algebra of Propositions

صادقة منطقياً وكاذبة منطقياً

بعض القضايا $P(p,q,r,\dots)$ تكون صادقة لكل قيم صدق مركباتها (p ، q ، ...) وعند استخدام جدول صدق نلاحظ انه لا يحتوي على F في العمود الخاص بهذه القضية
يقال لهذا النوع من القضايا صادقة منطقياً (Logically true) او تحصيل حاصل (Tautology)
وان هنالك قضايا تكون كاذبة لكل قيم صدق مركباتها اي ان العمود الخاص بها في جدول صدقها لا يحتوي على T ويقال لهذا النوع من القضايا كاذبة منطقياً (Logically false) او تناقض (Contradiction)
وللتأكد على معرفة اي قضية انها صادقة منطقياً او كاذبة منطقياً او غير ذلك من جدول صدقها كما موضح في المثالين التاليين

مثال 1

اثبت ان القضية $q \to (p \vee \sim p)$ صادقة منطقياً ؟

الحل

نكون جدول صدق لهذه القضية الذي من اربعة صفوف وخمسة اعمدة. من الجدول ادناه نلاحظ ان العمود الاخير من اليمين يحتوي على (T) فقط وبذلك فان هذه القضية هي صادقة منطقياً

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$q \to (p \vee \sim p)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

(المبادئ الاحتمالية)

الفصل الأول

ب: التجربة، فضاء العينة، الحوادث وانواعها

التجربة العشوائية: A random experiment

هي تلك التجربة التي ينتج عنها مجموعة من الاحداث كل حدث منها مستقل عن الآخر وان وقوع ذلك الحدث يرجع الى عامل الصدفة وحده (لا يمكن التنبؤ بحدوثه)

هنالك العديد من التجارب يمكن استغلالها كأمثلة تساعدنا في تفسير بعض المفاهيم مثل:

1. تجربة رمي العملة Tossing a coin
2. تجربة رمي الزار Rolling a dice
3. تجربة ورق اللعب playing cards
4. صناديق الكرات boxes of balls

فضاء العينة: Samble space

هو كل النتائج المحتملة من تجربة عشوائية معينة ويرمز له بالرمز (S)

أو هي مجموعة كل الحوادث المتوقعة في تجربة عشوائية ويرمز لها بالرمز (S)

الحوادث: Events

هي مجموعة جزئية من (S) ويكون الحادث بسيطاً اذا تكون من عنصر واحد فقط ومركباً اذا تكون من اكثر من عنصر ومستحيلاً اذا لم يحتوي على اي عنصر واكيداً اذا احتوى على

أنواع الحوادث

① بسيط (اذا تكون من عنصر واحد فقط)

② مركب " " " " اكثر من عنصر)

③ مستحيل (اذا لم يحتوي على اي عنصر)

④ اكيد (اذا احتوى على عناصر (S) جميعاً)

اي بانه اذا كانت A حادثة معينة فإن $A \subseteq S$

امثلة:

مثال (1) ارمي العملة مرة واحدة، استخرج فضاء العينة والحوادث الممكنة

الحل

بما ان العملة تمتلك وجهان الوجه الاول H والوجه الثاني T إذن

$$S = \{H, T\}$$

اذا كانت A هي حادثة الحصول على H فإن

$$\Rightarrow A \subseteq S \;,\; A = \{H\}$$

اذا كانت B هي حادثة الحصول على T فإن

$$\Rightarrow B \subseteq S \;,\; B = \{T\}$$

$\therefore$ A و B حوادث من S

مثال (2) ارمي الزار مرة واحدة، استخرج فضاء العينة ثم عين الحوادث التالية:

أ) حادثة الحصول على عدد فردي

ب) " " " زوجي

الحل

بما ان الزار يمتلك ستة اوجه معلمة فإن

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$ (فضاء العينة)

أ) لتكن A حادثة الحصول على عدد فردي، إذن

$$A \subseteq S \;\therefore\; A = \{1, 3, 5\}$$

ب) لتكن B حادثة الحصول على عدد زوجي ...

الحوادث المتصلة والحوادث المنفصلة
Joint & Disjoint Events

ملاحظة: سيكون فضاء العينة في هذا الفصل من النوع المنتهي القابل للعد

تعريف: الحادثة التي لا تحدث نرمز لها (ϕ) ~~Empty set~~

ϕ is an Impossible event

ex. Toss a dice once — ارمي الحجر مرة واحدة

ولتكن $A = \{$to get 7$\}$

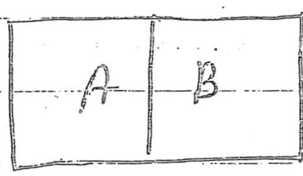
اذا $A = \phi$

الحوادث المنفصلة: (Disjoint events)

اذا كانت A و B حادثة من تجربة عشوائية

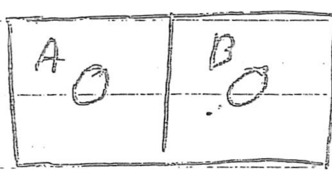
فان A و B تسمى حادثتين منفصلتين اذا $A \cap B = \phi$

S



$AB = \phi$

S

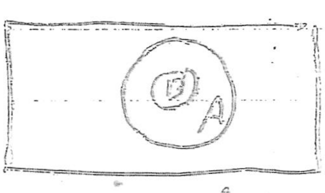


$AB = \phi$

الحوادث المتصلة: (Joint events)

اذا كانت A و B حادثة من تجربة عشوائية

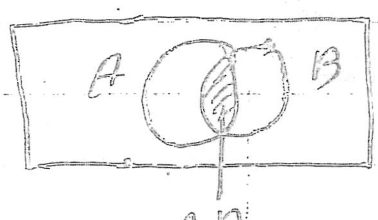
فان A و B حادثتين متصلتين اذا $A \cap B \neq \phi$



$B \subset A$

$AB = B$

S



AB

مثال: ارمي الزهرة مرة واحدة فاذا كانت

$A = \{d : d \geq 2\}$, $B = \{d : d \leq 3\}$ و $C = \{d : d \leq 1\}$

جد كلا من: $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A^c \cup C$ ، A^c ، B^c ، AB^c ، BA^c

الحل

فضاء رمي الزهرة لمرة واحدة فضاء العينة S هو

$S = \{d : 1 \leq d \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{d : d \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{d : d \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$

$C = \{d : d \leq 1\} = \{1\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$

$A^c \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A^c = \{1\}$

$B^c = \{4, 5, 6\}$

$AB^c = \{4, 5, 6\}$

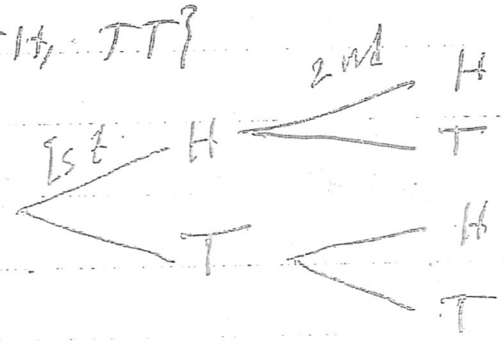
$BA^c = \{1\}$

مثال: ارمي العملة مرة واحدة واستخرج فضاء العينة

فضاء العينة $S = \{H, T\}$

مثال: ارمي العملة مرتين واستخرج فضاء العينة.

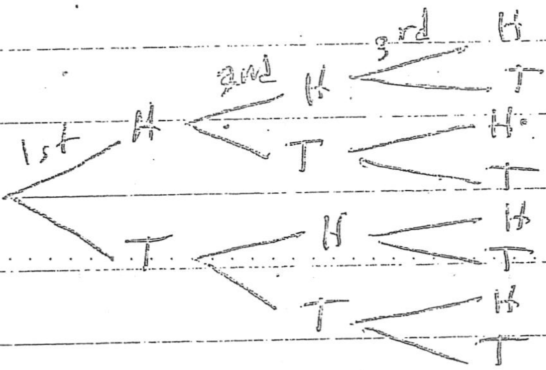
$S = \{HH, HT, TH, TT\}$



$S = 2^2 = 4$

5/

مثال: ارمي العملة ثلاث مرات واستخرج فضاء العينة



$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTT, TTH\}$

$S = 2^3 = 8$ events

بصورة عامة:

* عند رمي العملة n من المرات (n-times) فإن فضاء العينة (S) يحتوي (2^n) من العناصر
* وعند رمي النرد n من المرات (n-times) فإن فضاء العينة S يحتوي (6^n) من العناصر.

