المحاضرة الاولى

الفضاء التبولوجي (Topological Space)

اعداد أ.م. محمد علي مراد

المصدر: مقدمة في التبولوجيا العامة ، د. سمير بشير

قبل البدأ بتعريف التبولوجي والفضاء التبولوجي سنستذكر تعريف مجموعة القوى.

مجموعة القوى (Power Sets)

لتكن X مجموعة ما غير خالية ، تعرف مجموعة القوى على المجموعة X بأنها مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة X ويرمز لها بالرمز P(X) .

ملاحظة: اذا كان عدد عناصر المجموعة X يساوي n فيكون عدد عناصر المجموعة P(X) يساوي 2^n .

مثال: لتكن X={1,2} ، احسب P(X) .

الحل: نلاحظ عدد عناصر X يساوي 2 فأن عدد عناصر P(X) يساوي $2^2 = 4$
اذن $P(X) = \{X , Ø , \{1\} , \{2\} \}$

مثال: لتكن X={1,2,3} ، احسب P(X) .

الحل: نلاحظ عدد عناصر X يساوي 3 فأن عدد عناصر P(X) يساوي $2^3 = 8$
اذن $P(X) = \{X , Ø , \{1\} , \{2\} \{3\} ,\{1,2\} ,\{1,3\} ,\{2,3\} \}$

وهكذا لأي مجموعة نستطيع ان نجد مجموعة القوى.

تعريف الفضاء التبلوجي :Topological Space

لتكن X مجموعة ما غير خالية ، T تجمع من المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط التالية:

١. T تحتوي المجوعتين X و Ø .

٢. اتحاد أي عدد من عناصر T يكون عنصراً في T.

٣. تقاطع اي عنصرين من عناصر T يكون عنصراً في T.

يسمى T تبولوجي على X. ويسمى الزوج المرتب (X،T) فضاء تبولوجيا Topological Space.

ويسمى كل عنصر A من عناصر T مجموعة مفتوحة(Open set).

مثال١:

لتكن $X=\{a,b,c\}$ و $T=\{X, \emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ،

اولاً: هل T تمثل تبولوجي على X؟

الحل : نعم تمثل وذلك لتحقيق شروط تعريف الفضاء التبولوجي الثلاثة حيث:

١. نلاحظ ان $X, \emptyset \in T$

٢ . اتحاد أي عدد من عناصر T يكون عنصراً في T.

٣. تقاطع اي عنصرين من عناصر T يكون عنصراً في T.

ثانياً: هل المجموعة $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b\}$ مجموعات مفتوحة؟

الحل: $\{a,c\},\{c\}$ ليس مجموعات مفتوحة لأنهما لا ينتميان الىT،

لكن المجموعة $\{a,b\}$ مجموعة مفتوحة لأنها تنتمي الىT.

مثال٢:

بين اي من المجموعات التالية تشكل تبولوجي على المجموعة $X=\{1,2,3\}$.

$T_1=\{X, \emptyset ,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$T_2=\{X, \emptyset\}$

$T_3=P(X)=\{X\ \emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

$T_4=\{\emptyset ,\{1\} , \{1,3\}\}$

$T_5=\{X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$T_6=\{X, \emptyset,\{1\},\{2\},\{1,3\}\}$

الحل :

١. واضح ان T_1, T_2, T_3 تشكل تبولوجي على X وذلك لتحقيق شروط التعريف الثلاثة.

ويسمى $T_2=\{X, \emptyset\}$ بالتبولوجي الغير متقطع *Indiscrete Topology*،

و$T_3=P(X)$ بالتبولوجي المتقطع *discrete Topology* .

ومن ثم فإن كل من (X, T_1) , (X, T_2) , (X, T_3) تشكل فضاء تبولوجي.

٢. T_4 لا تشكل تبولوجي على X وذلك لان $X \notin T_4$

أي أن T_4 لا تحقق الشرط الاول من التعريف

٣. أيضا نلاحظ أن T_5 لا تشكل تبولوجي على X لأن $\emptyset \notin T_4$

أي أن T_5 لا تحقق الشرط الاول من التعريف

٤. T_6 لا تشكل تبولوجي على X لأن $\{1\},\{2\} \in T_6$ لكن $\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\notin T_4$

أي ان T_6 لا تحقق الشروط الثاني من التعريف .

ملاحظة: نستنتج من المثال٢ انه نستطيع ان نجد اكثر من تبولوجي على المجموعة الواحدة.

مثال: جد جميع التبولوجيات الممكنة على المجموعة $X=\{a,b\}$.

الحل: اولا نجد $P(X)=\{X, \emptyset,\{a\},\{b\}\}$

وعلية

$T_1=\{X, \emptyset\}$ *Indiscrete Topology*

$T_2=\{X, \emptyset,\{a\},\{b\}\}$ *discrete Topology*

$T_3=\{X, \emptyset,\{a\}\}$

$T_4=\{X, \emptyset,\{b\}\}$

تمرين: جد ستة تبولوجيات على المجموعة $X=\{1,2,3\}$.

مبرهنة: لتكن X مجموعة غير خالية ، فان تقاطع أي عدد من التبولوجيات على المجموعة X يكون أيضاً تبولوجي على X .

البرهان: لتكن $T_1,T_2,T_3,\ldots$ أي عدد من التبولوجيات على المجموعة X

لاثبات $\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ تشكل تبولوجي على المجموعة X يجب تحقيق شروط التعريف الثلاثة:

١. بما ان كل من $T_1,T_2,T_3,\ldots$ تبولوجي ، علية $X, \emptyset \in T_i \ \forall i$

اذن $X, \emptyset \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$. تحقق الشرط الاول

٢. لتكن $s\in S$, $As \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$

علية $A_s\in T_i \ \forall i$

اذن $\cup A_s \in T_i \ \forall \ i$ (لأنه كل من T_i هو فظاء تبولوجي)

مما يودي الى $\cup A_s \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$. تحقق الشرط الثاني

٣. ليكن $A_1, A_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$

علية $A_1, A_2 \in T_i \ \forall \ i$

اذن $A_1 \cap A_2 \in T_i \ \forall \ i$ (لأنه كل من T_i هو فظاء تبولوجي)

مما يودي الى $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$. تحقق الشرط الثالث

وعلية $\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ يمثل فظاء تبولوجي على المجموعة X .

ملاحظة: اتحاد التبولوجيات المعرفة على المجموعة X ليس بالضرورة ان يكون تبولوجي على X .

مثال: لتكن $X=\{a,b,c\}$ وكل من $T_1=\{X, \emptyset,\{a\}\}$ ، $T_2=\{X, \emptyset,\{b\}\}$ تبولوجي على المجموعة X فان

$T_1 \cup T_2=\{X, \emptyset,\{a\},\{b\}\}$ لا تمثل تبولوجي على X وذلك لعدم تحقق الشرط الثاني من التعريف حيث $\{a\},\{b\} \in T_1 \cup T_2$ لكن $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin T_1 \cup T_2$.

تعلمنا في هذه المحاضرة كيفية اثبات التبولوجي المعرف على مجموعة معرفة بذكر عناصرها ، اما اذا كانت المجموعة معرفة بشكل صفتها المميزة فكيف يمكن تحقيق شروط الفضاء التبولوجي هذا ما سنتطرق اليه في المحاضرة القادمة.