УДК 517.929.8

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ В ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хамид Кадим Аль Зухаири

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 01.12.2013 г.

Аннотация: целью настоящей работы является доказательство слабой сходимости при $\alpha \to 0$ решений начальной задачи стохастического эволюционного уравнения

$$dX_\alpha = (AX_\alpha(t) + a_\alpha(t, S_{h_1,\ldots,h_m}))dt + b_\alpha(t, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(t))dW_t,$$

$\alpha \in [0,1]$, с начальным условием $X_\alpha(0) = \varphi$, где A — производящий оператор аналитической полугруппы e^{At}, $S_{h_1,\ldots,h_m}$ — оператор, характеризующий наличие отклонений аргумента, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и $t \in [0,T]$.

Предполагается, что операторы a_α, b_α интегрально сходятся к a_0, b_0.

Ключевые слова: стохастические эволюционные уравнения, слабая сходимость, методы усреднения.

ON THE WEAK CONVERGENCE OF SOLUTIONS IN THE AVERAGING PRINCIPLE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

Hameed Kadhim Al Zuhairi

Abstract: The purpose of this paper is to prove the weak convergence as $\alpha \to 0$ for the initial value problem of a stochastic evolution equation

$$dX_\alpha = (AX_\alpha(t) + a_\alpha(t, S_{h_1,\ldots,h_m}))dt + b_\alpha(t, S_{h_1,\ldots,h_m} X_\alpha(t))dW_t,$$

$\alpha \in [0,1]$, with the initial condition $X_\alpha(0) = \varphi$, where A is a generator of an analytic semigroup e^{At}, $S_{h_1,\ldots,h_m}$ is an operator characterizing the presence of the deviations of the arguments, $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $t \in [0,T]$. It is assumed that the operators a_α, b_α converge integrally to a_0, b_0.

Keywords: stochastic evolution equations, weak convergence, averaging methods.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$dX_\alpha = (AX_\alpha(t) + a_\alpha(t, S_{h_1,\ldots,h_m}(t)))dt + b(t, S_{h_1,\ldots,h_m}(t))dW_t \tag{1}$$

с начальным условием

$$X_\alpha(0) = \varphi, \tag{2}$$

где $A : Dom(A) \to H$ является производящим оператор аналитической полугруппы e^{At} в гильбертовом пространстве H. Здесь W_t — U-значный процесс Винера с ядерным ковариационным оператором Q таким, что $trQ < +\infty$, W_t определяет фильтрацию $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$.

Пусть $a_\alpha : \mathbb{R} \times H^m \to H$, $b_\alpha : \mathbb{R}^1 \times H^m \to L(U, H)$ (см. [9]), отклонения аргумента $h_1, \dots, h_m$, удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant h_i(t) \leqslant t$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $t \in [0, T]$. Оператор $S_{h_1,\dots,h_m}$ сопоставляет функции X со значениями в H функцию $S_{h_1,\dots,h_m}$ со значениями в H^m по следующему правилу $S_{h_1,\dots,h_m}X(t) = (X(h_1(t)), \dots, X(h_m(t)))$. В конечномерном случае СДУ с отклоняющимся аргументом рассматривались в [1], [2]. В [3] было доказано, что если

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^t a_\alpha(smx)\, ds = \int_0^t a_0(s, x)\, ds, \ \ x \in H^m, t \geqslant 0, \tag{3}$$

и

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^t \|b_\alpha(s, x) - b_\alpha(s, x)\|^2\, ds = 0, x \in H^m, t \geqslant 0, \tag{4}$$

тогда $X_\alpha(t) \to X_0(t)$ в $L_2(\Omega)$. Очевидно, что предположение (4) исключает быстро осциллирующие диффузии. С другой стороны для СДУ без отклонение аргумента, как показано в работах Хасьминского [4], [5] в конечномерном случае и Врокоча [6] в бесконечномерном, при выполнении условия

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^t b_\alpha(s, x) Q b_\alpha^*(s, x)\, ds = \int_0^t b_0(s, x_Q b_0^*(s, x)\, ds \tag{5}$$

конечномерные распределения процесса X_α, сходятся к конечномерному распределению X_0.