مثال: ارمي النرد مرتين واستخرج فضاء العينة

$S = \{(d_1, d_2), 1 \le d_1 \le 6, 1 \le d_2 \le 6\}$

$S = 6^2 = 36$ elts

الاحتمالية البسيطة : Simple Probability

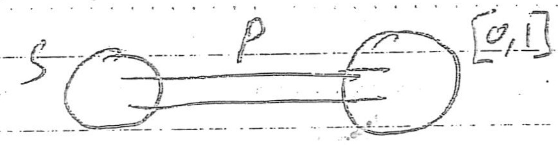
عند احتساب الاحتمال الرياضي لأي حادثة يجب ان نتوقع الحالة التي يكون فيها الاحداث مستبعدة لبعضها الاخرى بأخذ كل حدث الفرصة التي تأخذها الاحداث الاخرى في الوقوع.

ويعرف احتمال الحصول على صفة معينة (حادثة معينة) مثل (A) من تجربة عشوائية معينة بأنه عدد مرات حدوث الصفة (A) مقسوماً على الحالات المتوقعة ويرمز لاحتمالية الحادثة A بالرمز $P(A)$

اي انه اذا كانت S هي فضاء العينة لتجربة عشوائية معينة وكانت A هي حادثة معينة في التجربة فان

$$P_A = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر } S} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ملاحظة: نجد ان قيمة الاحتمال هي عبارة عن دالة P مجالها S ومداها $R_{[0,1]}$ اي ان $0 \le P(A) \le 1$

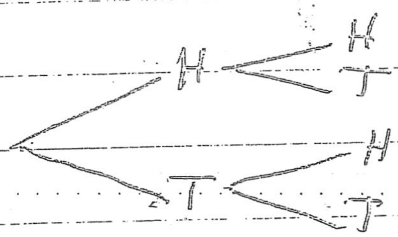


$$P : S \longrightarrow R_{[0,1]}$$

تسمى دالة الاحتمال P دالة احتمال منتظم اذا اعطى نفس القيمة الاحتمالية لكل عنصر من عناصر فضاء العينة.

~~ملاحظة: [illegible]~~

مثال: عند رمي العملة مرتين ما هي احتمالية الحصول على الوجه T في الرمية الثانية.



الحل

نستخرج فضاء العينة حسب المخطط

$S = 2^2 = 4$

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

اولى ثانية اولى ثانية اولى ثانية اولى ثانية

$A = \{HT, TT\}$

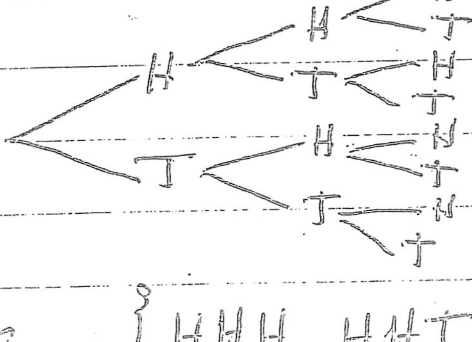
$P_A = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in [0,1]$

مثال: عند رمي الزاردة ولمرة، ما هي احتمالية الحصول على عدد زوجي في هذه الرمية

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ $\quad P_A = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \in [0,1]$

مثال: عند رمي العملة ثلاث مرات ما هي احتمالية الحصول على الوجه T في الرمية الأولى والرمية الثالثة



$S = 2^3 = 8$

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$A_1 = \{THH, TTT\}$ $\quad P_{A_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \in [0,1]$

$A_2 = \{HHT, HTT, THT, TTT\}$

التباديل والتوافيق :

نجد ان قيمة الاحتمال تعتمد بالدرجة الاساس على معرفة كل الحالات الممكنة لـ (S) وان هذه الحالات يمكن حصرها بسهولة في الحالات البسيطة ولكن عند زيادة عدد الاحداث يؤدي الى وجود صعوبة في تحديد عدد الحوادث الممكنة ولذلك لابد من اللجوء الى بعض الطرق الرياضية التي تساعد في تحديد مثل هذه الحالات مهما زاد عددها واهم هذه الطرق هي :

① التباديل : (Permutation)

وهي عملية ترتيب n من الاشياء في مجاميع كل منها يحوي r من الاشياء وحسب القاعدة التالية

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : جد عدد الطرق الممكنة لترتيب اربع كرات مرقمة من (1-4)

$$P_r^n = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

مثال : جد عدد الطرق الممكنة التي يمكن وضع خمس كرات في صندوقين بحيث ان كل صندوق يحتوي على كرة واحدة فقط

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

في حالة وجود مكررات في مفردات المجموعة فإن عدد الطرق الممكنة للترتيب يمكن حسابها بالطريقة التالية :

$$P^n_{(n_1,n_2 - n_k)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! - n_k!}$$

حيث

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

(44)

بديهيات الاحتمالية : Axioms of probability

1) If $A \subseteq S$, then $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(S) = 1$

3) If $A_1, A_2, \ldots A_n$ are sequence of disjoint events then
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$
بتعبير آخر

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

4) A special case : حالة خاصة من بديهية (3)
اذا كانت A و B حادثتين منفصلتين فإن
If A & B are disjoint events, then
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال : ارمِ العملة ثلاث مرات اذا كانت :
ⓐ A هي الحادثة التي يمكن الحصول على بالضبط على (2 - H)
ⓑ B " " " " " " " (H)
جد الاحتمالية لكل من A و B

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
$A = \{HHT, HTH, THH\}$: $P(A) = \frac{3}{8} \in [0,1]$
$B = \{TTT\}$
$P(B) = \frac{1}{8} \in [0,1]$

ⓒ احتمالية الحصول على H

$C = \{HTT, THT, TTH\}$

$P(C) = \frac{3}{8} \in [0,1]$

(13)

② يمكن أن يجزأ الرقم الأيسر
بعدد بطريقتين

2	5	4

$2 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{40}$

③ يمكن أن يجزأ الرقم الأيمن بطريقتين
بالرقم 2 والرقم 3

5	4	2

$5 \cdot 4 \cdot 2 = \boxed{40}$

④ يمكن أن يجزأ الرقم الأيمن بأربع
طرق مختلفة بالرقم 1، 3، 7، 9

5	4	4

$5 \cdot 4 \cdot 4 = \boxed{80}$

⑤ يمكن أن يجزأ الرقم الأيمن بطريقة
واحدة فقط بالرقم (5)

5	4	1

$5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

تمارين

أوجد قيمة كل من $\binom{15}{5}$ ، $\binom{12}{4}$ ، $\binom{16}{3}$

مثال: أوجد قيمة n إذا كان $P(n,2) = 72$

الحل

$P(n,2) = n(n-1) = n^2 - n$

$\therefore n^2 - n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0$

وبما أن n عدد موجب ∴ نهمل -8 إذن $n = 9$

أوجد قيمة n إذا كان $2P(n,2) + 50 = P(2n,2)$

الحل

$P(n,2) = n(n-1) = n^2 - n$

$P(2n,2) = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n$

$2(n^2 - n) + 50 = 4n^2 - 2n$

$2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n$

$50 = 2n^2 \qquad n^2 = 25$

وبما أن n عدد موجب ...

التوافيق: هي عملية اختيار او انتخاب r من المفردات من مجموعة كبيرة بحجم n بدون ترتيب وتستخدم الصيغة التالية

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال ١: ما هو عدد العينات التي يمكن تكوينها من مجموعة مؤلفة من ست مفردات بحيث يكون حجم العينة مفردتين اثنين فقط.

$$\binom{n}{r} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$$

مثال ٢: ما هو عدد اللجان التي يمكن تأليفها من اربعة افراد بحيث ان كل لجنة تحتوي على ٢ فردين ب. ثلاثة افراد

a) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$

$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 4$

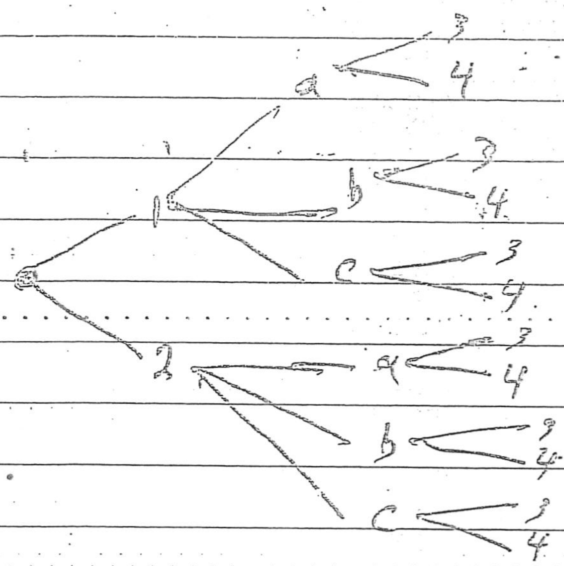
$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{P^n_r}{r!}}$$

علاقة التباديل مع التوافيق.

المخطط الشجري : هي طريقة تستعمل لحصر كل النواتج الممكنة لمجموعة متتابعة من التجارب اذا كان من الممكن ان تقع كل تجربة بعدد منتهٍ من الطرق.

مثال : اوجد مجموعة حاصل الضرب $A \times B \times C$ اذا كان
$A = \{1,2\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، $C = \{3,4\}$

نكون المخطط كما يلي



(1,a,3)
(1,a,4)
(1,b,3)
(1,b,4)
(1,c,3)
(1,c,4)
(2,a,3)
(2,a,4)
(2,b,3)
(2,b,4)
(2,c,3)
(2,c,4)

~~[illegible]~~

مثال : بفرض عدم السماح بالتكرار اجب
1) كم عدداً مكوناً من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه من الارقام التالية
$\{2,3,5,6,7,9\}$
2) كم عدد منهم اقل من 400
3) كم عدد منهم زوجي؟
4) كم عدد منهم فردياً.
5) كم عدداً منهم مضاعفاً للعدد 5

Sol:

1) $\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$

(٩)

مثال: جد عدد الطرق الممكنة لترتيب سبع كرات اربع منها بيضاء واثنان حمراء والباقي الوان اخرى

$$P^{7}_{4,2,1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1\times1} = 105$$

العينات المرتبة: يتبادر للكثير من مسائل التحليل التوافقي تجربة صامتة تحت علم الاحتمالات حول اختيار كرة من وعاء به n من الكرات (أو اختيار ورقة من مجموعة من الورق أو اختيار شخص من مجتمع). تسمى عملية اختيار كرة من الوعاء عدد r من المرات بعينة مرتبة حجمها r. وسوف ندرس حالتين

① المعاينة مع الإحلال: في هذه الحالة تعاد كل كرة الى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وحيث أنه يوجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق القاعدة الاساسية للعد تجد أن عدد العينات المرتبة المختلفة ذات الحجم r مع الاحلال هو

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n \cdots n}_{\text{من المرات } r} = n^{r}$$

② المعاينة بدون احلال: في هذه الحالة لا تعاد الكرة الى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وبذلك لا توجد تكرارات في العينة المرتبة وبعبارة اخرى فإن العينة المرتبة ذات الحجم r بدون احلال هي تبديل من الاشياء الموجودة في الوعاء ماخوذة منه r وبذلك يوجد

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عينة مرتبة مختلفة حجمها r بدون احلال من مجتمع به n من الاشياء

مثال: بكم طريقة يمكن لشخص اختيار ثلاثة كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات ① مع الاحلال ② بدون احلال

الحل

① مع الاحلال $n^{r} = (10)^{3} = (10)(10)(10) = 1000$

② بدون احلال

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

نظرية ذات الحدين

يعرف الرمز $\binom{n}{r}$ والذي يقرأ nCr حيث n, r عددان صحيحان موجبان بحيث يكون $n \ge r$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}$$

وتسمى هذه الأعداد بمعاملات ذات الحدين

مثال

$$\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28 \qquad \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ونحصل من المعادلة التالية باستخدام الصيغة السابقة

$$n-(n-r) = r$$

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ وبعبارة أخرى إذا كان $a+b=n$ فإن $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$$

$$0! = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1 \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

7) Let $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ be an infinit squence of events such that

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

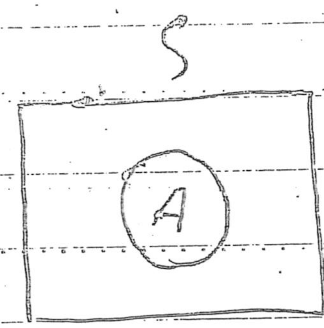
then $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

برهنة قوانين الاحتمال

Theorem 1 :- $P(\phi) = 0$

البرهان

let A be any event



تقاطع A مع مجموعة خالية هي مجموعة خالية $\quad A\phi = \phi$

∴ A و φ مستقلة $\quad \therefore A \,\&\, \phi$ are disjoint

∴ اتحادها مع φ $\quad A \cup \phi = A$

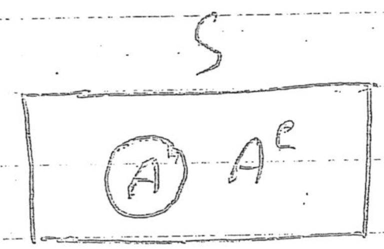
$$P(A \cup \phi) = P(A)$$

$$P(A) + P(\phi) = P(A)$$

$$P(\phi) = 0$$

Theorem 2 $P(A^c) = 1 - P(A)$

proof,



تقاطع المجموعة مع المكملة لها $\quad AA^c = \phi$

∴ المجموعة والمكملة مستقلة $\quad \therefore A \,\&\, A^c$ are disjoint

∴ اتحادها فضاء العينة $\quad A \cup A^c = S$

$$\therefore P(A \cup A^c) = P(S) \qquad \Rightarrow P(S) = 1$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$$

مثال: ارمي النرد مرتين. جد احتمالية الحصول على الحادثة التي يكون فيها مجموع النقاط مساوي للعدد 8

الحل:

$S = \{(d_1, d_2) ; 1 \le d_1 \le 6 , 1 \le d_2 \le 6\}$

$S = 6^2 = 36$

$A = \{(2,6), (6,2), (4,4), (3,5), (5,3)\}$

$$PA = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

محاضرة (2)

Theorems of probability قوانين الاحتمال

1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$

3) If A and B are joint events, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

4. If $A \subseteq B$, then $P(A) \le P(B)$

5) If A & B & C are joint events, then

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

متتابعة

6) If $A_1, A_2, \dots, A_n$ be a sequence of infinite events such that $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$

then $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

990
7
16930 (8)

$P(B) = P(A) + P(A^cB)$

$P(B) - P(A) = P(A^cB) \geq 0$

$P(B) - P(A) \geq 0$

$P(A) \leq P(B)$

~~[illegible]~~ مثال اذا كانت كل من A و B حادثة بحيث ان

$P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$ جد $P(BA^c)$

a- اذا كان A و B حادثتين منفصلتين

b- اذا كان $A \subseteq B$

c- اذا كان $P(AB = \frac{1}{8}$

الحل

a) $\because A \cap B = \phi \quad \therefore B/A = B$

$B/A = BA^c = B \Rightarrow P(BA^c) = P(B)$

$P(BA^c) = \frac{1}{2}$

توضيح الحل

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{3, 4\} \qquad B = \{1, 2\}$

$A^c = \{1, 2, 5\}$

$BA^c = \{1, 2\} = B$

$BA^c = B/A = B$

b)

