المحاضرة الثالثة:

ملاحظات :

1- يمكن تحوير أماكن الثوابت الاختيارية دون التأثير على عددها .

مثال:

- التعبير $T(x) = e^{B-x^2}$ يحتوي على ثابت واحد B ويمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = e^{B}.e^{-x^2} = Ae^{-x^2}$$

حيث $A = e^{B}$

- التعبير $T(x) = \ln x + A$ يمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = \ln x + A = \ln(Bx)$$

حيث $A = \ln B$

- التعبير $T(x) = A\cos x + B\sin x$ وهو يتضمن ثابتين B, A ويمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = A\cos x + B\sin x = C\cos(x + \varepsilon)$$

حيث $$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varepsilon = -\tan^{-1}(\frac{B}{A})$$

المحاضرة الثالثة:

2- نذكر هنا بالثابت الجمعي والثابت الضربي . فالأول يضاف إلى الدالـــة والثـــاني يضرب في الدالة .

مثال:

- في التعبير $T(x) = x^2 . e^{-x} + A$, A هو ثابت جمعـــــي ويقـــال أن الدالة $T(x)$ تساوي x^2e^{-x} في حدود ثابت جمعي .

- في التعبير $T(x) = Ax^2 e^{-x}$, A ثابت اختياري يقال أن الدالة $T(x)$ تساوي x^2e^{-x} في حدود ثابت ضربي .

حل المعادلة التفاضلية

المحاضرة الثالثة:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$F\left[x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right] = o \qquad \textbf{(15)}$$

والتي من المرتبة n ؛ حيث F تابع حقيقي .

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً معرف من أجل جميع قيم x في المجال الحقيقي I .
وكذلك كل مشتقاته حتى المرتبة n معرفة من اجل كل قيمة للمتغير x حيث $x \in I$
نقول أن التابع $f(x)$ حل للمعادلة (15) إذا تحقق الشرطان التاليان :

أ- إذا كان التابع $F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(n)\right]$
معرفا من أجل كل قيم $x \in I$

ب- إذا كان : $F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(n)\right] \equiv o$
من أجل كل قيم $x \in I$

وهذا يعني أنه بتعويض $f(x)$ ومشتقاته مكان y ومشتقاته في المعادلة التفاضليـــة (15) تتحول المعادلة (15) إلى مطابقة من أجل جميع قيم $x \in I$.

مثال:

- لنعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية :

$$xy' - 2y = o$$

حلها هو $y = Ax^2$ من أجل $x \in I$

حيث A ثابت اختياري .

المحاضرة الثالثة:

وللتحقق من ذلك نحسب $y' = 2Ax$

ثم نعوض في الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية فنجد:

$$xy' - 2y = x(2Ax) - 2(Ax^2) \equiv o$$

- لنعتبر المعادلة التالية :

$$y'' + k^2 y = o$$ حيث ثابت $k =$

حل هذه المعادلة هو $y = A\cos kx + B\sin kx$

حيث B, A ثابتان اختياريان لأن :

$$y' = Ak\sin kx + Bk\cos k$$

$$y'' = -k^2\left[A\cos kx + B\sin x\right]$$

وبالتعويـــض فـــي المعادلـــة التفاضليـــة تتحـــول إلـــى مطابقـــة .

<u>ملاحظـــات</u> :

1- توضح الأمثلة السابقة أن المعادلة التفاضلية تقبل ما لانهاية مـــن الحلـــول وهـــذه اللانهاية من الحلول يمكن تمثيلها عموماً على هيئة دالة أو صيغة واحدة تحتـــوي على ثوابت اختيارية ؛ وتعتبر هذه الدالـــة حـــلاً عامـــاً (General solution) للمعادلة التفاضلية يمكن منه انتقـــاء أي حـــل خـــاص (Particular solution)

المحاضرة الثالثة:

بإعطاء الثوابت الاختيارية أي قيم نشاء . على انه قد يوجد أحد أو بعض الحلول للمعادلة التفاضلية لا يمكن استنتاجها من الحل العام بإعطاء قيم مناسبة للثوابت الاختيارية ومثل هذا الحل أن وجد يسمى بالحل المنفرد (Singular solution) للمعادلة التفاضلية ونادراً ما تقابلنا مثل هذه الحلول المتفاردة في المسائل الهندسية.
وإذا تضمن حل عام للمعادلة التفاضلية كل الحلول لهذه المعادلة فهو حل كامل (Complete Solution) .

2- يمكن تشكيل المعادلة التفاضلية لمعادلة غير محلوله بالنسبة للثابت الاختياري ؛
إذا كان لدينا مجموعة التوابع :

$$F(x,y,A)=o$$

ومشتقها هو :

$$F'_x(x,y,A)+F'_y(x,y,A)\equiv o$$

فالمعادلة التفاضلية للتوابع (16) هي المعادلة الناتجة من حذف الثابت الاختياري A من المعادلتين (16) ؛ (17) ولتكن :

$$G(x,y,y')=o \qquad \textbf{(18)}$$

لنعتبر الدالة $y=Ax^2$

مشتقتها هي $y'=2Ax$

بحذف الثابت الاختياري A بين هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها هذه الدالة وهي :

$$xy'-2y=o$$