Итак, рассмотрим начальную задачу (1) и (2), для $\alpha \in [0, \alpha_0)$, предполагая, выполнеными следующие условия:

i) $A : Dom(A) \to H$ является производящим оператор аналитической полугруппы e^{At} в H.

ii) $\|a_\alpha(t, x)\|_H + \|b_\alpha(t, x)\|_{L(U,H)} \leqslant C(1 + |x|_{H^m})$, для всех $x \in H^m$, $t \geqslant 0$ и $\alpha \in [0, \alpha_0]$,

и

iii) $\|a_\alpha(t, x) - a_\alpha(t, y)\|_H^2 + \|b_\alpha(t, x) - b_\alpha(t, y)\|_{L(U,H)}^2 \leqslant L(|x - y|_{H^m}^2)$, для всех $x \in H^m$, $t \geqslant 0$ и $\alpha \in [0, \alpha_0]$, где функция L невозрастающая, выпуклая функция такая, что для любой константы $C \geqslant 0$ интегральное неравенство

iv)

$$Z(t) \leqslant C \int_0^t L(S_{h_1,\dots,h_m} Z(s)) ds$$

имеет единственное решение $Z(t) \equiv 0$;

v) φ является, H-значной $\mathcal{F}$-измеримой случайной величиной.

Решения задачи (1), (2) будем понимать в интегральном смысле, т.е. как решения интегральных уравнений

$$X_\alpha(s) = e^{At}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} a_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} b_\alpha(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)) dW_s. \tag{6}$$

По теореме 7.4 из [1] (см. также теорему 1.4 из [7]) при каждом $\alpha \in [0, \alpha_0]$ существует единственное решение $X_\alpha \equiv X_\alpha(\cdot, \varphi)$ уравнения (6) и $X_\alpha \in \mathcal{C}([0, T], H)$ почти наверное, где $\mathcal{C}([0, T], H)$ пространство всех H-значных непрерывных функций на $[0, T]$. Под слабой сходимостью при $\alpha \to 0$ в $\mathcal{C}([0, T], H)$ случайных функций $X_\alpha \in \mathcal{C}([0, T], H)$, почти наверное,будем понимать следующее. Если (μ_α) — вероятностные меры определенные на борелевской σ-алгебре сепарабельного метрическою пространства M, то μ_α сходится слабо к μ_0 при

$\alpha \to 0$, если $\int\limits_M f\,d\mu_\alpha \to \int\limits_M f\,d\mu$ для любой ограниченной непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$. Если $X_\alpha : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathcal{C}([0,T], H)$ — случайная величина, то $X_\alpha \to X_0$ слабо в $\mathcal{C}([0,T], H)$ если, $\mu_\alpha(P) \to \mu_0(P)$ слабо в $\mathcal{C}([0,T], H)$, где вероятностные меры $\mu_\alpha(P)$ определяются формулой

$$\mu_\alpha(P)(C) = P\{X_\alpha \in C\}$$

для любого борелевского множества $C \subseteq \mathcal{C}([0,T], H)$.

Если $\mathcal{A} \in L(H)$, то $\mathcal{A}^*$ — сопряженный оператор. Через $|\mathcal{A}|_{\mathcal{N}}$ обозначается ядерная норма оператора $\mathcal{A} \in H$, при условии что $\mathcal{A}$-ядерныи оператор, то есть

$$|\mathcal{A}|_{\mathcal{N}} = \sup\left\{\sum_i |\langle \mathcal{A}e_i, f_i\rangle|; \{e_i\}, \{f_i\} \text{ ортонормированные базисы из } H\right\} < \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия i) – v). Пусть $T > 0$ произвольное, фиксированное число. Предположим, что

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^t e^{A(t-s)} a_\alpha(s,x)\,ds = \int\limits_0^t e^{A(t-s)} a_0(s,x)\,ds, \tag{7}$$

и

$$\lim_{\alpha\to 0+}\left|\int\limits_0^t e^{A(t-s)} U_\alpha(s,x) e^{A^*(t-s)} ds\right|_{\mathcal{N}} = 0, \tag{8}$$

для всех $x \in H^m$, $t \in [0,T]$, где $U_\alpha(t,x) = b_\alpha(t,x)Qb_\alpha^*(t,x) - b_0(t,x)Qb_0^*(t,x)$.