$A \subseteq B$

$(B/A) \cup A = B$

$(BA^c) \cup A = B$

$P(BA^c \cup A) = P(B)$

$P(BA^c) + P(A) = P(B)$

$P(BA^c) = P(B) - P(A)$

توضيح اعطاء المثال

Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{3\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$

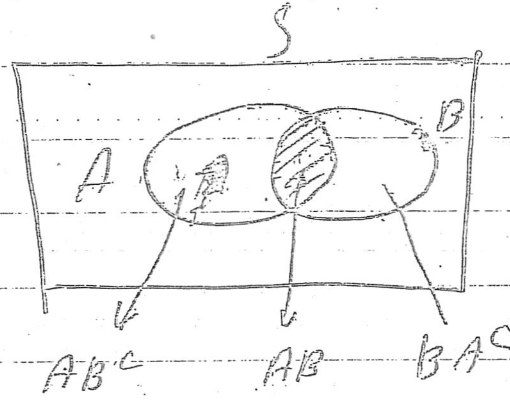
$B/A = \{1, 2\}$

$B/A \cup A = \{1, 2, 3\} = B$

Theorem 3: If A & B are joint events, then:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

proof البرهان



AB^c & AB are disjoint

$A = AB^c \cup AB$

$P(A) = P(AB^c) + P(AB)$

$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$

BA^c & AB are disjoint

$B = BA^c \cup AB$

$P(B) = P(BA^c) + P(AB)$

$P(BA^c) = P(B) - P(AB)$

$\because AB^c, AB$ & BA^c ar disjoint

$A \cup B = AB^c \cup AB \cup BA^c$

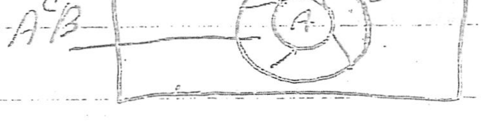
$P(A \cup B) = P(AB^c) + P(AB) + P(BA^c)$

$P(A \cup B) = \left[P(A) - \cancel{P(AB)}\right] + \cancel{P(AB)} + \left[P(B) - P(AB)\right]$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Theorem 4: If A & B are events such that $A \subseteq B$ then $P(A) \leq P(B)$ إذا كان A، B حادثين A جزئية من B فإن

proof



A & A^cB ar disjoint

$B = A \cup A^cB$

مثال: في إحدى الكليات 25% من الطلبة رسبوا بالرياضيات و 15% من الطلبة رسبوا بالكيمياء و 10% رسبوا بكلا الرياضيات والكيمياء فإذا انتخب طالب بصورة عشوائية فما هو احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات والكيمياء

الحل

نرمز للرسوب بالرياضيات بالحرف A وبالكيمياء بالحرف B } الحادثتان غير متنافيتين events

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30$$

مثال: إذا كان الرجل A يصيب هدفاً باحتمال $\frac{1}{4}$ وإن الرجل B يصيب نفس الهدف باحتمال $\frac{2}{5}$ فما هو احتمال إصابة الهدف إذا صوب A و B نحو الهدف؟

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{5}$$

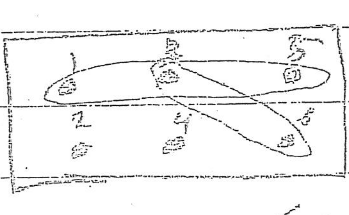
$$P(AB) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(A+B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$$

مثال: إذا ألقي زار مرة واحدة فما هو احتمال ظهور عدد يكون فردياً أو ~~يكون~~ يقبل القسمة على 3 ؟

الحل

إن فضاء العينة لهذه التجربة هو



1- (A) = الحادث الفردي ويمثله العناصر (1,3,5) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2- B = الحادث يقبل القسمة على (3) وهي (3,6) $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3- AB = الحادث الفردي ويقبل القسمة على (3) هو فقط (3) $P(AB) = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P(BA^c)$ if $P(AB) = \frac{1}{8}$

$S = \{1,2,3\}$

$A = \{1,2\}$

$B = \{1,3\}$

$AB = \{1\}$

$A^c = \{3\}$

$B = AB \cup A^cB$

$= \{1\} \cup \{3\} = \{1,3\}$

$P(AB) = \frac{1}{8} \neq 0$

من خواص التجزئة

$B = AB \cup BA^c$

$P(B) = P(AB \cup BA^c)$

$P(B) = P(AB) + P(BA^c)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + P(BA^c)$

$P(BA^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

قانون الجمع

مثال: صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و 5 بيضاء و 3 حمراء فإذا سحبت كرة واحدة ما هو احتمال أن تكون إما سوداء أو بيضاء

الحل

4B
5W
3R

تعتبر هنا الحوادث مستقلة

$P(B+W) = P(B) + P(W)$

$= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$

مثال: في حالة رمي زار ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي

الحل:

الحوادث هنا مستقل

$P(2+4+6) = P(2) + P(4) + P(6)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال: إذا كان احتمال أن الطالب (A) يستطيع حل مسألة ما هو $\frac{4}{5}$ واحتمال أن الطالب (B) يستطيع حل نفس المسألة هو $\frac{2}{3}$ واحتمال أن الطالب C يستطيع حلها هو $\frac{3}{7}$ فإذا تم عرض هذه المسألة عليهم فما هو احتمال أن المسألة تحل.

الحل

الطريقة الأولى:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

وبما أن هذه الحوادث مستقلة

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-[P(A)\cdot P(B)]-[P(A)\cdot P(C)]-[P(B)\cdot P(C)]+[P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)]$$

$$= \frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{7}-\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}\right]-\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}\right]+\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}\right]$$

$$= \frac{101}{105}$$

الطريقة الثانية

احتمال أن A لا يحلها $P\bar{A} = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

احتمال أن B لا يحلها $P\bar{B} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

احتمال أن C لا يحلها $P\bar{C} = 1-\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

احتمال أنهم جميعاً لا يحلونها

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P\bar{A}\cdot P\bar{B}\cdot P\bar{C}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4}{105}$$

احتمال أن يقوم أحدهم بحلها على الأقل

$$P = 1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1-\frac{4}{105} = \frac{101}{105}$$

قانون الضرب : إذا كانت الحادثتين مستقلتين فإن

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

وإذا كانت الحادثتين متصلتين فإن

$$P(AB) = P(A) \cdot P(A|B)$$

أي أنه إذا كانت الحادثتين متصلتين فإن احتمال حدوثهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادث الأول في احتمال وقوع الحادث الثاني بشرط أن يحدث الأول.

وبصورة عامة إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ الحوادث متصلة فإن احتمال حدوثهم معاً هو

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

الاحتمال الشرطي :

لتكن كل من A و B حادثة. فإذا حدثت الحادثة A ومن بعدها حدثت الحادثة B. أو إذا كانت A معطاة ثم حدثت الحادثة B في هذه الحالة سنرمز للحادثة الناتجة بالرمز (B|A) وتقرأ (B given A) تسمى الحادثة (B|A) حادثة شرطية ويسمى احتمال حدوث الحادثة B|A والذي يكتب بالشكل P(B|A) بالاحتمال الشرطي حيث أن

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}} \quad , \quad P(A) \neq 0$$

من قانون الاحتمال الشرطي نستطيع أن نحصل على نص من القانون يسمى بقانون الضرب

$$\boxed{P(AB) = P(A)\, P(B|A)}$$

23

مثال: رمي الزهر مرتين جد احتمالية الحادثة التي يكون فيها مجموعها فردياً
$d_1+d_2 \le 6$ حيث الحادثة التي يكون فيها d_1+d_2 مع ملاحظة

الحل

نفرض ان A هي الحادثة التي يكون فيها مجموع d_1+d_2 فردياً

وان B ... $d_1+d_2 \le 6$

$n(S) = 6^2 = 36$

$S = \{(d_1, d_2) \mid 1 \le d_1 \le 6 \;,\; 1 \le d_2 \le 6\}$

$$A = \begin{bmatrix} (1,2), & (2,1), & (3,2), & (4,1), & (5,2), & (6,1) \\ (1,4), & (4,1), & (3,4), & (4,3), & (5,4), & (6,3) \\ (1,6), & (6,1), & (3,6), & (4,5), & (5,6), & (6,5) \end{bmatrix}$$

$n(A) = 18 \qquad n(S) = 36$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$B = \begin{bmatrix} (1,1), & (2,1), & (3,1), & (4,1), & (5,1) \\ (1,2), & (2,2), & (3,2), & (4,2) & \\ (1,3), & (2,3), & (3,3) & & \\ (1,4), & (2,4), & & & \\ (1,5) & & & & \end{bmatrix}$$

$n(B) = 15 \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$$AB = \begin{bmatrix} (1,2), & (2,1), & (3,2) \\ (1,4), & (2,3), & (4,1) \end{bmatrix}$$

$n(AB) = 6 \;,\; P(AB) = \frac{n(AB)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$P(B \setminus A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow [0,1]$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{15} = \frac{6}{15}$$

مثال: صندوق فيه (4) كرات حمراء و (3) كرات سوداء
اختير كرتين بالتعاقب بدون ارجاع أوجد

(1) احتمالية ان تكون الكرتين ذات الوان مختلفة اذا كانت الكرة التي نختارها بالبداية هي حمراء .
(2) احتمالية ان يكون الاختيار الاول والثاني كرة حمراء .
(3) احتمالية ان تكون هنالك على الاقل كرة حمراء .

الحل

$r+b$			مجموع 6	
(r) حمراء 4	A	←	3 red	B
b (سوداء) 3			3 black	
$4+3=7$			$3+3=6$	

$n(S) = 3+4 = 7$

لتكن A هي الحادثة التي تكون فيها الاختيار الاول كرة حمراء
و B " " " " " " سوداء
و C " " " " الثاني " حمراء

$\cancel{P(B|A) = \frac{b}{r+b-1}}$

(1) الاختيار الاول

$$P(A) = \frac{r}{r+b} = \frac{4}{7}$$

$$P(B|A) = \frac{b}{r+b-1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(2) $P(AC) = P(A) \cdot P(C|A)$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{r-1}{r+b-1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

على الاقل (جميع الاحتمالات تساوي (1)) = $P(A \cup B)$ مثلاً جميع الاحتمالات

احتمالية على الاقل كرة حمراء $= P(A \cup B) - P(AB)$ قانون الفرق
عملية طرح لان لوجود تقاطع الاحتمالين

$= 1 - P(A) \cdot P(B|A)$

25

مثال: نفرض أن A و B حادثان بحيث $P(A)=\frac{1}{2}$ ، $P(B)=\frac{1}{3}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ أوجد:

① $P(A|B)$ ② $P(B|A)$ ③ $P(A\cup B)$ ④ $P(A^c|B^c)$ ⑤ $P(B^c|A^c)$

1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

2) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{1/2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

4) نحسب أولاً P_{B^c} ، $P_{A^c\cap B^c}$

$P(B^c)=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P_{A^c}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

5 $P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c$

$$=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(A^c|B^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{5/12}{2/3}=\frac{5}{8}$$

$$P(B^c|A^c)=\frac{P(B^c\cap A^c)}{P(A^c)}=\frac{5/12}{1/2}=\frac{5}{6}$$

مثال: شعبة في الصف الأول تتألف من (25) طالباً و(10) طالبات فإذا اخترت (3) أسماء عشوائياً فما احتمال أن يكونوا ذكوراً من دون التكرار.

الحل

نفرض B_1 احتمال أن يكون الأول طالباً

B_2 〃 〃 〃 الثاني طالباً

B_3 〃 〃 〃 الثالث 〃

$$P(B_1B_2B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)\cdot P(B_3|B_1B_2)$$

٢٦

الاحتمال والتحليل التوافقي (استخدام التحليل التوافقي في حل المسائل)
في حالة السحب بدون إرجاع

مثال: صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء و(3) بيضاء و(9) زرقاء سحبت منه ثلاث كرات عشوائياً. احسب احتمال:

أ. جميعهم حمر
ب. " بيض
ج. 2 حمر 1 بيضاء
د. على الأقل واحدة بيضاء
هـ. واحدة من كل لون
و. الكرات تسحب بالترتيب التالي أحمر، أبيض، أزرق

8R
3W
9B

الحل

أ) نفرض R_1, R_2, R_3 [الحوادث المكونة حسب الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة حمراء]

الطريقة الأولى باستخدام قانون الضرب
لأن الحوادث الناتجة غير مستقلة نطبق قانون الضرب

$$P(R_1R_2R_3) = P(R_1)\cdot P(R_2|R_1)\cdot P(R_3|R_1R_2)$$
$$= \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

الطريقة الثانية باستخدام التحليل التوافقي

$$P(3R) = \frac{\text{عدد اختيار 3 كرات حمراء من 8 كرات}}{\text{عدد اختيار 3 كرات من 20 كرة}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285}$$

ب) $P(3W) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140}$

ج) $P(2R1W) = \frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{95}$

د) $P(\bar{W}) = \frac{\binom{17}{3}}{1140} = \frac{34}{57}$

27

$$P(\text{على الأقل واحدة بيضاء}) = 1 - P(\bar{W}) = \frac{23}{57}$$

هـ

$$P(1R\,1W\,1B) = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{18}{95}$$

و

$$P(R_1 W_2 B_3) = P(R_1)\,P(W_2 \mid R_1)\,.\,P(B_3 \mid R_1 W_2)$$
$$= \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{3}{19}\right)\left(\frac{9}{18}\right) = \frac{3}{95}$$

<u>مثال</u> اذا سحبت ~~[illegible]~~ كرتان عشوائياً من مجموعة كرات (8 حمراء) (8 بيضاء) فما هو احتمال ان تكون واحدة من كل لون

$$P(BA) = \frac{\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{16}{2}}$$

مثال

نظرية بيز Bays theorm

تعتمد هذه النظرية على ما يسمى بالاحتمال التقريبي الذي يحسب بعد اجراء التجربة وملاحظة نتائجها.

نظرية

اذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_K$ تشكل تجزئة لفضاء العينة S وكانت $B \subseteq S$ ، $B \neq \phi$ ، $P_B \neq 0$ فان

$$P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i)\, P(B \backslash A_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A_j) \cdot P(B \backslash A_j)}$$

في احصائكم لذ

البرهان : من تعريف الاحتمال الشرطي فان

$$P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)}$$

حسب مبرهنة قانون الضرب فان

$$P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)$$

وحسب نظرية بايز التمهيدية فان

$$\boxed{P(B) = \sum_{j=1}^{K} P(A_j) \cdot P(B \backslash A_j)}$$

نظرية بايز التمهيدية

وعليه يكون

$$P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A_j) \cdot P(B \backslash A_j)}$$

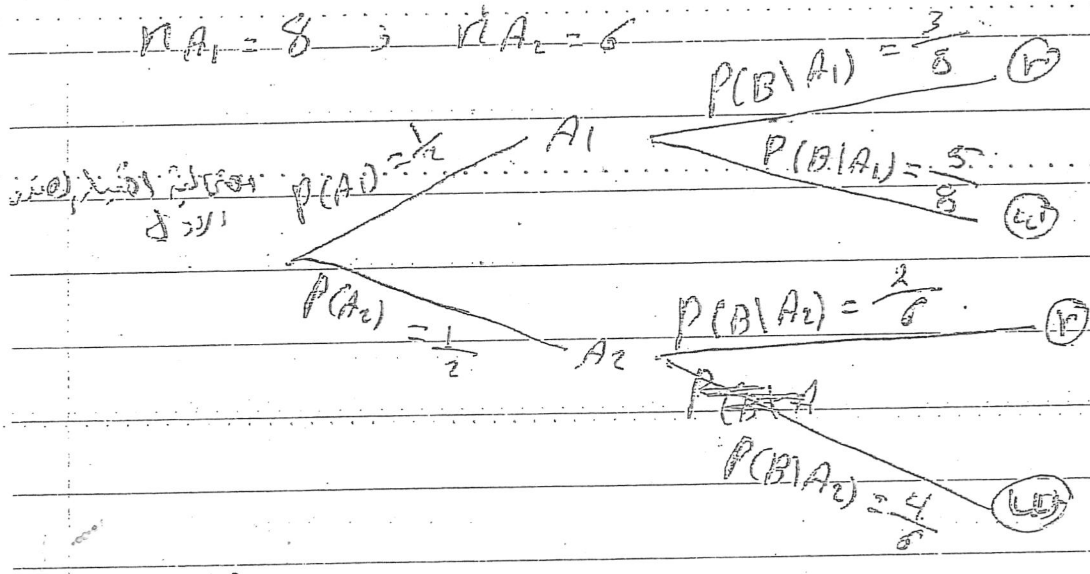
29

مثال: صندوقين الصندوق الاول فيه (3) كرات حمراء و(5) كرات بيضاء
الصندوق الثاني فيه (2) كرات حمراء و(4) كرات بيضاء.
اختر احد الصندوقين ثم اختر كرة من الصندوق المختار ثم جد
1) احتمالية ان تظهر كرة بيضاء.
2) اذا الكرة الحمراء ظهرت جد احتمالية ان تكون من الصندوق الثاني

A_1	A_2
3 Red	2 red
5 wit	4 w

الحل
ليكن A_1 حادثة اختيار الصندوق الاول
A_2 " " " الثاني
B " " الكرة

$n A_1 = 8$ ، $n A_2 = 6$



1) بما انه لا يحدد الصندوق اذن نختار نظرية بايز التمهيدية

$$P(B)_w = \sum P(A_i)\, P(B|A_i)_w = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} = \frac{9}{8} + \frac{7}{6} = \frac{54+56}{48}$$

2) بما انه حدد الصندوق اذن نستخدم نظرية بايز

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)_r}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)\cdot P(B|A_j)_r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{?}\cdot\frac{3}{?} + \frac{1}{?}\cdot\frac{2}{?}} = ?$$

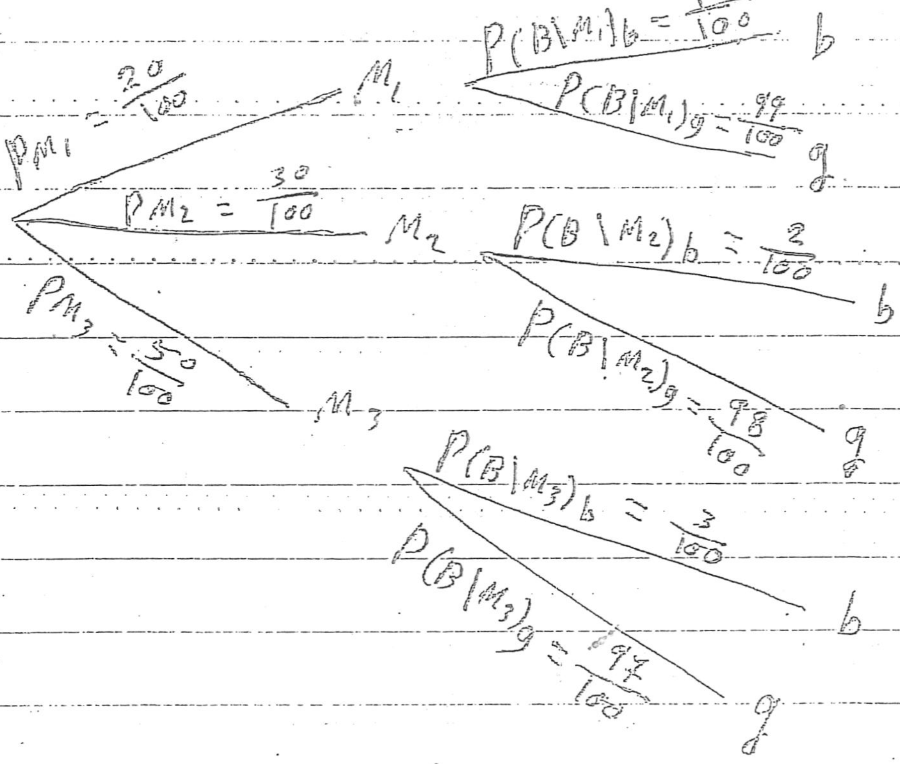
مثال: ثلاث مكائن M_1 و M_2 و M_3 تنتج اقداح. M_1 تنتج 20% من الاقداح و M_2 تنتج 30% من الاقداح و M_3 تنتج 50% من الاقداح. و M_1 تنتج 1% اقداح رديئة و M_2 تنتج 2% اقداح رديئة و M_3 تنتج 3% اقداح رديئة. اختر قدح ثم وجد:

① الاحتمالية ان يكون القدح المنتج من M_3 اذا كان القدح المختار رديء.

② احتمالية ان يكون القدح المختار رديء.

الحل

نرمز للرديء b وللجيد g ، (B) حادثة اختيار القدح.



نستعمل نظرية بايز لان هدف نوع الماكنة

$$P(M_3|B)_b = \frac{P(M_3)\cdot P(B|M_3)_b}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i)\cdot P(B|M_i)_b}$$

$$= \frac{P(M_3)\cdot P(B|M_3)_b}{P(M_1)\cdot P(B|M_1)_b + P(M_2)\cdot P(B|M_2)_b + P(M_3)\cdot P(B|M_3)_b}$$

$$= \frac{\frac{50}{100} * \frac{3}{100}}{\frac{20}{100} * \frac{1}{100} + \frac{30}{100} * \frac{2}{100} + \frac{50}{100} * \frac{3}{100}} = ?$$

② نستعمل نظرية بايز التمهيدية:

~~$P(BA^c)$ ... $P(AB) = \frac{1}{8}$~~

~~$P(AB) = \frac{1}{8} \neq 0$~~

~~$AB \neq 0$~~

~~$B = AB \cup BA^c$~~

~~$P(B) = P(AB \cup BA^c)$~~

~~$P(B) = P(AB) + P(BA^c)$~~

~~$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + P(BA^c)$~~

~~$P(BA^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$~~

~~مخطط المجموعات~~

~~مثال~~

~~$S = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$~~

~~$AB = \{1\}$~~

~~$A^c = \{3\}$~~

~~$B = AB \cup A^cB$~~

~~$B = \{1\} \cup \{3\} = \{1,3\}$~~

العينات العشوائية : Random sample

اذا كانت لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر ثم اختيار مجموعة مكونة من k من العناصر بحيث $k \leq n$ هذه مجموعة تسمى بالعينة العشوائية وكل مثل هذه المسائل هناك ثلاث حالات

الحالة الاولى :

في حالة عدم ذكر اي طريقة في السؤال اي عدم ذكر اصطلاح (بارجاع) او (بدون ارجاع) نستخرج عدد عناصر العينة اي فضاء العينة اي باستخدام قانون التوافيق

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال : اذا كان مجموعة مكونة من (4) عناصر (a, b, c, d) اختر عينة مكونة من (2) عنصر

① جد فضاء العينة لجميع العينات

② جد احتمالية العينة التي تحتوي على (b)

الحل

$S = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$

b) Let A be a sample has elts (b)

ولتكن A العينة التي تحتوي على b

$A = \{(a,b), (b,c), (b,d)\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال : لدينا مجموعة طلبة متكونة من (3) طلاب و (4) طالبات افرزت عينة او لجنة متكونة من (3) طلاب

a. ١- جد S

٢- جد احتمالية ان تحتوي العينة على (2) طلاب

٣- " " " " " على الاقل (2) طالبات .

الحل

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$

∴ S تحتوي على 35 عينة

b) $\frac{3b}{4g} \longrightarrow \left(\frac{2b}{1g}\right)$ المطلوب لجنة متكونة من طالبين وطالبة

هنا لدينا مجموعتين مجموعة الطلاب متكونة من (3) نختار منها (2)

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$

مجموعة الطالبات (4) نختار منها طالبة واحدة

$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 4$

∴ ~~المطلوبة~~ العينة A

$A = \binom{3}{2}\binom{4}{1}$

$= 3 \times 4 = 12$

$P(A) = \frac{12}{35}$

$$\binom{3b}{4g} \longrightarrow \binom{1b}{2g} \quad \binom{3}{1}\binom{4}{2} \quad B_1$$

$$\binom{3b}{4g} \longrightarrow \binom{0b}{3g} \quad \binom{3}{0}\binom{4}{3} \quad B_2$$

$$B_1 = \binom{3}{1}\binom{4}{2} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

$$= 3 \times 6 = 18$$

$$P_{B_1} = \frac{18}{35}$$

$$B_2 = \binom{3}{0}\binom{4}{3} = \frac{3!}{0!(3-0)!} \times \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

$$B = B_1 + B_2$$

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{18}{35} + \frac{12}{35} = \frac{30}{35}$$

الحالة الثانية / في حالة جاء في السؤال اختيار عينة عددها K من مجموعة من العناصر عددها n بحيث يذكر في السؤال (بدون ارجاع) في هذه الحالة نستخدم قانون التباديل لاستخراج عدد عناصر العينات

$$P_K^n = \frac{n!}{(n-K)!}$$

مثال / اذا كانت لدينا مجموعة مكونة من (4) عناصر (a,b,c,d) واخترت عينة من عنصرين (2) واحداً واحداً وبدون ارجاع

1- جد S

2- جد احتمالية العينة تحتوي على العنصر (a)

الحل

بما انه مذكور في السؤال بدون ارجاع نستخدم قانون التباديل

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \quad \text{عناصر}$$

$$S = \begin{Bmatrix} (a,b) & (b,a) & (c,a) & (d,a) \\ (a,c) & (b,c) & (c,b) & (d,b) \\ (a,d) & (b,d) & (c,d) & (d,c) \end{Bmatrix}$$

$$A = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (d,b)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

مثال: لدينا مجموعة مكونة من (خمسة أرقام) $\{2, 3, 5, 6, 8\}$ اختر عينة من ثلاثة أرقام واحد بعد الآخر وبدون ارجاع

أ- جد احتمالية ان العينة تقبل القسمة على (5)

ب- " " " " " (2)

الحل

$$P^5_3 = \frac{5!}{2!} = 60 \qquad S \text{ has } (60) \text{ samples}$$

ولتكن (A) العينة التي تقبل القسمة على خمسة

اشارة السحب لا تبدأ باشارة الترتيب ولكي تقبل الأرقام القسمة على (5)

يجب ان يكون الرقم الثاني (الآحاد) (5) أو صفر

$\boxed{2}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
2	3	5
3	6	
6	8	
8		

$$4 \times 3 \times 1 = 12 \qquad A \text{ has } (12) \text{ sample}$$

$$P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

ولتكن B العينة التي تقبل القسمة على (2)

ولكي تقبل القسمة على (2) يجب ان يكون آحاد

الرقم زوجي أو صفر

$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
3	5	2
5	6	6
6	8	8
8		

$$P(B) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

الباب الرابع

4

الباب الرابع

المتواليات Sequences

4.1 مقدمة

تعتبر المتوالية تركيبة منفصلة discrete structure تمثل قائمة لانهائية من القيم تتولد بطريقة محددة. وهي حالة خاصة من الدالة، لأنها عبارة عن دالة نطاقها الأعداد الطبيعية، فإذا رمزنا لاسم هذه الدالة بالرمز a فإن

$$a : Z \to S$$

حيث

$$Z = \{0,1,2,\dots\}$$

وبدلا من أن نستخدم a(n) كما هو الحال في الدوال، عادة ما نستخدم

$$\{a_n\}$$

للتعبير عن المتوالية.

4.2 أمثلة لبعض المتواليات

مثال(1): إذا كان $a_n = 5^n$ ، حيث $n = 0,1,2,\dots$

فإن هذه المتوالية يمكن سرد عناصرها كما يلي:

$$\{a_n\} = 1, 5, 25, 125, \dots$$

مثال(2): إذا كان $a_n = 1/n$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$

فإن المتوالية :

$$\{a_n\} = 1, 1/2, 1/3, \dots$$

لاحظ هنا أن النطاق لا يشمل الصفر لأن ذلك يؤدي إلى القسمة على صفر.

مثال(3): إذا كان $b_n = (-1)^n$ ، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$

فإن :

$$\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \ldots$$

مثال (4): أوجد الحد العاشر من المتوالية:

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53$$

علينا هنا أن نستنتج العلاقة بين الحد والذي يليه. نلاحظ أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6. وبالتالي فإن الحد العاشر هو $53 + 6 = 59$

4.3 المتوالية الحسابية arithmetic sequence

المتوالية في المثال (4) هي حالة خاصة من المتوالية الحسابية arithmetic sequence .

والشكل العام لها هو :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$$

فمثلا المتوالية:

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53$$

هي متوالية حسابية حيث نلاحظ هنا أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6 وبالتالي فإن $d=6$ $a=5$

مثال(5): هل المتوالية:

$$1, 7, 25, \ldots$$

حسابية؟

الإجابة : لا، لأن الفرق بين الحد الأول والثاني لايساوي الفرث بين الحد الثاني والثالث.

مثال(6) بين أن مجموع المتوالية الحسابية

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

هو $n(n+1)/2$

الاثبات:دع

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

يمكننا كتابة المتوالية تنازليا كما يلي

$$S = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

الآن نقوم بجمع الصيغتين:

$$2S = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + (n+1)$$
$$= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)$$

حيث نلاحظ وجود n من الحد n+1. أي أن

$$2S = n(n+1)$$
$$S = n(n+1)/2$$

4.4 مجموع المتوالية

أحيانا تكون حدود المتوالية مجموع حدود متوالية أخرى.

مثال(7): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum j^2$$

(حيث j من 1 الى n) عندما n=3 وعندما n=5؟

<u>الإجابة:</u>

$$a_n = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$$
$$a_3 = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$a_5 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

مثال(8): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum (-1)^k$$

حيث k من 0 الى n؟

<u>الإجابة:</u>

$$a_n = \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

هنا نلاحظ أن

$a_n = 0$ if n=even زوجي

$a_n = 1$ if n=odd فردي

4.5 المتوالية الهندسية geometric sequence

هي المتوالية

$$a_n = r^n$$

حيث r هو عدد حقيقي. مثلا إذا كانت r=2 فإن المتوالية تكون على النحو التالي:

1 , 2, 4 , 8 , ,,,

مثال(8): ما هي قيمة

$$a_n = \sum r^k$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n$

الإجابة: المطلوب هنا مجموع متوالية هندسية geometric sequence

حيث

$$a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

ملاحظة:

يمكن حساب مجموع المتوالية الهندسية من القانون:

$$\sum r^k = (r^{n+1} - 1) / (r - 1)$$

حيث k من 0 الى n . سنثبت هذا القانون في الفصل القادم إن شاء الله.

مثال(9): ما هي قيمة

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$$

الاجابة: هذه متوالية هندسية حيث في هذا المثال

$r = 2$, $n = 10$

لذلك فإن $S = (2^{11} - 1)/(2-1) = 2^{11} - 1 = 2047$

4.6 برنامج لمتوالية

مثال(10): اكتب برنامجا بلغة باسكال لطباعة 6 حدود من المتوالية التالية :

1, 2, 6, 24, 120, 720, ..

حيث $a_n = n!$

في كتابة هذا البرنامج نستفيد من العلاقة $(n+1)! = (n+1)n!$

```
PROGRAM factorial ;
VAR i , f : INTEGER ;
BEGIN
f = 1 ;
FOR I := 1 TO 6
BEGIN
WRITE (f : 6 );
```

```
  f = f * i ;
END;
END.
```

4.7 تمـــارين (7)

1) إذا كان

$$a_n = 2(-3)^n + 5^n$$

أوجد :

a) a_0 b) a_1 c) a_4 d) a_5

2) اكتب متوالية الأعداد الأولية prime numbers حيث العدد الأولي هو العدد الذي لايقبل القسمة إلا على نفسه أو على الواحد.

