المصفوفات Matrices

تعريف Definition
المصفوفة A من الصنف mxn (او النمط mxn) هي ترتيبة مستطيلة تحتوي على mn من الاعداد الحقيقية (او العضوية) مرتبة على شكل صفوف افقية عددها m واعمدة رأسية عددها n اي ان :-

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a\ 12 & ..... & a1n \\ a\ 21 & a\ 22 & ..... & a\ \ 2\ n \\ a\ m1 & am2 & ..... & amn \end{pmatrix} \qquad .....(\mathrm{I})$$

حيث ان الصنف رقم i للمصفوفة A هو

$$[\ a11\ \ \ a12\ ...\ ain\ ]\ (\ 1 \leq\ i \leq\ m)$$

والعمود رقم ن للمصفوفة A هو

$$\begin{matrix} a\ ,\ j \\ a\ 2\ j \\ a\ I\ j \end{matrix} \Bigg)$$

ملاحظة :- ١- اذا كان m=n فيقال بان A مصفوفة مربعة رتبتها n وتشكل الاعداد a 11,a 22, ...ann القطر الرئيسي الى A

٢- ستسير الى العدد a1j الذي يقع في الصف رقم i والعمود رقم j من المصفوفة A بالعنصر رقم (i,j) للمصفوفة A .

٣- غالبا ما نكتب المصفوفة في (I) بالصفة A =(aij) حيث
$\leq j \leq\ \ n$ و $n\ \ \leq j \leq\ \ M$

مثـــــــال :-
تعريف : Definition
يقال للمصفوفة المربعة [A = [aij التي تكون فيها قيمة كل عنصر مدخل لا يقع على القطر الرئيسي مساويا للصفر اي اذا aij = ٠ لكل i ≠ j بانها مصفوفة قطرية Diagonal matrix

مثال :-

لتكن

$$A = \begin{pmatrix} -3 & ٠ & ٠ \\ ٠ & -2 & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$$

فان كل من B,A مصفوفة قطرية

تعريف يقال للمصفوفة المربعة $A = [\,a_{ij}\,]$ التي تكون فيها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي متساوية اي ان $a_{ij} = C$ لكل $i = j$ وان $a_{ij} = ٠$ لكل $i \neq j$ يقال بنها مصفوفة عددية Numercal Matrix

مثال :- لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 3 & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} -1 & ٠ & ٠ \\ ٠ & -1 & ٠ \\ ٠ & ٠ & -1 \end{pmatrix} \text{ و } C = \begin{pmatrix} a & ٠ & ٠ \\ ٠ & a & ٠ \\ ٠ & ٠ & a \end{pmatrix}$$

حيث $a \in R$

فان لكل من A و B و C مصفوفتان عددية

تعريف :- يقال للمصفوفة $A = [\,a_{ij}\,]$ من الصنف mxn التي تكون جميع عناصرها (مداخلها) مساوية للصفر بانها مصفوفة صفرية (Zero Matrix) ويرمز لها ٠ .

<u>العمليات على المصفوفات</u> :- operation of matrices

١- <u>جمع المصفوفات</u> :- (summation of matrices)

تعريف : اذا كان كل من $A = [\,a_{ij}\,]$ و $B = [\,b_{ij}\,]$ مصفوفة من الصنف mxn فان حاصل جمع A وB هو مصفوفة $C = [\,c_{ij}\,]$ المعرفة بالصيغة

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i \leq j \leq n) \text{ و } (i \leq i \leq m)$$

اي اننا حصلنا على C بواسطة جمع العناصر المتناظرة في B

مثال : لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ فأن

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مبرهنة : (خواص الجمع المصفوفي) Properties of S.M.

١- $A+B=B+A$ (ابدالية Commutative low)

٢- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (تجميعية Associative l0w)

٣- لكل مصفوفة A من الصنف mxn فأن $A+0=A$

حيث ٠ هي المصفوفة الصفرية من الصنف mxn

٤- لكل مصفوفة من الصنف mxn توجد مصفوفة وحيدة D من الصنف mxn حيث ان

$A+D=0$ .... ـ

سنكتب D بشكل A لهذا فان ـ ستصبح $A+(-A)=0$

يقال :- A- بانها سالب A

البرهان :-

$$A + B = \begin{pmatrix} a11 & a12 \;.... & ain \\ a21 & a\,22 \;.... & a2n \\ am1 & A\,m2 \;.... & amn \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b11 & b\,12 \;.... & bin \\ b21 & b\,2n \;.... & b2n \\ bm1 & bm2 \;... & bmn \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a11+b11 & a12+b12 \;..... & ain+bin \\ a21+b21 & a22+b22 \;..... & a\,2n+b2n \\ am1+bm1 & am2+bm2 \;..... & amn+bmn \end{pmatrix}$$ (حسب تعريف جمع المصفوفات)

$$B+A= \begin{pmatrix} b11+a11 & b12+a12 \;.....bin+ain \\ b21+a21 & b22+a2 \;.....b2n+a2n \\ bm_1+am_1 & bm2+am2....bmn+amn \end{pmatrix}$$

{ لان aij و bij
اعداد حقيقية
لكل i و j حيث
$1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ }

٢- البرهان   H.W. (بنفس الاسلوب)

٣- البرهان لتكن U= uij فأن

$$A+U=A$$

اذا وفقط اذا كان

(لكل m   i   ١ و n   j   ١)   uij = ٠

وعليه فان U هي تلك المصفوفة التي تكون جميع مداخلها مساويا الصفر وعليه فان

$$A+0=A$$

٤- البرهان :- H.W.

مثال :- لتكن

$$C = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -2 & ٤ \end{bmatrix} ، B= \begin{bmatrix} ٢ & 3 \\ -1 & ٠ \end{bmatrix} ، A = \begin{bmatrix} ١ & -0 \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

فأن

1- $A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 2+(-1) & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$B+A = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 \\ -1+2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A+B=B+A$$

2- $A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 \\ -1+(-2) & 0+(-4) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 2+(-1) & 4+0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A+(B+C) = (A+B)+C$$

3- $A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

اكتب المعادلة هنا.

4- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

$A+(-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A+(-A) = 0$$

الضرب العددي للمصفوفات: (Scalar multiplication of matrice)

تعريف:- اذا كانت [aij] مصفوفة من الصنف mxn وكان r عددا حقيقيا فان المضاعف العددي للمصفوفة A في r (r A)هو المصفوفة [b ij] = B من الصنف mxn حيث ان

$$b_{ij} = r a_{ij} \quad (1 \leq i \leq m , \; 1 \leq j \leq n)$$

اي اننا حصلنا على B بواسطة ضرب كل عنصر من عناصر A في r

مثال : اذا كان r= - 3 وكانت

$$A = \left. \begin{matrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{matrix} \right)$$

فأن

$$Ra = \begin{bmatrix} -12 & 6 & -9 \\ -6 & 15 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

منقول المصفوفة : (The transpose of matrix)

تعريف : اذا كانت [aij] = A مصفوفة من الصنف mxn فان المصفوفة $A^T = [\, a_{ij}{}^T \,]$ من الصنف nxm حيث .اكتب المعادلة هنا($a_{ij}^T = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ تدعى منقول المصفوفة A

مثال :- لتكن

$$A= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

فأن

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : يمكن الحصول على منقول المصفوفة A بواسطة مبادلة الصفوف .

رمز التجميع (Sammation Notation)

تعريف :- نعني بالرمز $\sum_{i=1}^{n} a$ حيث $\sum_{i=1}^{n} ai = a_1 + a_2 + \cdots + an$ بانه رمز التجميع ويقال للحرف i بانه دليل التجمع وان i هو متغير شكلي يمكن الاستغاضة عنه باي حرف اخر اي انه عبارة عن حاصل جمع n من العناصر.

مثال: ليكن $a = 1$ و $a2 = 4$ و $a3 = 10$ فان

$$\sum_{i=1}^{3} ai = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 4 + 10 = 15$$

خواص رمز لتجميع properties of S.N.

