المحاضرة الرابعة:

المعـــادلات التفاضليـــة مـــن المرتبـــة الأولـــى

Differential Equations of the First Order

المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

Geometrical Interpretation:

سوف ندرس في هذه المحاضرة طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى سواء كانت من الدرجة الاولى او اعلى ومثل هذه المعادلات تكتب بالشكل التالي:

$$F(x, y, y') = o \qquad (1)$$

وقبل البدء في عرض مختلف الطرق لحل المعادلة التفاضلية (1) نقـــدم أولاً المعنـــى الهندسي (الجيومتري) لهذه المعادلة التفاضلية .

لنعتبر المعادلات التي تحل في أي التي يمكن كتابتها على الصورة:

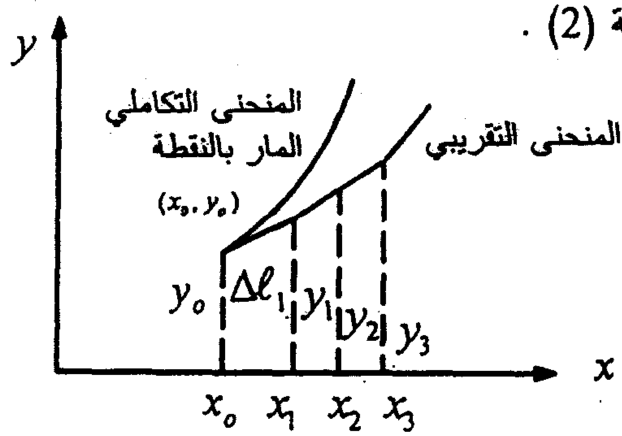
$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

حيث الدالة $f(x, y)$ وحيدة القيمة عند جميع النقط (x, y) في منطقة مـــا T وتمثـــل القيمة $f(x_o, y_o)$ قيمة المشتقة y' عند النقطة (x_o, y_o) أي ميل المنحنى التكـــاملي للمعادلة التفاضلية (2) المار بالنقطة (x_o, y_o) وللحصول على المنحنى التكاملي لـــهذه المعادلة المار بالنقطة (x_o, y_o) نتحرك مسافة $\Delta\ell_1$ في اتجاه $f(x_o, y_o)$ لنصل إلـــى النقطة (x_1, y_1) نحسب $f(x_1, y_1)$ أي الميل عند النقطة (x_1, y_1) ثم نتحرك مســـافة $\Delta\ell_2$ في هذا الاتجاه الجديد $f(x_1, y_1)$ لنصل إلى النقطة (x_2, y_2) ؛ نحسب الميـــل $f(x_2, y_2)$ عند هذه النقطة ثم نتحرك في هذا الاتجاه مسافة صغيرة $\Delta\ell_3$ لتصل إلى

المحاضرة الرابعة:

النقطة (x_3, y_3) وهكذا لنحصل في النهاية حينما تؤول المسافات الصغيرة إلى الصفر على المنحنى التكاملي المار بالنقطة (x_o, y_o) شكل -1-

ويتميز هذا المنحنى بأن أي نقطه عليه وميل مماسه عند هذه النقطة يحققان المعادلة التفاضلية (2) . وهذا المنحنى التكاملي هو أحد الحلول البيانية الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية وكل مرة نبدأ من نقطة جديدة نحصل على منحنى تكاملي جديد كأحد الحلول للمعادلة (2) .

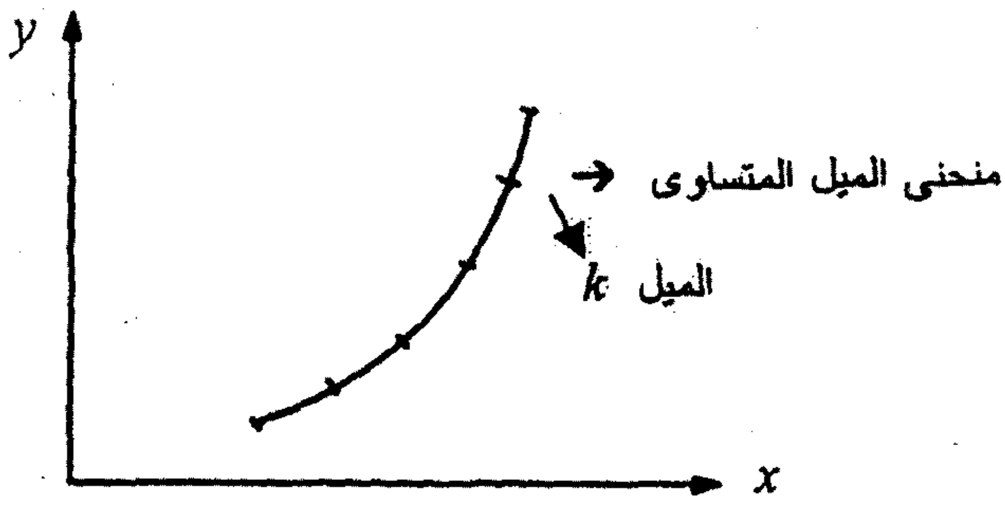


شكل -1- المعنى الهندسي للمعادلة (2)