Тогда $X_\alpha(\cdot,\varphi) \to X_0(\cdot,\varphi)$ слабо в $\mathcal{C}([0,T], T)$ при $\alpha \to 0+$.

Нам потребуется следующее утверждение [6].

Предложение 1. (см. [6]) Пусть μ_n, $n \geqslant 0$ центрированные гауссовы меры на сепарабельном гильбертовом пространстве Y с операторами ковариации $\mathfrak{B}_n$. Тогда $\mu_n \to \mu_0$ слабо в Y если, и только если $|\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}|_{\mathcal{N}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Предложение 2 является модификацией предложение 2.2 из [6].

Предложение 2. Пусть U, V, H вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $H^m \to V$ — липшицево непрерывное отображение, пусть $\partial : [s,t] \times H^m \to L(U,V)$ — измеримое отображение, такое что

$$|\partial(r,x)|_{L(U,V)} \leqslant C(1 + |x|_{H^m}),\ |\partial(r,x) - \partial(r,y)|^2_{L(U,V)} \leqslant L(|x-y|^2_{H^m})$$

для постоянной C и $r \in [s,t]$, $x, y \in H$. Пусть $g \in BL(V)$, где $BL(V)$ — пространство всех ограниченных функций на V, удовлетворяющим условию Липшица. Положим

$$\Upsilon(y) = Eg\left(v(y) + \int\limits_s^t \partial(r,y)\,dW_r\right),\ y \in H^m.$$

Пусть $u : \Omega \to H$ — $\mathcal{F}_S$-измеримая случайная величина с $E|u|^2_H < \infty$. Тогда

$$\Upsilon(u) = E\left[g\left(v(u) + \int\limits_s^t \partial(r,u) dW_r\right)\middle|\mathcal{F}_S\right] P - \text{п.н.} \tag{9}$$

Доказательство. Для упрощения обозначений, мы будем рассматривать случай $v \equiv 0$; легко видеть, что это не ограничивает к общности.

Возьмем произвольное $\gamma > 0$, пусть $\{\zeta_i; i \in \mathbb{N}\}$ — плотное подмножество H и борелевское разбиение $\{\mathcal{T}; i \in \mathbb{N}\}$ в H определенное следующим образом

$$\mathfrak{T}(1) = \{\xi \in H; |\xi - \zeta_1| \leqslant \gamma\}, \mathfrak{T}(i+1) = \{\xi \in H; |\xi - \zeta_{i+1}| < \gamma\} \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \mathfrak{T}(j).$$

Можно считать, что $\zeta_i \in \mathfrak{T}(j)$ для любого; $j \in \mathbb{N}$. Определим

$$u_\gamma(\mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u(\mathfrak{m}))_{\zeta_i},\ \mathfrak{m} \in \Omega,$$

$$\Upsilon_\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(\xi) E g\left(\int_s^t \partial(r, \zeta_i) dW_r\right),\ \xi \in H,$$

где $\mathfrak{X}_{\Upsilon(j)}$ обозначает индикаторную функцию множества $\mathfrak{T}(j)$. Очевидно,

$$E|u - u_\gamma|_H^2 < \gamma^2$$

и

$$g\left(\int_s^t \partial(r, u_\gamma) dW_r\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u) g\left(\int_s^t \partial(r, \zeta_i) dW_r\right) P - \text{п.н.}$$

Поэтому

$$E\left[g\left(\int_s^t \partial(r, u_\gamma) dW_r\right)\middle| \mathcal{F}_S\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u) E\left[g\left(\int_s^t \partial(r, \zeta_i) dW_r\right)\middle| \mathcal{F}_S\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u) E g\left(\int_s^t \partial(r, \zeta_i) dW_r\right) = \Upsilon_\gamma(u).$$

Кроме того,

$$E\left|g\left(\int_s^t \partial(r, u_\gamma) dW_r\right) - g\left(\int_s^t \partial(r, u) dW_r\right)\right|^2 \leqslant \|g\|_{BL}^2 E\left|\int_s^t [\partial(r, u_\gamma) - \partial(r, u)] dW_r\right|_V^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|_{BL}^2 tr(Q) \int_s^t E|\partial(r, u_\gamma) - \partial(r, u)|_{L(U,V)}^2 dr \leqslant \|g\|_{BL}^2 C\, tr(Q) \int_s^t L(E|u - u_\gamma|_H^2) dr.$$