1- $$\sum_{i=1}^{n} (ri + si)\, ai = \sum_{i=1}^{n} riai + \sum_{i=1}^{n} siai$$

2- $$\sum_{i=1}^{n} C\,(riai) = C \sum_{i=1}^{n} riai$$

ملاحظة : من الممكن ايضا تكوين رمز التجميع المزدوج وعليه فاننا نقصد بالمقدار

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} aij$$

وهو اننا اولا نجمع بالنسبة الى i ومن ثم نجمع النتائج بالنسبة الى j

مثال: ليكن $a_{11} = 2$ و $a_{12} = 4$ و $a_{12} = -1$ و $a_{22} = 1$ فجد

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{1=1}^{2} aij$$

الحـــل :

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} aij = \sum_{j=1}^{2} (a_1j + a_2j) = a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}$$

$$= 2 + (-1) + 4 + 1 = 6$$

$$\sum_{j=1}^{2} (aij + aij) = a_{11} + a_{12} + a_{22}$$

$$2 + (-1) + 4 + 1 = 6$$

يلاحظ:-

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Aij = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} aij$$ (H.W. اثبت ذلك)

مثـــــال:- في المثال اعلاه ان

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} Aij = 6$$

وان

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} aij = \sum_{i=1}^{2} (ai_1 + ai_2)$$

$$= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$$

$$= 2 + 4 + (-1) + 1 = 6$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} aij = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} aij$$

ضرب المصفوفات (Maltiplication of matrices)

تعريف:-

اذا كانت $A = [aij]$ مصفوفة من الصنف mxp و $B = [bij]$ مصفوفة من الصنف pxn فان جداء المصفوفة A والمصفوفة B هو المصفوفة $C = [cij]$ من الصنف mxn والمعرفة بالصيغة :

$$cij = ai_1 b_1j + ai_2 b_2j + \cdots + aip\ bpj \cdots *$$

حيث ان $(1 \le i \le m , 1 \le j \le n)$

اي ان

$$Cij = \sum_{k=1}^{p} aik\ bkj \qquad (1 \le i \le m , 1 \le j \le n)$$

ملاحظة :-

١- يتبين من المعادلة (*) بان العنصر (i , j)في مصفوفة الجداء حُسب بواسطة جمع الجداءات التي نحصل عليها بضرب كل عنصر في الصنف i من المصفوفة A بالعنصر المناضر في العمود j من المصفوفة B .

٢- يكون جداء المصفوفتين B,A معرفا فقطفي حالة كون عدد صفوف المصفوفة B مساويا الى اعمدة المصفوفة A .

مثال :- لتكن

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2X3} \quad B=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3X2} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1- \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2X3}$$

جد ١- AB ٢- BA ٣- AC ان امكن

الحل:- ١- بعدد صفوف B يساوي عدد اعمدة A فان AB يمكن ان يحسب وكما يلي :

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1X(-2) + \quad 2X4 + \quad (-1)X2 & 1X5 + \quad 2X(-3) + \quad (-1)X1 \\ 3X(-2) + \quad 1X4 + \quad 4X2 & 3X5 + \quad 1X(-3) + \quad 4X1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}_{2X2}$$

اي ان كل عنصر في C يمكن ان يحسب كما يلي (P=3)

$$C_{11}=\sum_{K=1}^{3} a_{1k} \ b_{k1} = a_{11} \ b_{11} + a_{12} \ b_{21} + a_{13} \ b_{31}$$

$$= 1 \ x \ (-2) + 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 4$$

وهكذا بالنسبة لـ C_{12} و C_{21} و C_{22} (H.W.)

٢- نلاحظ ان عدد صفوف المصفوفة B هو 3 وعدد اعمدة A 3 ايضا وعليه فان BA يمكن ان يحسب بسهولة (H.W.) .

٣- نلاحظ ان عدد صفوف المصفوفة C هو ٢ بينما عدد اعمدة المصفوفة A هو ٣ فلا يمكن ان نجد AC

برهان خواص ضرب المصفوفات :- اذا كانت A و B و C مصفوفات ذات اصناف متناسقة

فان $A(BC) = (AB)C$

Proof : let A = [$aij]_{mxp}$; B = [$bij]_{pxq}$; C = [$aij]_{qxn}$

And suppose that

A = (BC) = D = [$dij\ ]_{mxn}$; (ABC) = E = [$eij\ ]_{mx1}$

; BC = F = [$fij\ ]_{pxn}$; AB = U = $[uij\ ]_{mxq}$

We want to proof that eij = dij $\forall\ 1 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq n$

Now eij = $\sum_{k=1}^{q} Uik\ \ Ckj$

= $\sum_{k=1}^{q}$ ($\sum_{e=1}^{q} qie\ bek$) Ckj = $\sum_{k=1}^{q}\sum_{e=1}^{p} aie\ bek\ CKJ$

dij = $\sum_{5=1}^{p}\ ais\ \ fsj$ = $\sum_{s=1}^{p} ais$ ($\sum_{r=1}^{qsr}\ \ bsr\ \ crj$)

= $\sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q}\ ais\ \ bsr\ \ crj$ (من خواص $\sum$)

= $\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{p}\ ais\ \ bsr\ \ crj$ (من خواص $\sum$)

بتبديل الرموز s = φ و r = k نستنتج ان eij = dij $\Leftarrow$ D = E

برهان خواص الضرب العددي :-

١- H.W.

