تعريف (١-٩): صفوف التجاور (Cosets).

١)إذا كانت $(G,*)$ زمرة ولتكن $H \le G$ و $a \in G$ تعرف صف تجاور أيمن (Right Coset) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها $Ha = \{ha : h \in H\}$.

٢)تعرف صف تجاور ايسر(Left Cost) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بانها $aH = \{ah : h \in H\}$

مثال (١-١٧):

١) إذا كانت $G = (Z,+)$ ، $A = \langle 4 \rangle$ فإن A زمرة جزئية من G ، صفوف التجاور اليمنى للزمرة الجزئية A في G هي:

$$A = \{0,\pm4,\pm8,\ldots\} = A+4$$
$$A+1 = \{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$$
$$A+2 = \{\pm2,\pm6,\pm10,\ldots\}$$
$$A+3 = \{\ldots,-5,-1,3,7,\ldots\}$$

وصفوف التجاور اليسرى للزمرة الجزئية A في G هي:

$$A = \{0,\pm4,\pm8,\ldots\} = 4+A$$
$$1+A = \{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$$
$$2+A = \{\pm2,\pm6,\pm10,\ldots\}$$
$$3+A = \{\ldots,-5,-1,3,7,\ldots\}$$

نلاحظ أن $x+A = A+x$ لكل $x \in G$ لان G زمرة إبدالية.

٢) إذا كانت

$$G = D_3 = \langle x,y \mid x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle = \{1,x,x^2,y,xy,x^2y\}$$

$A = \langle x \rangle, B = \langle y \rangle$ كلا من A و B زمر جزئية من G.

صفوف التجاور اليمنى لـ A في G هي:

$$A = A.1 = \{1, x, x^2\} = A.x = A.x^2$$
$$A.y = \{y, xy, x^2y\} = A.xy = A.x^2y$$

صفوف التجاور اليسرى لـ A في G هي:

$$B = B.1 = \{1, y\} = B.y$$
$$B.x = \{x, x^2y\} = B.x^2y$$
$$B.x^2 = \{x^2, xy\} = B.xy$$

صفوف التجاوز اليسرى لـ B في G هي:

$$B = 1.B = \{1, y\} = y.B$$
$$x.B = \{x, xy\} = xy.B$$
$$x^2.B = \{x^2, x^2y\} = x^2y.B$$

نلاحظ ان $Ab = bA$ لكل $b \in G$ بينما $Bb \neq bB$ لكل من $b \in G$ لان $Bx \neq xB$

ملاحظات:

١) نلاحظ ان $eH = H = He$ لكل $H \leq G$.

٢) نلاحظ ان لكل $a \in G$ يكون $a = ae \in aH$ و $a = ae \in Ha$.

٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فانه من الواضح أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

نظرية (١-٢١):

إذا كانت G زمرة، $H \leq G$ فان:

١) $H = Ha \Leftrightarrow a \in H$

٢) $aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ أو $(b^{-1}a \in H)$ لكل $a, b \in G$.

٣) $aH = bH$ او $aH \cap bH = \phi$ لكل $a, b \in G$ يعني هذا ان كل صفي تجاوز ايسر لـ H في G أما ان يتطابقا او ان يكون ناتج تقاطعهما المجموعة الخالية.

٤) عدد صفوف التجاوز اليمنى لـ H في G يسلوي عدد صفوف التجاوز اليسرى لـ H في G أي ان $|H| = |aH| = |Ha|$

٥) اذا كانت $(H,*)$ منتهية وكانت $|H|=m$ عندها كل صف تجاوز ايسر لـ H في G يتألف من m عنصرا.

تعريف (١-١٠): دليل زمرة جزئية (Index of Subgroup).

إذا كانت $H \leq G$ فاننا نسمي عدد صفوف التجاوز اليمنى أو اليسرى لـ H في G انه دليل H في G ونرمز لهذا العدد بالرمز $[G:H]$.

مثال (١-١٨):

في المثال (١-١٧) نجد أن:

١) $[G:A]=4$.

٢) $[G,B]=3$,$[G:A]=2$.

مثال (١-١٩):

إذا كانت $G=Z$ وكانت $H=3Z$ نجد ان صفوف التجاوز اليسرى لـ H في G هي:

$$H=3Z \ ,1+H=1+3Z,\ 2+H=2+3Z$$

$[Z:3Z]=3$.

وبصورة عامة صفوف التجاوز اليسرى (اليمنى) للزمرة nZ حيث $n\in Z^+$ هي:

$$1+nZ,2+nZ,\ldots,(n-1)+nZ,nZ$$

أي أن $[Z:nZ]=n$.

نظرية (١-٢٢):

إذا كانت G زمرة، $A,B \leq G$ وإذا كانت $[G:A]=m$ ،$[G,B]=n$ فإن:

$[G:A\cap B]\leq mn$ وعندما $(m,n)=1$ يكون $[G:A\cap B]=mn$.

نظرية (١-٢٣): نظرية لاجرانج (Lagrange's Theorem).

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن:
$|G|=[G:H]|H|$ ومن ثم فان $|H|$ يقسم $|G|$ أي رتبة H تقسم رتبة G.

نتيجة (١-٥):

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان $a\in G$ فإن $a^n=e$.

نتيجة (١-٦):

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عددا أوليا p فإن G دائرية.

نتيجة (١-٧):

إذا كانت G زمرة منتهية. $a\in G$ فإن $|a|\backslash|G|$.

نظرية (١-٢٤):

إذا كانت A,B زمرتين جزئيتين منتهيتين من الزمرة **G** فإن

$$|AB|=\frac{|A||B|}{|A\cap B|}$$

مثال (١-٢٠):

لاتوجد زمرة جزئية من A_4 رتبتها 6.

نظرية (١-٢٥):

إذا كانت $k\leq H\leq G$ وكان كل من $[G:H]$ و $[H:k]$ منتهيا فإن:
$[G:k]$ منته وأن $[G:k]=[G:H][H:k]$

مثال (١-٢١):

لتكن G زمره من الرتبة p^n حيث P عدد أولي. أثبت أن G تحتوي على عنصر رتبته P.

الحل:

لنفرض $e \neq a \in G$, $H = \langle a \rangle$ زمرة جزئية دائرية من G وأن $|H|$ يقسم p^n لذا فإن $|H| = p^m$ حيث $o < m \leq n$.

بما أن H دائرية و p تقسم $|H|$ فإنه توجد زمره جزئية $T \leq H$ حيث $|T| = P$

ولكن T دائرية.

$\therefore$ يوجد $b \in T$ حيث $T = \langle b \rangle$ بتالي $|b| = p$.

تعريف (١-١١):

لتكن G زمره وَ $a \in G$. يعرف ممركز a في G (Centralizer of a in G) بأنه المجموعة $C(a) = \{x \in G: xa = ax\}$.

أي أنه مجموعة عناصر G التي تحقق خاصية الإبدال مع العنصر a.

مثال (١-٢٢):

إذا كانت $G = D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$

$C(1) = G$

$C(a) = \{1, a, a^2, a^3\} = C(a^3)$

$C(a^2) = G \quad \rightarrow a^2 \in Z(G)$

$C(b) = \{1, b, a^2, a^2 b\} = C(a^2 b)$

$C(ab) = \{1, ab, a^2, a^3 b\} = C(a^3 b)$