В силу непрерывности функции L последнее выражение стремится к нулю при $\gamma \to 0$. Поэтому

$$E\left[g\left(\int_s^t \partial(r, u_\gamma) dW_r\right)\middle| \mathcal{F}_S\right] \underset{\gamma \to 0+}{\to} E\left[g\left(\int_s^t \partial(r, u) dW_r\right)\middle| \mathcal{F}_S\right] \text{ в } L_2(\Omega).$$

Аналогично, если $\xi \in H$, то существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\xi \in \mathfrak{T}(j_0)$, таким образом,

$$|\Upsilon_\gamma(\xi) - \Upsilon(\xi)|^2 = \left|E g\left(\int_s^t \partial(r, \zeta_{j_0} dW_r\right) - E g\left(\int_s^t \partial(r, \xi) dW_r\right)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_{BL}^2 C\,tr(Q) \int_s^t L(E|\xi - \zeta_{j_0}|_H^2 dr.$$

Отсюда следует, что

$$\Upsilon_\gamma(s) \underset{\gamma \to 0+}{\to} \Upsilon(s) \text{ для всех } s \in H.$$

Отсюда вытекает (9). ■

Вернемся теперь к задаче (1)–(2). Пусть, выполнены условия теоремы 1.

Лемма 1. Для каждого $T > 0$ существует постоянная C такая, что для любого $\alpha \in [0, \alpha_0)$ имеем

$$E|X_\alpha(t)|_H^2 \leqslant C(1 + |\varphi|_H^2), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при условии, что правая часть конечна.

Поскольку оценка ii) равномерна по α, лемма 1 следует из теоремы 7.4 в [1], или теоремы 1.4 в [7]. Как видно из доказательств этих теорем легко видеть, что константа C не зависит от $\alpha \in [0, \alpha_0)$.

Для $N \in \mathbb{N}$, определим

$$g^N(X) = \begin{cases} X & \text{если} \quad |X| \leqslant N \\ \dfrac{N_X}{|X|_H} & \text{если} \quad |X| > N \end{cases}$$

тогда $\varphi^N \to \varphi$.

Зафиксируем $T > 0$ и произвольную последовательность $\alpha_n \in (0, \alpha_0)$, $\alpha_n \searrow 0$. Для краткости положим

$$a_{\alpha_n} = a_n, \quad b_{\alpha_n} = b_n, \quad P_{\alpha_n} = P$$

для краткости положим

$$X_n = X_{\alpha_n}(\cdot, \varphi), \quad X_n^N = X_{\alpha_n}(\cdot, \varphi^N), \quad X_0^N = X_0(\cdot, \varphi^N).$$

Обозначим математическое ожидание по мере P_{α_n} просто E без индекса, если это не приводит к двусмысленности.

Предложение 3. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ существует $\rho > 0$ такой, что

$$\sup_{n \geqslant 0} \max_{\substack{0 \leqslant s,t \leqslant T \\ |s-t| \leqslant \rho}} |X_n^N(t) - X_n^N(s)|^2 \leqslant \gamma.$$

Следствие 1. Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такое разбиение $\{0 = t_0 < \ldots < t_\ell = T\}$ отрезка $[0; T]$ такое, что

$$\sup_{n \geqslant 0} E\left(\max_{j=0,\ldots,\ell-1} \max_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_n^N(t) - X_n^N(t_i)|^2\right) \leqslant \gamma. \tag{10}$$

Ниже нам потребуется дискретизация процесса X_n^N. Пусть $\Pi = \{0 = t_0 < \ldots < t_\ell = T\}$ — разбиения отрезка $[0, T]$. Определим

$$X_n^\Pi(t) = e^{At}\varphi^N + \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i \Lambda t}^{t_{i+1} \Lambda t} e^{A(t-s)} a_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_n^\Pi(t)) ds +$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-1}\int\limits_{t_i\Lambda t}^{t_{i+1}\Lambda t} e^{A(t-s)}a_n(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t))dW_s \quad (11)$$

для любого $t\in[0,T]$ и $n\geqslant 0$, где $a\Lambda b=\min(a,b)$. (Заметим, что процесс X_n^{Π} зависит от N).