يمكن رسم المنحنى $f(x, y) = k$ حيث k ثابت في المستوى xy ويسمى هذا المنحنى بمنحنى الميل المتساوي (Curve of Constant Slope) للمعادلة (2) ثم نرسم من عند نقط هذا المنحنى أجزاء قصيرة من مستقيمات متوازية ميلها k تسمى بالعناصر المستقيمة (Lineal Elements) وكل عنصر من هذه العناصر المستقيمة يمس المنحنى التكاملي للمعادلة (2) عند نقطة تقاطعه مع منحنى الميل المتساوي.

المحاضرة الرابعة:

نكرر هذه العملية بإنشاء منحنيات ميل متساوية مختلفة تغطي المنطقة T وذلك بإعطاء الثابت k قيماً مختلفة ولكل من هذه المنحنيات نرسم العناصر المستقيمة الخاصة به ، وتكون مجموعة العناصر المستقيمة مجال أو حقل الاتجاه (Direction Field) للمعادلة التفاضلية (2) ويمكن بسهولة بمساعدة هذه العناصر المستقيمة رسم منحنيات تقريبية للمنحنيات التكاملية للمعادلة (2) شكل -2-



شكل -2- منحنيات الميل المتساوية

ملاحظة :

قبل التطرق إلى مختلف الطرق لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى نذكر انه قد يكون للمعادلة التفاضلية (1) حل وحيد (Unique Solution) وقد يوجد لها حلول عديدة (Many Solutions) وقد لا يوجد لها أي حل على الإطلاق

المحاضرة الرابعة:

مثال:

مسألة القيم الحدية التالية :-

$$xy' = 2y \quad و \quad y(x_o) = y_o$$

يوجد لها حل وحيد هو $y = x^2$ إذا كانت $y(1) = 1$

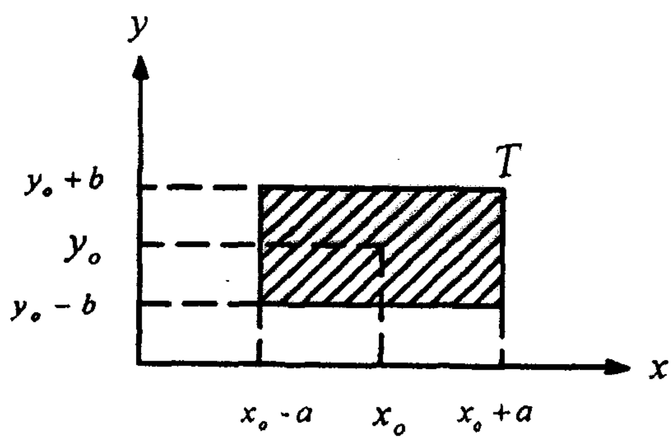
وتوجد لها حلول لانهائية هي $y = Ax^2$ حيث A ثابت اختياري إذا كانت $y(o) = o$

ولا يوجد لها حل على الإطلاق إذا كانت $y(o) = 1$

نظرية وجود الحل Existence Theorem :

إذا كانت (x_o, y_o) نقطة في المستوى oxy وكانت T منطقـــة مســتطيلة مغرفة كمايلي:

$$T = \{(x, y) \in \Re^2 : |x - x_o| \leq a, |y - y_o| \leq b, a, b \in \Re^+\}$$



شكل -5- المنطقة T

المحاضرة الرابعة:

وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ في المعادلة (2) وحيدة القيمة ومستمرة عند جميع نقـــط T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x,y) \in T \quad \text{و} \quad \exists M \geq o \quad : \quad |f(x,y)| < M$$

وكانت $h = \min(a, \frac{b}{M})$

فان المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ تقبل حلاً وحيداً علـــى الأقـــل $y = \phi(x)$ في المجال $|x - x_o| < h$ ويأخذ هذا الحل القيمة y_0 عند $x = x_o$.