٢- (r+s) A = Ra + sA

حسب تعريف الضرب العددي للمصفوفات

Proof : (r + s) A = (r + s) x aij 1 i m + $1 \leq j \leq n$

= raij + saij (من خواص الاعداد الحقيقية)

(لانه aij و r,s اعداد حقيقية)

حسب تعريف الضرب = r A + s A

٣- r (A + B) = r A + r B

Proof let A = [aij] $_{mxn}$ + B = [bij]$_{mxn}$ then

حسب تعريف جمع المصفوفات r (A+B) = r (aij + bij) $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$

حسب خواص الاعداد الحقيقية = raij + rbij

حسب تعريف الضرب العددي للمصفوفات = r A + r B

ملاحظــــــة: اذا كانت A مصفوفة من الصنف mxp و B مصفوفة من الصنف pxn فان AB مصفوفة من الصنف mxn ماذا نقول عن BA ؟ هناك ثلاث احتمالات

ان BA يمكن ان تكون غير معروفة وهذه الحالة تحدث عندما تكون $m \neq n$

في حالة كون m = n فان BA ستكون معرفة وهي من الصنف pxp بينما AB تكون من الصنف m x n وعليه اذا كانت $m \neq p$ فان AB و B A ستكون من احجام مختلفة .

اذا كانت B A و ش A B من نفس الحجم فانه ربما تكون المصفوفتان مختلفتان .

مثـــــال : اذا كانت A من الصنف 2x3 و B من الصنف 3x4 فان A B مصفوفة من الصنف 2x4

بينما تكون B A غير معرفة (لماذا) ؟

ملاحظة :- ليست من الضروري انه A B = B A ، وعليه انه عملية الضرب ليست ابدالية في المصفوفات.

مثـــال :- لتكن

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ، \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فان $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} ، \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فان $AB \neq BA$

H.W. اعط مثال لمصفوفتين يكون فيه $AB = BA$ ؟

خواص منقول المصفوفة :-

لتكن كل من A و B مصفوفة ذات اصناف مناسبة وليكن r عددا حقيقيا فان

1- $(A^T)^T = A$
2- $(A+B)^T = A^T + B^T$
3- $(AB)^T = B^T A^T$
4- $(rA)^T = rA^T$

البرهان :- ١ و ٢ و ٤ H.W.

برهان ٣- لتكن $A = [aij]$ مصفوفة من الصنف mxp و $B = [bij]$ مصفوفة من الصنف pxn

ان العنصر رقم (i,j) في المصفوفة $(AB)^T$ هو cij^T اي ان

$$cij^T = cji = aj1 \quad b1j + aj2 \quad b21 + \cdots + ajp \quad bpj$$

$$= aij^T \; bi1^T + a2j^T \; bi2^T + \cdots + apj^T \; bip^T$$

$$= bi1^T \; a1j^T + bi2^T \; a2j^T + \cdots + bip^T \; apj^T$$

وهذا هو عنصر رقم (i , j) في المصفوفة $B^T \; A^T$

مثال:- لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad و \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (A^T)^T = A$

(2) ،(4) H.W (اعط المثال)

(3) $(AB)^T = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (H.W التفاصيل)

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)^T = B^T A^T$$

(خواص الضرب المصفوفي)

١- اذا كانت C,B,A مصفوفات اصنافها مناسبة فان

$$A\ (BC) = (AB)C$$

٢- اذا كانت C,B,A مصفوفات اصنافها مناسبة فان

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

٣- اذا كانت C,B,A مصفوفات اصنافها مناسبة فان

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

البرهان :- H.W.

H.W. اعط امثلة توضح الخواص ٢ و ٣ اعلاه

مثال :- (خاصية ١) لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

فان

$$A\,(B\,C) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x2 + 1x3 & 2x1 + 1x0 \\ 3x2 + (-1)x(3) & 3x1 + (-1)x0 \\ 0x2 + 2x3 & 0x1 + 2x0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x7 + 2x3 + 3x6 & 5x2 + 2x3 + 3x0 \\ 2x7 + (-3)x3 + 4x6 & 2x2 + (-3)x3 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 59 & 16 \\ 29 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5x2 + 2x3 + 3x0 & 5x1 + 2x(-1) + 3x2 \\ 2x2 + (-3)x3 + 4x0 & 2x1 + (-1) + 4x2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 9 & 2 & 1 \\ -5 & 13 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x2 + 9x3 & 16x1 + 9x0 & 59 & 16 \\ 5x2 + 13x3 & (-5)x1 + 13x0 & 29 & -5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A (BC) = (AB) C

وهكذا لبقية الخواص .

النظم الخطية : - Linear system

لنتعرف اولا على المعالة الخطية :

تعريف :- تدعى معادلة من الصنف y=ax حيث يكتب المتغير y بدلالة المتغير x والثابت a بمعادلة خطية .

* تدعى المعادلة الخطية بهذا الاسم لانه بيان المعادلة (مخطط المعادلة) عبارة عن خط مستقيم.

كذلك فان المعادلة b = $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ تدعى معادلة خطية الذي تظهر المتغير b بدلالة n مت المتغيرات ($x_1, x_2 , \cdots x_n$) وفي كثير من التطبيقات تعطى قيمة b ويطلب منا ايجاد قيمة $x_1, x_2 , \cdots , x_n$

تعريف (حل المعادلة الخطية)

تسمى كل مجموعة مرتبة من n من الاعداد $s_1 s_2 , \cdots , s_n$ التي تحقق المعادلة

b = $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ عندما نعوض بدلا عن $x_1 = s_1$ و $x_2 = s_2$

$x_n = s_n$ بحل المعادلة الخطية .

مثال :- لتكن

$s_1 = 2\ ,\ \ s_2 = 3\ \ ,\ \ s_2 = 4$ وليكن $6x1- 3x2 + 4x3 = -13 \cdots$ *

فان s_3, s_2, s_1 هو حل للمعادلة الخطية * اي ان $6(2)-3(3)+ 4(-4) = -13$

وعليه بصورة عامة يمكن تعريف النظام الخطي على النحو الاتي :-

تعريف :-

النظم الخطي هو عبارة عن مجموعة حاوية على m من المعادلات الخطية لكل منها n من المجاهيل وعبر عن النظام الطي بالصورة الاتية :-

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 \ + a_{m2} x_2 \ + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{array}\right\}$$

وعليه فان المعادلة رقم i هي

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots a_{in}\, x_n = b_i$$

وتدعى $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ aij في (1) بالثوابت

ملاحظة : - في النظم الخطي دائما تعطى قيمة $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ويطلب في السؤال ايجاد قيم $x_1, x_2, \cdots, x_n$ التي تحقق النظام (١).

تعريف :- (حل النظام الخطي)

يقال لمجموعة مرتبة من n من الاعداد $s_1 , s_2, \cdots ,s_n$ التي تحقق كل معادلة في النظام الخطي (١) عندما نعوض بدلا عن $x_1 = s_1, x_2, = s_2, \cdots, x_n = s_n$ بانها حل للنظام الخطي (١) .

يمكن حل النظم الخطية بطرق عديدة منها (طريقة الحذف وتسمى طريقة كاوس للحذف)

Causs elemantion M. وتتلخص طريقة كاوس بتكرار الخطوات الاتية : -

١-مبادلة معادلتين .
٢-ضرب معادلة بثابت لا يساوي صفرا .
٣-اضافة مضاعفات احدى المعادلات الى معادلة اخرى.

مثـــال :- جد حل النظام الخطي الاتي :-

$$X-3_Y = -3 \quad \cdots \quad L_1$$

$$2_X + Y = 8 \quad \cdots \quad L_2$$

الحـــل :- لغرض ايجاد حل النظام يجب ان نحذف المتغير X من المعادلة الثانية (L_2) وذلك باضافة سالب ضعف المعادلة الاولى الى المعادلة الثانية فنحصل على

$$X - 3_Y = -3 \cdots \quad L_1$$

$$7_Y \quad = 14 \quad \cdots L_2$$

∴ من L_2 نستنتج

$$7_Y \quad =14 \Rightarrow \quad Y = 2$$

بتعويض قيمة Y في L_1 نحصل على قيمة X وكما يلي

$$X - 3 \text{ x } 2 = -3$$

$$\Rightarrow \quad X = -3+ 6 = 3$$

∴ حل النظام الخطي هو $x_2 = 3$, Y= 2 وهو الحل الوحيد للنظام

ملاحظة :- يكون النظام المدرج الذي نحصل عليه بطريقة الحذف مكافئ الى النظام الاصلي .

