المحاضرة الثانية:

خامساً – المعادلة التفاضلية الخطية (Linear) :

هي المعادلة الخطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعاً .

مثال:

المعادلة : $x^2y'' + xy' + x^2y = e^x \sin x$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية حيث أن كلاً من المتغير التابع y ومشتقاته y' , y'' خطية أي كل منها مرفوع للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها ولا يهم أن تكون معاملاتها ثوابت أو دوال في x .

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها معادلة تفاضلية لا خطية .

مثال:

المعادلات التفاضلية التالية معادلات تفاضلية لا خطية :

$$yy'' + y' = x \qquad \textbf{(10)}$$

$$y' + x\sqrt{y} = \sin x \qquad \textbf{(11)}$$

$$y''' + x^2y'' + \sin y = o \qquad \textbf{(12)}$$

حيث تظهر لا خطية المعادلة (10) في حاصل الضرب بين y , y'' .

بينما في المعادلة (11) تظهر في الحد y مرفوع لأس يختلف عن الواحد في المعادلة (12) تظهر في الحد Siny وهي دالة لا خطية في y .

المحاضرة الثانية:

ملاحظـــة :

لا تؤثر اللاخطية على مرتبة المعادلة التفاضلية ،

فالمعادلة (10) لا خطية من المرتبة الثانية .

والمعادلة (11) لا خطية من المرتبة الأولى .

والمعادلة (12) لا خطية من المرتبة الثالثة .

سادسا : الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي

$$P_n(x)y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+....+P_1(x)y'+P_o(x)y=Q(x) \qquad \textbf{(13)}$$

أو

$$\sum_{i=o} P_i(x)y^{(i)}=Q(x) \qquad \textbf{(14)}$$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجـــد حــوا صـــل ضرب مشتركة بين أي منها . والدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطيــة أم غير خطية وكذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$.

سابعاً : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (Homogeneous) :

إذا انعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية (13) لجميع قيم x قيل أنها معادلـــــة تفاضلية خطية متجانسة ، وإلا كانت المعادلة التفاضلية غير متجانسة أو كاملة .

المحاضرة الثانية:

مثال :

- المعادلة $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة الثانية .

- المعادلة $xy' + (\sin x)y = x^2(\sin x + 2)$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى .

ملاحظـــة :

إذا كـــانت المعامـــلات $P_i(x)$ فـــي المعادلـــة (13) ثابتـــــةً لا تتعلـــــق بالمتغيـــر x قيـــل عـــن المعادلـــة التفاضليـــة الخطيـــة أنهـــا ذات معاملات ثابتـــة (of Constant Coefficients) وإلا فإنـــه يقـــال عنهـــا أنها ذات معاملات متغيرة (of Variable Coefficients) .

أمثلـــة :

- المعادلة $y''' + 6y'' - 3y' + 2y = e^x$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة

- المعادلة $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$

فهي معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة .

المحاضرة الثانية:

ثامناً : الثوابت الاختيارية : Arbitrary Constants

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلات التفاضلية ؛ ويكون الثابت اختيارياً (Arbitrary constant) إذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التابع أو المتغير المستقل وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبير ما جوهرية (Essential) إذا لم يمكن دمج أحدها في ثابت أخر .

مثال:

- لنعتبر التعبير $T(x) = Ae^{-x^2+B}$

قد يبدو لأول وهله أن هناك ثابتين A , B ولكن بإمعان النظر نرى أنه يمكن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد :

$$T(x) = Ae^{-x^2+B} = Ae^{B}.e^{-x^2} = ce^{-x^2}$$

حيث : $C = Ae^{B}$

- لنعتبر التعبير $T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3 \sin^3 x$

الذي يتضمن ثلاثة ثوابت ولكن الحقيقة يمكن اختزالهم إلى ثابتين جوهريين فقط حيث :

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

المحاضرة الثانية:

إذن
$$T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3\left[\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right]$$

$$= (A_1 + \frac{3}{4}A_2)\sin x + (A_2 - \frac{1}{4}A_3)\sin 3x$$

$$= A_4 \sin x + A_5 \sin 3x$$

حيث
$$A_4 = A_1 + \frac{3}{4}A_2 \ , \ A_5 = A_2 - \frac{1}{4}A_3$$