Лемма 2. Для любого $N\in\mathbb{N}$ и $\gamma>0$ существует такое разбиение $\Pi=\{0=t_0<\ldots<t_\ell=T\}$ на отрезка $[0,T]$ такое, что

$$\sup_{n\geqslant 0}\max_{i=0,\dots,\ell} E|X_n^N(t_i)-X_n^{\Pi}(t_i)|^2\leqslant\gamma.$$

Доказательство. По некоторому $\gamma>0$ и найдем разбиение $\Pi=\{0=t_0<\ldots<t_\ell=T\}$ такое, что выполнено (10). В силу (11), получим

$$E|X_n^{\Pi}(t_{j+1})-X_n^N(t_{j+1})|^2\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{t_{j+1}}|e^{A(t_{j+1}-s)}|^2_{L(H)}E\left|\sum_{i=0}^{j}\mathfrak{X}_{[t_i,t_{i+1})}(s)\left\{a_n(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i))-a_n(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s))\right\}\right|^2ds+$$

$$+2tr(Q)\int\limits_0^{t_{j+1}}|e^{A(t_{j+1}-s)}|^2_{L(H)}E\left|\sum_{i=0}^{j}\mathfrak{X}_{[t_i,t_{i+1})}(s)\left\{b_n(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i))-b_n(s,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s))\right\}\right|^2ds\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=0}^{j}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}L\left(E|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i)-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s)|\right)ds+$$

$$+C\sum_{i=0}^{j}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}L\left(E|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s)|^2\right)ds\leqslant$$

$$\leqslant C_\gamma+C\sum_{i=0}^{j}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}L(E|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i)-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(t_i)|^2)ds,$$

где $C_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$.

Таким образом,полагая

$$f_n(t)=E|X_n^{\Pi}(t_i)-X_n^N(t_i)|^2 \text{ при } t\in[t_i,t_{i+1}], i=0,\dots,\ell-1,$$

получаем следующую оценку $f_n(t)\leqslant C_\gamma+\int\limits_0^t L(S_{h_1,\dots,h_m}f_n(s))ds$, где $C_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$. Применения теорему о непрерывной зависимости от начальных данных для интегрального уравнения

$$y(t)=C_\gamma+\int\limits_0^t L(S_{h_1,\dots,h_m}y(s))ds$$

(см., [6]) получим требуемое утверждение. ■

Предложение 4. Пусть $N\in\mathbb{N}$ и $\Pi=\{0=t_0<\ldots<t_\ell=T\}$ — некоторое разбиение и v_n, $n\geqslant 0$ борелевские вероятности на $H^{\ell+1}$, определяемые равенством

$$v_n=(X_n^{\Pi}(t_0),\dots,X_n^{\Pi}(t_\ell))(P),$$

то есть

$$v_n(Q) = P\{\omega : (X_n^{\Pi}(t_0), \ldots, X_n^{\Pi}(t_\ell)) \in Q\}$$

для любого борелевского множества Q в $H^{\ell+1}$. Тогда $v_n \to v_0$ слабо в $H^{\ell+1}$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции. По предположениям теоремы 1 имеем $X_n^{\Pi}(t_0) \to X_0^{\Pi}(t_0)$ слабо в H. Предположим, что для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, слабая сходимость

$$\mu_n \equiv u_n(P) \to \mu_0 \equiv u_0(P) \text{ в } H^{i+1} \tag{12}$$

установлена, где $u_n = (X_n^{\Pi}(t_0), \ldots, X_n^{\Pi}(t_1))$.

Зададим $v_n : H^{i+1} \to H^{i+2}$, следующим образом.

По набору $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ определим на отрезке $[0, t_{i+1}]$ функцию $\overline{\xi}_i(s) = \xi_i$ при $s \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда

$$v_n(\xi_0, \ldots, \xi_i) = \left(\xi_0, \ldots, \xi_i, e^{A(t_{i+1}-t_i)}\xi_i + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} a_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s) ds\right),$$

и

$$\beta_n : H^{i+1} \to L^1(\Omega^n, H^{i+2}),$$

$$\beta_n(\xi_0, \ldots, \xi_i) = \left(0, \ldots, 0, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} b_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s) dW_s\right),$$

Очевидно,

$$X_n^{\Pi}(t_{i+1}) = e^{A(t_{i+1}-t_i)} X_n^{\Pi}(t_1) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} a_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_n^{\Pi}(t_1)) ds +$$
$$+ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} b_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m} X_n^{\Pi}(t_i)) dW_s,$$

таким образом

$$(S_{h_1,\ldots h_m} X_n^{\Pi}(t_0), \ldots, S_{h_1,\ldots,h_m} X_n^{\Pi}(t_{i+1})) = v_n(u_n) + \beta_n(u_n).$$

Возьмем произвольное $g \in BL(H^{i+2})$, где $BL(H^{i+2})$ — пространство всех ограниченных функций удовлетворяющим условию Липшица на H^{i+2} (см. [8], [9]) и положим

$$h_n(y) = Eg(v_n(y) + \beta_n(y)),\ y \in H^{i+1}.$$

Предложение 2 дает

$$Eg(X_n^{\Pi}(t_0), \ldots, X_n^{\Pi}(t_{i+1})) = Eh_n(u_n) = \int\limits_{H^{i+1}} h_n(\xi_j) d\mu_n(\xi_j)$$

из этого следует,

$$|Eg(X_n^{\Pi}(t_0), \ldots, X_n^{\Pi}(t_{i+1})) - Eg(X_0^{\Pi}(t_0), \ldots, X_0^{\Pi}(t_{i+1}))| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{H^{i+1}} |h_n(\xi) - h_0(\xi)| d\mu_n(\xi) + \left| \int\limits_{H^{i+1}} h_0(\xi) d\mu_n(\xi) - \int\limits_{H^{i+1}} h_0(\xi) d\mu_0(\xi) \right| \equiv \mathfrak{M}_1(n) + \mathfrak{M}_2(n).$$

Заметим, что

$$|h_n(\xi) - h_n(\eta)|^2 \leqslant \|g\|_{BL} E |v_n(\xi) - v_n(\eta) + \beta_n(\xi) - \beta_n(\eta)|^2_{H^{i+2}} \leqslant CL(|\xi - \eta|^2_{H^{i+1}})$$

для любых $\xi, \eta \in H^{i+1}$, по iii). Таким образом, $\mathfrak{M}_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$ по (12). Теперь заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\xi) = h_0(\xi) \text{ для любых } \xi \in H^{i+1}. \tag{13}$$

Во-первых,

$$v_n(\xi) - v_0(\xi) = (0, \ldots, o, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} [a_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_1(s)) - a_0(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s))] ds \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ в } H^{i+1},$$

по (7). Далее,

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} b_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s)) dW_S,$$

является центром гауссовской случайной величины в H с оператором ковариации

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-s)} b_n(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s)) Q b_n^*(s, S_{h_1,\ldots,h_m}\overline{\xi}_i(s)) ds,$$

так как $\beta_n(\xi) \to \beta(\xi)$ слабо в H^{i+2} по (1) и предложения 1, следовательно, $v_n(\xi) + \beta_n(\xi) \to v_0(\xi) + \beta_0(\xi)$ слабо в H^{i+2} для любых $\xi \in H^{i+1}$. Из определение h_n и слабой сходимости получаем (13).

Пусть дано произвольное $\delta > 0$, тогда существует компактное множество $\mathcal{K} \subseteq H^{i+1}$ такое, что

$$\inf_{n\geqslant 0} \mu_n(\mathcal{K}) \geqslant 1 - \delta. \tag{14}$$

Поскольку меры $\{\mu_n\}$ слабо сходятся, то в силу компактности $\mathcal{K}$, (13) функции h_n сходятся к h_0 равномерно на $\mathcal{K}$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{K}} |h_n(\xi) - h_0(\xi)| d\mu_n(\xi) = 0.$$

Наконец, из (14), и $\mathfrak{M}_1(n) \to 0$, а также предложения 4 имеем

$$\int\limits_{H^{i+1}\setminus\mathcal{K}} |h_n(\xi) - h_0(\xi)| d\mu_n(\xi) \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \sup_{H^{i+1}} |h_n| \delta. \quad \blacksquare$$

Следствие 2. Пусть заданы $N \in \mathbb{N}$ и разбиение $\Lambda = \{0 = s_0 < \ldots < s_q = T\}$ отрезка $[0, T]$. Тогда

$$(X_n^N(s_0), \ldots, X_n^N(s_q))(P) \underset{n\to\infty}{\to} (X_0^N(s_0), \ldots, X_0^N(s_q))(P) \text{ слабо в } H^{q+1},$$

то есть X_n^N сходятся к X_0^N в смысле конечномерных распределений.