تعريف : - ان النظامين يكونان متكافئين اذا لهما نفس الحل.

وعليه فان حل النظام المدرج الذي نحصل عليه بطريقة الحذف له نفس حل النظام الاصلي.

مثال :- جدل النظام الخطي

$$x - 3_y = -7 \cdots L_1$$

$$2_x - 6_y = 7 \cdots L_2$$

<u>الحـــل</u> : -

$$x - 3_y = -7 \cdots L_1$$

$$-2L_1 + L_2 = L_2 \qquad 0_y = 21 \cdots L_2$$

وهذا تناقض في المعادلة L_2 لانه $0 \neq 21$ وعليه فان النظام الخطي اعلاه ليس له حل.

مثال :- جد حل النظام الخطي الاتي

$$x + 2_y - 3z = -4 \cdots L_1$$

$$2_x\ y - 3z = 4 \cdots L_2$$

<u>الحل</u>:- لكي نحذف x من L_2 نطرح ضعف المعادلة الاولى من المعادلة الثانية وكما يلي:

$$x + 2_y - 3_z = -4 \cdots L_1$$

$$2_{L1} + L_2 = L_2 \qquad -3_y + 3_z = 12 \cdots L_2$$

من المعادلة L_2 نستنتج

$$Y = z - y \cdots (*)$$

بتعويض (*) في L_1 بعد التبسيط نحصل على

$$x = 2_y + 3_z - 4$$

$$= -2(z - 4) + 3_z - 4$$

$$x = z + 4$$

تمارين :-

H.W. حل الانظمة الطية بطريقة الحذف

-١

$$2x - 3y + 4z = -12$$

$$x - 2y + z = -5$$

$$3x + y + 2z = 1$$

-٢

$$x + y = 5$$

$$3x + 3y = 10$$

-٣

$$2x + 4y + 6z = -12$$

$$2x - 3y - 4z = 15$$

-٤

$$x + y - 2z = 5$$

$$2x + 3y + 4z = 2$$

-٥

$$x + 4y - z = 12$$

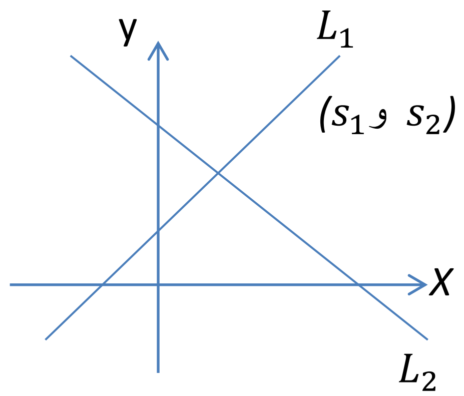
$$3x + 8y - 2z = 4$$

-٦

$$3x + 4y - z = 8$$

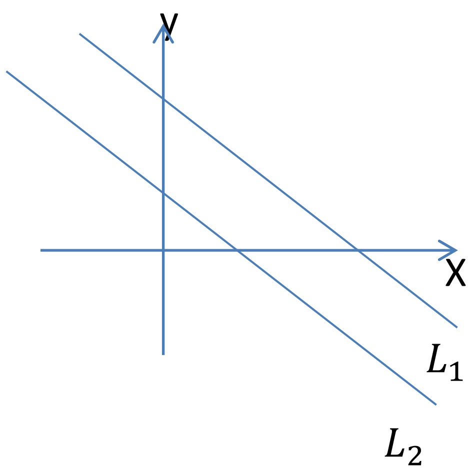
$$6x + 8y - 2z = 3$$

١-للنظام حل وحيد يعني ان المستقيمين L_1 و L_2 يتقاطعان في نقطة واحدة فقط وكما مبين بالرسم



