مثال (١-١٣):

١) إذا كانت $G=(S_3,\circ)$ فإن:

$$z(G)=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right\}=\{(1)\}$$

٢) إذا كانت $G=GL(2,R)$ زمرة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية فإن

٣) $$z(G)=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}: a\neq 0, a\in R\right\}$$

نظرية (١-١٢):

لتكن $(G,*)$زمرة فإن $Z(G)$ زمرة جزئية إبدالية من $(G,*)$.

نظرية (١-١٣):

لتكن $(G,*)$زمرة فإن $Z(G)=G$ إذا و إذا فقط كانت G إبدالية.

تعريف (١-٧):

الزمرة الجزئية المولدة للمجموعة Subgroup Generated by – S
.(S)

لتكن G زمرة و $S\subseteq G$ تعرف الزمرة الجزئية المولدة بـ S ويرمز لها بالرمز $\langle S\rangle$ على أنها: $\langle S\rangle=\bigcap_{r\in\Gamma}\{H_r : S\subseteq H_r\leq G\}$ أي إن $\langle S\rangle$ هي الزمرة الجزئية التي نحصل عليها من تقاطع جميع الزمر الجزئية من G التي تحتوي على S.

ملاحظات:

١) إذا كانت $G=\langle S\rangle$ فنقول إن المجموعة S تولد G (أو إن G مولدة بالمجموعة S).
٢) اذا كانت $S=\phi$ أو كانت $S=\{e\}$ فإنه $\langle S\rangle=\{e\}$.
٣) اذا كانت G زمرة فإن $G=\langle G\rangle$.
٤) اذا كانت $G=\langle S\rangle$ وكانت S منتهية فنقول أن G منتهية التوليد (Finitely Generated).

نظرية (١-١٤):

اذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G فإن $H=\langle S\rangle$ حيث $H=\{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\ldots a_n^{e_n}: a_i\in S, e_i=\pm1, 1\le i\le n, n\in\mathbb{Z}^+\}$.

مثال (١-١٤):

١) زمرة الرباعيات (Quaternion Group) على انها الزمرة Q_8 المولدة بالعنصرين a,b حيث $ba=a^3b=a^{-1}b$ ، $a^2=b^2$

$$Q_8=\langle a,b \mid a^4=1, a^2=b^2, aba=b\rangle=\{1,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$$

$|a|=|b|=4$ زمرة غير إبدالية رتبتها 8.

٢) الزمرة الزوجية (Dihedral Group) تكون من الدرجة $n\ge 3$ يرمز لها بالرمز D_n وهي زمرة غير ابدالية مولدة بالعنصرين a,bحيث $|a|=n, |b|=2$ وتحقق العلاقة $ba=a^{-1}b$ و $|D_n|=2n$ حيث $n\ge 3$ ، $D_n=\langle a,b \mid a^n=b^n=(ab)^2=1\rangle$.

تعريف(١-٨): الزمر الجزئية الدائرية (Cyclic Sub groups).

لتكن G زمرة وليكن $a\in G$ تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a زمرة جزئية دائرية ويرمز لها بالرمز $\langle a\rangle$. أي أن $\langle a\rangle=\{a^n: n\in Z\}$.

وتكون الزمرة G زمرة دائرية إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $G = \langle a \rangle$.

مثال(١-١٥):

١) الزمرة $(Z,+)$ زمرة دائرية غير منتهية مولدها 1 (أو العدد -1)
كذلك الزمرة $(Z_n, \oplus)$دائرية منتهية لان $Z_n = \langle [1] \rangle$.

٢) الزمرة $(G,.)$ حيث $G = \{1,-1,i,-i\}$ و $\sqrt{-1} = i$ هي زمرة دائرية منتهية مولدها i أو $-i$ (معكوس الـ i) وذلك لان:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = i.i = -1$$
$$i^3 = i.i.i = -i$$
$$i^4 = i.i.i.i = 1$$

٣) الزمرة $V-gp$ ليست دائرية لأن $a^2 = b^2 = c^2 = e$ لذا فإنه لا يمكن إيجاد عنصر يولد V.

٤) الزمرة $(Q,+)$ ليست دائرية لأنه لو وجد $\frac{a}{b} \in Q$ حيث $Q = \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$
و حيث $(a,b) = 1$ فإن $\frac{a}{2b} \in Q$ ولذا فان $\frac{a}{2b} = n\frac{a}{b}$ حيث
$0 \neq n \in z$
ومنه فإن $n = \frac{1}{2} \in z$ وهذا مستحيل.

نظرية (١-١٥):

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دائرية فإن G إبدالية.

ملاحظة:
عكس النظرية السابقة غير صحيح دائما أي انه ليس بالضرورة إذا كانت G إبدالية أن تكون G زمرة دائرية مثل $V-gp$.

نظرية (١-١٦):

كل زمرة جزئية من زمرة دائرية تكون دائرية أيضا.

نظرية (١-١٧):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ فان رتبة G تساوي رتبة a.

نظرية (١-١٨):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية منتهية رتبتها n فان
$G=\{e,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$.

نظرية (١-١٩):

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية منتهية رتبتها n :
١) فانه لكل قاسم موجب d للعدد n توجد زمرة جزئية وحيدة من G رتبتها d.
٢) d القاسم المشترك الأعظم للعددين t و n حيث $t\in Z^{+}$ عندئذ للزمرة الجزئية الدائرية من G المولدة بالعنصر a^{t} رتبه تساوي $\frac{n}{d}$.

نتيجة (١-٤):

الشرط اللازم والكافي لكي يكون a^{t} مولدا للزمرة الدائرية المنتهية المولدة بالعنصر a في G التي رتبتها n هو ان يكون العددان صحيحان موجبان t و n واوليان نسبيان في Z^{+}.

مثال (١-١٦):

عين جميع الزمر الجزئية من $(Z_{18},\oplus)$.

الحل:

١) مولدات Z_{18} بما أن $Z_{18}=\langle 1\rangle$ وان $|Z_{18}|=18$

k [1] مولدا للزمرة Z_{18} $\Leftrightarrow$ $(k,18)=1$ أي أن $k=1,5,7,11,13,17$.

$$Z_{18}=\langle 1\rangle,\langle 5\rangle,\langle 7\rangle,\langle 11\rangle,\langle 13\rangle,\langle 17\rangle$$

٢) نجد الان $\langle 2\rangle$:

$$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$$

زمرة جزئية من Z_{18} رتبتها ٩ فإن مولداتها

$\langle 2\rangle=\langle 4\rangle=\langle 8\rangle=\langle 10\rangle=\langle 14\rangle=\langle 16\rangle$.

٣) عند الزمرة الجزئية $\langle 6\rangle$:

$\langle 6\rangle=\{0,6,12\}$ مولداتها $\langle 6\rangle=\langle 12\rangle$.

٤) نجد الان $\langle 3\rangle$:

$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9,12,15\}$ مولداتها $\langle 3\rangle=\langle 15\rangle$.

٥) عند $\langle 9\rangle$:

$\langle 9\rangle=\{0,9\}$.

نظرية (١-٢٠):

لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دائرية غير منتهية:

١) اذا كانت $\{e\}\neq H\leq G$ فان غير منتهية أيضا.

٢) $a^r=a^t$ إذا وإذا فقط كان $r=t$ لكل $r,t\in Z$.

٣) a و a^{-1} هما المولدان الوحيدان للزمرة G.