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольное $\gamma \geqslant 0$. заметим, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{n \geqslant 0} P \left\{ w : \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X_n(t) - X_n^N(t)| > 0 \right\} \leqslant \gamma. \tag{15}$$

В силу [7] и непрерывности траекторий, имеем

$$P \left(\{\varphi_0 \in B(0, N)\} \bigcap \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X_n(t) - X_n^N(t)| > 0 \right\} \right) = 0,$$

поэтому, справедливо (15) справедливо. Используя следствие 2 мы находим разбиение $\{0 = t_0 < \ldots < t_\ell = T\}$ отрезка $[0, T]$ такое, что

$$\sup_{n \geqslant 0} E \left(\max_{i=0,\ldots,\ell-1} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_n^N(t) - X_n^N(t_i)| \right)^2 \leqslant \gamma^2. \tag{16}$$

Пусть $f \in BL(\mathcal{C}([0, T], H))$ — ограниченная функция, удовлетворяющим условию Липшица. Обозначим через $\mathfrak{L}$ пространство всех функций $\Psi : [0, T] \to H$, которые непрерывны справа и имеют пределы слева на $[0, T]$ и непрерывна на $(0, T) \setminus \{t_1, \ldots, t_{\ell-1}\}$; наделим $\mathfrak{L}$ нормой супремум. Тогда существует Липшицева функция $h^h \in BL(\mathcal{F})$ такая что, $f^h \in \mathcal{C}([0, T], H)$ на $\mathcal{C}([0, T], H)$ и $\|f^h\|_{BL} = \|f\|_{BL}$ (см. [9], теорема 6.1.1 и предложение 11.2.2). Определим

$$f^h : H^{\ell+1} \to \mathbb{R}, \quad y = (y_0, \ldots, y_\ell) \mapsto f^h(\widetilde{y}),$$

где $\widetilde{y} \in \mathfrak{L}$ определяется по $\widetilde{y} = y_i$, $t_i \leqslant t < t_{i+1}$. Тогда $f^h \in BL(H^{\ell+1})$ и $\|f^h\|_{BL} \leqslant \|f\|_{BL}$.

Далее, положим $\widetilde{X}_n(t) = X_n^N(t_i)$, $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, $i = 0, \ldots, \ell - 1$; очевидно, $\widetilde{X}_n$ — стохастический процесс с путями в $\mathfrak{L}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |E(f(X_n)) - E(f(X_0))| &\leqslant E|(f(X_n)) - (f(X_n^N))| + E|(f(X_n^N)) - (f^h(\widetilde{X}))| + \\ &+ |E(f^h(\widetilde{X})) - E(f^h(\widetilde{X}_0))| + E|(f^h(\widetilde{X})) - (f(X_0^N))| + E(f(X_0^N)) - (f(X_0))| \equiv \\ &\equiv \mathcal{K}_1(n) + \mathcal{K}_2(n) + \mathcal{K}_3(n) + \mathcal{K}_2(0) + \mathcal{K}(0). \end{aligned}$$

Полагая $v(n) = \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X_n(t) - X_n^N(t)| > 0 \right\}$, получаем

$$\mathcal{K}_1(n) = E\mathfrak{X}_{v(n)}|(f(X_n)) - (f(X_n^N))| \leqslant \|f\|_{BL} P_n(v(n)) \leqslant \|f\|_{BL}\gamma$$

для любого $n \geqslant 0$ по (15). Кроме того,

$$\mathcal{K}_2(n) = E|(f^h(X_n^N)) - (f^h(\overline{X}_n))| \leqslant \|f^h\|_{BL} E \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |(X_n^N(t)) - (\overline{X}_n(t))| \leqslant \|f\|_{BL}\gamma$$

для всех $n \geqslant 0$ по (16).