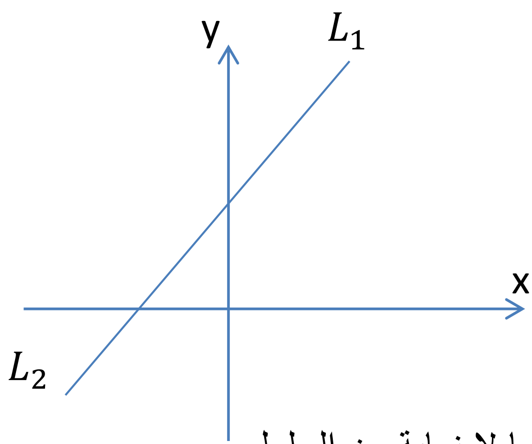
للنظام حل وحيد

٢- النظام لا حل له ، يعني ان المستقيمان L_1 و L_2 لا يتقاطعان (متوازيان) وكما مبين بالشكل



النظام لا حل له

٣- للنظام ما لا نهاية من الحلول : يعني بان المستقيمين L_1 و L_2 متطلبقان وكما مبين بالشكل



للنظام ما لا نهاية من الحلول

$$x + 2y + 3z = 6 \cdots L_1$$

$$-7y - 4z = 2 \cdots L_2 \qquad \cdots \boxed{* *}$$

$$+7L_3 \quad + L_2 = L_3 \qquad 10z = 30 \cdots L_3$$

وعليه فان المعادلة L_3 في النظام (**) نحصل على

$$\boxed{z = 3}$$

وبتعويض قيمة Z في L_2 في النظام (**) نحصل على

$$-7y - 4(3) = 2$$

$$\Rightarrow -7y = 14 \Rightarrow y = -2$$

وبتعويض قيمة Z و y في L_1 في النظام (**) نحصل على

$$X + 2(-2) - 3(3) = 6$$

$$\Rightarrow x = 6 + 4 - 9 \Rightarrow \boxed{X=1}$$

$\therefore$ X=1, y = -2 , z = 3 هو حل وحيد للنظام (**) وهو حل للنظام الاصلي (*)

تمثل حل الانظمة الخطية هندسيا

تأمل النظام الخطي الاتي المكون من معادلتين بمجهولين x و y

$$a_1 x + a_2 Y = c_1$$

$$b_1 x + b_2 y = c_2 \qquad \cdots *$$

ان بيان (مخطط) كل من هاتين المعادلتين هو خط مستقيم سندلل عليه بالرمز L_1 و L_2 على التوالي فاذا كان $x = s_1$ و $y = s_2$ حلا للنظام الخطي * فان النقطة (s_1 , s_2) تقع على كل من المستقيمين L_1 , L_2 وبالعكس اذا كانت النقطة (s_1, s_2) واقعة على كل من المستقيمين L_1 , L_2 فان $x = s_1$ و $y = s_2$ حلا للنظام اعلاه * يقودنا هذا هندسيا الى الاحتمالات الاتية

وعليه فان حل النظام هو $x = z + 4$ ، $y = z - 4$ و z اي عدد حقيقيا وهذا يعني ان للنظام اعلاه ما لا نهاية من الحلول وعليه فاذا كان $z = 1$

حل النظام هو $z = -1$ فان $z = -1$, $y = -5$, $x = 3$ هو حل اخر للنظام وهكذا

ملاحظة : - من الامثلة الثلاثية اعلاه نستنتج ان

١- اذا كان عدد المعادلات اكبر أو يساوي عدد المجاهيل فان النظام الخطي اما يمتلك حل وحيد او لا يمتلك حل

٢- اذا كان عدد امعادلات اقل من عدد المجاهيل فان النظام الخطي يمتلك ما لا نهاية من الحلول أو لا حل له .

مثال : - جد حل النظام الخطي الاتي ان :

$$x + 2_y + 3z = 6 \cdots L_1$$

$$2x - 3y + 2z = 14 \cdots L_2 \qquad \cdots *$$

$$3x + y - z = -2 \quad \cdots \quad L_3$$

الحل :-

$L_1 = L_1$ $\qquad x + 2y + 3z = 6 \cdots L_1$

لحذف x في L_2 $\qquad -2L_1 + L_2 = L_2 \qquad -7y - 4z = 2 \cdots L_2$

لحذف x في L_3 $\qquad -3L_1 + L_3 = L_3 \qquad -5Y - 10z = -20 \cdots L_3$

للسهولة نقسم L_3 على (-5) نحصل على

$$X + 2y + 3z = 6 \cdots L_1$$

$$-7y - 4z = 2 \cdots L_2$$

$$Y + 2z = 4 \cdots L_3$$