الفصل الأول

تعاريف ونظريات أساسية

سندرس في هذا الفصل مفهوم الزمرة وخواصها الأساسية.

تعريف (١-١):الزمرة (Group)

يقال عن $(G,*)$ إنها زمرة حيث G مجموعة غير خالية إذا تحقق:

١) $*$عملية ثنائية على G.

$$a*b \in G, \forall a,b \in G$$

٢) $*$عملية تجميعية على G.

$$(a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in G$$

٣) يوجد عنصر محايد $e \in G$ بحيث أن:

$$e*a = a*e, \forall a \in G$$

٤) لكل $a \in G$ يوجد $a^{-1} \in G$ معكوس بحيث أن:

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a, \forall a \in G$$

حيث e العنصر المحايد.

نظرية(١-١):

إذا كانت$(G,*)$ زمرة فإن:

١) العنصر المحايد يكون وحيد.

٢) لكل عنصر $a \in G$ معكوس وحيد.

مثال (١-١):

نفرض أن:

$$A = \{a,b\}$$

$$P(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$$

فإن$(P(A),U)$: ليست زمرة.

U	ϕ	{a}	{b}	A
ϕ	ϕ	{a}	{b}	A
{a }	{a }	{a}	A	A
{b}	{b}	A	{b}	A
A	A	A	A	A

مثال (١-٢):

لتكن $V=\{e,a,b,c\}$.

$*$	e	a	B	C
E	e	a	B	C
a	a	e	C	B
b	b	c	E	A
c	c	b	A	E

نجد أن $(V,*)$ زمرة.

تعريف (١-٢):الزمرة الإبدالية (Abelian Group).

إذا كانت $(G,*)$زمرة تحقق:

$$a*b=b*a\ ,\forall a,b\in G$$

فيقال عن G إنها زمرة إبدالية.

مثال(١-٣):

١) Z,R,Q,C مع الجمع العادي زمرة إبدالية وكذلك R^*,Q^*,C^* مع عمليه الضرب العادي .

٢) $(Z^*,.)$ ليست زمرة لان لا يوجد لكل عنصر معكوس عدا العنصرين 1و-1

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \notin Z^*$$

وعلى سبيل المثال $2 \in Z^*$ ولكن $\frac{1}{2} \notin Z^*$.

نظرية (١-٢): قانون الحذ ف (الاختصار) (Cancellation low).

إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإنه :

$$a*b = a*c \Rightarrow b = c \quad \forall a,b,c \in G$$

$$b*a = c*a \Rightarrow b = c$$

نظرية (١-٣):

إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإنه لكل $a,b \in G$ لدينا :

١) $(a^{-1})^{-1} = a$

٢) $(ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$

٣) زمره G إبدالية إذا وإذا فقط كان $(ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$

٤) يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين :

$ax = b$, $ya = b$ في الزمرة G.

- إذا كان $n \in Z$, $a \in G$ فإن $a^n \in G$ حيث :

$$a^n = \begin{cases} aa..a, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ a^{-1}a^{-1}..a^{-1}, & n < 0 \end{cases}$$

نظرية (١-٤):

إذا كانت $a,b \in G$ وكانت $m,n \in Z^+$ فإن :

١) $a^m a^n = a^{m+n}$

٢) $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

٣) $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$

٤) كانت G إبدالية فإن $(ab)^n = a^n b^n$

مثال (١-٤) :

إذا كانت G زمرة حيث $a^2=e$ لكل $a \in G$ فأثبت ان G زمره إبدالية .

الحل :

نلاحظ أن $a^2 = e \to a = a^{-1}$
نفرض ان $a, b \in G$

$(ab)^2 = e \to abab = e$

بضرب العلاقة في $b^{-1}a^{-1}$ من اليمين نحصل على

$\to ab = b^{-1}a^{-1} = ba$

مثال (١-٥) :

إذاكانت G زمرة وكانت $a, b \in G$ حيث

$a^{-1}b^2a = b^3 \ , a^2 = e$

فأثبت أن $b^5 = e$.

الحل :

$\because a^2 = e \to a = a^{-1}$

$a^{-1}b^2a = b^3 \to b^2a = ab^3 \to a = b^{-2}ab^3$

$e = a^2 = b^{-2}ab^3b^{-2}ab^3 = b^{-2}abab^3 \to b^2 = abab^3$

$b^2 = abab^3 \to e = abab \to a^{-1} = bab \to a = bab$

$b^3 = a^{-1}b^2a = abba \to b^4 = babba \to b^5 = babbab = aa = a^2 = e$

تعريف (١-٣) :

يقال عن $(G,*)$ زمرة أنها منتهية (finite) إذاوإذا فقط كانت المجموعة G منتهية.
وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فيقال عن الزمرة G أنهاغير منتهية (in finite)، وترمز
لعدد عناصر الزمرةG بالرمز|G| وتسمى برتبة الزمرةG (order of G).

مثال (١-٦) :

$(S_n,\circ)$ حيث S_n هي مجموعة التبديلات على {1,2...,n}
و $\circ$ هي عملية تحصيل التبديلات زمرة غير إبدالية لكل $n \geq 2$ وتسمى زمرة التبديلات ورتبتها !n.
لنأخذ $(S_3,\circ)$ على سبيل المثال :

$$S_3=\{(1),(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2),(2\ \ 3),(1\ \ 3),(1\ \ 2)\}$$

زمرة غير إبدالية منتهية ورتبتها 6=!3.

مثال (١-٧) :

لتكن $V=\{e,a,b,c\}$

.	E	a	B	C
e	E	a	B	C
a	A	e	C	B
b	B	c	E	A
c	C	b	A	E

من جدول كيلي نجد ان (.,V) زمرة إبدالية ورتبتها 4.

مثال (١-٨) :

جميع الزمر في مثال (١-٢)(١)زمرة إبدالية غير منتهية.