Окончательно

$$\mathcal{K}_3(n) = |E(f^h(X_n^N(t_0), \ldots, X_n^N(t_\ell))) - E(f^h(X_0^N(t_0), \ldots, X_0^N(t_\ell)))| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

поэтому учитывая произвольность $\gamma > 0$ и $f \in BL(\mathcal{C}([0, T], H))$ мы установили, что,

$$|E(f(X_n)) - E(f(X_0))| \leqslant (\|f\|_{BL} + 1)\gamma$$

для всех достаточно больших n. То есть

$$X_{\alpha_n}(\cdot, \varphi) \to X_0(\cdot, \varphi) \text{ слабо в } \mathcal{C}([0, T], H) \tag{17}$$

для любой последовательности $\alpha_n \searrow 0$.

Благодаря метризуемости слабой сходимости, (17) равносильно утверждению теоремы 1. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Da Prato G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / Da Prato G., Zabczyk J. — Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. — № 44: Cambridge University Press, 1992. — 454 p.

[2] Bogachev V. I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite–dimensional spaces / V. I. Bogachev, I. Vladimir // Acta Applicandae Mathematicae. — 1995. — № 40. – P. 25–93.

[3] Аль Зухаири Х. К. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Аль Зухаири Х. К. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 182–189.

[4] Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболичес ких и эллиптических дифференциальных уравнений и процессов с малой диффузией / Р. З. Хасьминский // Теория вероятностей и ее приложения. — 1963. — № 8. — С. 3–25.

[5] Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито / Р. З. Хасьминский // Кибернетика. — 1968. — № 4. — С. 260–279.

[6] Vrkoč I. Weak averaging of stochastic evolution equations / I. Vrkoč // Mathematica Bohemica. — 1995. — № 1. — P. 91–111.

[7] Seidler J. Maximal inequality revisited I / J. Seidler, G. Da Prato, J. Zabczyk // Math. Bohem. — 1993. — № 118. — P. 67–106.

[8] Chevet S. Compacité dans l'espace des probabilités de Radon gaussiennes sur Banach / S. Chevet // C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. — 1983. — №. 296. — P. 275–278.

[9] Dudley R. M. Real analysis and probability / Dudley R.M. — Wadsworth & Brook – Cole, Pacific Grove, 1989. — 380 p.

REFERENCES

[1] Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 1992, № 44: Cambridge University Press, 454 p.

[2] Bogachev V. I., Vladimir I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite–dimensional spaces. Acta Applicandae Mathematicae, 1995, № 40, pp. 25–93.

[3] Al Zuhairi H. K. On the averaging principle for stochastic differential equations with deviating argument. [Al' Zuxairi X. K. O principe usredneniya dlya stoxasticheskix differencial'nyx uravnenij s otklonyayushhimsya argumentom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 182–189.

[4] Khas'minskii R.Z. On the averaging principle for parabolic cal and elliptic differential equations and processes with small diffusion. [Xas'minskij R. Z. O principe usredneniya dlya paraboliches kix i e'llipticheskix differencial'nyx uravnenij i processov s maloj diffuziej]. *Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya — Theory of Probability and its Applications*, 1963, no. 8, pp. 3–25.

[5] Khas'minskii R.Z. On the averaging principle for Ito stochastic differential equations. [Xas'minskij R. Z. O principe usredneniya dlya stoxasticheskix differencial'nyx uravnenij Ito]. *Cybernetic — Kibernetika*, 1968, no. 4, pp. 260–279.

[6] Vrkoč I. Weak averaging of stochastic evolution equations. Mathematica Bohemica, 1995, no. 1, pp. 91–111.

[7] Seidler J., Da Prato G., Zabczyk J. Maximal inequality revisited I. Math. Bohem., 1993, no. 118, pp. 67–106.

[8] Chevet S. Compacité dans l'espace des probabilités de Radon gaussiennes sur Banach. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 1983, no. 296, pp. 275–278.

[9] Dudley R. M. Real analysis and probability. Wadsworth&Brook. ColePacificGrove, 1989, 380 p.

Хамид Кадим Аль Зухаири, аспирант физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: hkd73@mail.ru

Hameed Kadhim Al Zuhairi, Post-graduate student, Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: hkd73@mail.ru