3) اكتب متوالية فيبوناتشي Fibonacci

حيث

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

أي أن كل حد يساوي مجموع الحدين السابقين.

4) اكتب المتوالية $\{a_n\}$ حيث

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

5) ما نوع المتوالية التالية :

3, 6, 12, 24,...

وما هو مجموع 8 حدود الأولى ؟ (بدون اجراء عملية الجمع)

6) استخدم قانون مجموع المتوالية الهندسية لتحويل العدد الثنائي $(11111111)_2$ الى النظام العشري؟

7) احسب:

a) $\sum (k+1)$

حيث k من 1 الى 5 .

b) $\sum (-2)^j$

حيث j من 0 الى 4 .

c) $\sum 3j^0$

حيث j من 1 الى 10 .

d) $\sum(2^{j+1} - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

e) $\sum (3^j - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

8) اثبت أن

$$\sum (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

حيث j من 1 الى n.

9) اثبت أن

$$\sum 1/[k(k+1)] = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$$

حيث k من 1 الى n.

ارشاد:

$$1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$$

10) اكتب برنامجا لطباعة 10 حدود الاولى من المتوالية {n(n+1)}

الباب

الخامس

5

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

5.1 مقدمة

إذا أعطيت دالة منطقية $P(n)$ كيف تبرهن أن هذه الدالة قيمتها TRUE لجميع الأعداد الصحيحة $n=0, 1, 2, \ldots$ ؟ هذا ما سندرسه في هذا الباب باستخدام ما يعرف بالاستنتاج الرياضي (أو الاستقراء الرياضي) .

معطيات المسألة هي الدالة المنطقية $P(n)$ والمطلوب اثبات أن

$$P(n) = \text{TRUE} \quad \forall n=0, 1, 2, ..$$

البرهان يعتمد على إتباع الخطوتين التاليتين:

1- التحقق من أن البداية صائبة ، أي أن $P(1) = \text{TRUE}$.

2- التحقق من أن التضمين :

$$P(n) \rightarrow P(n+1)$$

صائب (true) لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة .

إذا أثبتنا الخطوتين (1) و (2) فذلك يعني أن : $\forall n\ P(n) = \text{TRUE}$

أي أن الاستنتاج الرياضي يرتكز على النظرية التالية :

$$\boxed{P(1) \wedge (\forall n\ P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n\ P(n)}$$

والسؤال الذي يفرض نفسه هنا: لماذا إذا تحقق الشرطان المذكوران أعلاه فإن ذلك يعني أن $P(n)=\text{True}$ لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة؟

والإجابة أن الشرط الأول يحقق المطلوب في الخطوة الأولى ، والشرط الثاني يحققه في الخطوة الثانية والثالثة الى مالانهاية.

أي أن الاستنتاج الرياضي يقوم على أساس أنه إذا كانت البداية صحيحة وكانت كل مرحلة تؤدي الى المرحلة التي تليها بشكل صحيح فإن جميع المراحل ستكون صحيحة.

5.2 مجموع الأعداد الفردية

نبدأ أول مثال على استخدام فكرة الاستنتاج الرياضي باثبات أن مجموع الأعداد الفردية من 1 إلى $2n-1$ هو

$$P(n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

<u>الإثبات:</u>

أولا نلاحظ أن عندما $n=1$ $\qquad P(1) = 1 = (1)^2$

أي أن $P(1)$ صحيحة منطقيا .

الآن افترض أن $P(n)$ صحيحة منطقيا (أي أن $P(n)=n^2$) اثبت أن:

$$P(n+1) = (n+1)^2$$

وهذا يمكن اثباته كما يلي:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+2-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) \end{aligned}$$

$= n^2+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ أي أن $P(n+1)$

صحيحة منطقيا ، وبالتالي فإن :

$\forall n\, P(n)$ - صحيحة منطقيا لجميع $n=1, 2, 3, \ldots$.

5.3 اثبات المتباينات

يمكن استخدام الاستنتاج الرياضي في اثبات بعض المتباينات.

مثال: أثبت أن :إذا كانت n عدد صحيح $n\geq 0$ فإن $n<2^n$

<u>الإثبات:</u> الخطوة الأولى : بوضع $n=0$ فإن

$$0< 2^0$$

وهي صائبة لأن $1 > 0$.

الخطوة الثانية : افترض أن $P(n)$ صائبة منطقيا ، أي

$$n<2^n$$

اثبت أن $P(n+1)$ هي أيضا صائبة،

أي المطلوب إثبات أن :

$$n+1<2^{n+1}$$

وهي صائبة لأن بإضافة 1 لطرفي المتباينة $n<2^n$ نحصل على

$$n+1<2^n+1$$

وبما أن $(1<2^n)$ لجميع $n>0$ فإن

$$n+1<2^n+2^n=22^n=2^{n+1}$$

5.4 مجموع المتوالية الهندسية

أثبت أن مجموع المتوالية الهندسية

$$P(n)=1+r+r^2+\ldots+r^n$$

هو

$$[r^{n+1}-1]/(r-1)$$

حيث $n\geq 1$ ، $r>1$.

<u>الإثبات:</u>

$$P(1)=(r^2-1)/(r-1)$$

ولكن

$$r^2-1=(r-1)(r+1)$$

وبما أن $r\neq 1$ فإن

$$P(1)=r+1$$

أي أن الصيغة $P(n)$ تتحقق عندما $n=1$. والآن افترض أن $P(n)$ هي صائبة:

$$P(n)=(r^{n+1}-1)/(r-1)=1+r+r^2+\ldots+r^n$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned}P(n+1)= & \quad 1+r+r^2+\ldots+r^n+r^{n+1}\\ &= 1+r(1+r^2+\ldots+r^n)\\ &=1+r(r^{n+1}-1)/(r-1)\\ &=1+(r^{n+2}-r)/(r-1)\\ &=[r-1+(r^{n+2}-r)]/(r-1)\\ &=(r^{n+2}-1)/(r-1)\end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته.

5.5 رتبة فئة القوى

سبق ،ان ذكرنا الفئة ذات n عنصر لها 2^n فئة جزئية (أي أن رتبة فئة القوى لها هي 2^n) ويمكننا الآن اثبات ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي.

<u>الإثبات:</u> هذه النظرية صحيحة عندما $n=1$ لان الفئة ذات العنصر الواحد لها فئتان جزئيتان فقط هما $\varnothing$ (الفئة الخالية) والفئة نفسها.

الخطوة الثانية هي افتراض أن النظرية صائبة في حالة وجود n عنصر وإيجاد عدد الفئات الجزئية في حالة $n + 1$ عنصر .

لاحظ أن زيادة عنصر إلى الفئة S سيضاعف من عدد الفترات الجزئية (انظر الملاحظة أدناه) وهذا يعني أن عدد الفئات الجزئية في الفئة التي عناصرها n+1 هو

$$2^n + 2^n = 2\, 2^n = 2^{n+1}$$

وهو المطلوب إثباته .

<u>ملاحظة:</u> لتوضيح أن عدد الفترات الجزئية يتضاعف عند إضافة عنصر واحد للفئة . دع

$$P1 = \{A1, A2, \ldots, Am\}$$

هي فئة القوى للفئة A. إذا أضفنا العنصر a للفئة A فإن فئة القوى تصبح على النحو التالي:

$$P2 = \{A1, A2, \ldots, Am, A1\cup\{a\}, A2\cup\{a\}, \ldots, Am\cup\{a\}\}$$

حيث نلاحظ أن :

$$|P2| = 2m = 2|P1|$$

5.6 تمـــارين (8)

1- اثت أن $2^n > n^2$ حيث n عدد صحيح أكبر من 4

2-اثبت أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n+1)(2n+1)]/6$

حيث n عدد صحيح موجب .

3- اثبت أن

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1) = [(n+1)(2n+1)(2n+3)]/3$$

حيث n عدد صحيح موجب.

7
14
21
28

5	4
12	11
19	18
26	25