المحاضرة الخامسة:

نظريـــة أحاديـــة الحـــل Uniqueness Theorem

إذا كانت كل من $f(x,y)$ ؛ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ دالة وحيدة القيمة ومستمرة فـــي المنطقة T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x,y)\in T \;,\; \exists M \geq o \quad : \quad |f(x,y)| < M$$

$$\forall (x,y)\in T \;,\; \exists K \geq o \quad : \quad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < K$$

وكانت $h = \min(a, \frac{b}{M})$ فأنه يوجد حل وحيد $y = \phi(x)$ يحقق المعادلة التفاضليـــة (2) في الفقرة $|x - x_o| < h$ ويحقق الشرط الابتدائي التالي :

$$y(x_o) = \phi(x_o) = y_o$$

ملاحظة :

الجدير بالذكر أن " وجود الحل " لا يعني إمكانية الحصول عليه في صورة مغلقة "Closed Form" أو مضبوطة في جميع الأحوال بل قد يمكن الحصول علـــى الحل بإحدى الطرق التقريبية أو العددية .

معادلات تفاضليـة مـن المرتبـة الأولـى قابلـة لفصـل المتغيريـن :
Separable First order Equations:

في حالات كثيرة يمكن وضع المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x,y) \qquad (5)$$

المحاضرة الخامسة:

علـــى الشكـــل

$$g(y)\frac{dy}{dx} + h(x) = o \qquad (6)$$

أو ما يكافئ ذلك

$$g(y)\,dy + h(x)\,dx = o \qquad (7)$$

ويقال عن هذه المعادلة أنها معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرين أو ا معادلة قابلة للفصل (Separable Equations) وذلك لانه أمكن فصل المتغير المتغير y تماماً . وبمعنى أخر يتم فصل المتغيرين إذا كان معامل تفاضل x من x فقط ومعامل تفاضل y دالة من y فقط .

وبمكاملة الطرفين نحصل على :

$$\int g(y)dy + \int h(x)\,dx = A \qquad (8)$$

حيث A ثابت اختياري واستخدمنا ثابتاً واحداً لأن المعادلة من المرتبة الأولى وبإجراء التكاملين ينتج :

$$G(y) + H(x) = A \qquad (9)$$

ونكون قد حصلنا على حل عام للمعادلة التفاضلية .

مثال:

1- $$g_1(y)f_2(x)dy + g_2(y)f_1(x).dx = o \qquad (10)$$

2- $$\frac{dy}{dx} + f(x)\,h(y) = o \qquad (11)$$

المحاضرة الخامسة:

حيث يمكن فصل المتغيرات في المعادلة (10) بالضرب في عامل التكميل $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ (Integrating Factor)

لنحصل على :

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy + \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = o$$

ويمكن الآن أن نكمل :

$$\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy + \int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = A$$

بينما يمكن فصل المتغيرات في المعادلة (11) بالضرب في العامل التكميلي $\frac{1}{h(x)}$

لنحصل على :

$$\frac{1}{h(y)}\,dy + f(x)dx = o$$

ومنها

$$\int\frac{1}{h(y)}\,dy + \int f(x)dx = A$$

المحاضرة الخامسة:

حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} - xy = o$

الحل :

المعادلة معطاة على شكل المعادلة (11) السابقة بالقسمة على y يمكن فصل المتغيرين

$$\frac{dy}{y} - xdx = o$$

بالمكاملة

$$\ln y - \frac{x^2}{2} = \ln A$$

ووضعنا الثابت الاختياري على الصورة $\ln A$ لكونها اكثر ملائمة

$$Ln \ \frac{y}{A} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = Ae^{x^2/2}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة وهو عبارة عن طائفة منحنيات Gauss الآسية .

المحاضرة الخامسة: