جامعة ديالى
كلية التربية الاساسية
قسم الرياضيات

الاحتمالات

المرحلة الاولى

مدرس المادة

م.م. اسراء عامر فليح

1/

الاحتمالات probabilities

مقدمة

ان كلمة احتمال هي من الكلمات الشائعة الاستعمال في محادثاتنا اليومية فكثيراً ما نسمع العبارات التالية:

* من المحتمل ان تمطر السماء غداً"
* من المحتمل ان تفوز الفريق الوطني العراقي على الفريق الوطني الفلاني.
* يحتمل ان تكون انت على حق.

ان لفظة يحتمل هذه ليست مؤكدة لظهور الحادث اي بعبارة اخرى ان هنالك شك حول ظهور الحادث.

ان علوم الرياضيات والاحصاء تحاول ان تضع مقاييس دقيقة تحت ظروف معينة لاستخدامها بدلاً من هذه التعابير لاحتمال وقوع الحادث المراد دراسته.

لقد تطورت نظرية الاحتمال في القرن السابع عشر كنتيجة لانتشار القمار في اوربا ففي سنة 1654 كما (انتون دميير) احد شرفاء فرنسا والذي كانت لديه رغبة في الرياضيات الى العالم الرياضي الفرنسي (باسكال) حل مشكلة معينة من مشاكل لعب القمار. وبعده ظهر علماء آخرون من امثال (برنولي 1713) و(ديموفر 1718) و(بيز 1764) واسهموا في حساب الاحتمالات في مسائل اللعب بالزار وقطع النقود وورق اللعب ... الخ ووضعوا بذلك اسس نظرية الاحتمالات.

تعاريف ومصطلحات

الاحتمالات: هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية التي تهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والاشياء.

التجربة The Experiment: هو القيام بفعل معين او اجراء عمل ذي صفة وصفاً دقيقاً ثم ملاحظة ما ينتج عن هذا الفعل. ومن التجارب التي سنتناولها في امثلتنا هي:

١- تجارب في زار الطاولة: زهرة النرد

يتألف الزار من 6 وجوه كل وجه يأخذ رقماً من واحد الى ستة التي هي عدد النقاط على ذلك الوجه

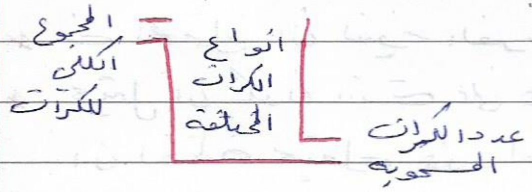
2- تجارب قطعة النقود

لقطعة النقود وجهان : الصورة Head (H)

الكتابة Tail (T)

3- تجارب صندوق الكرات

صندوق الكرات يحتوي على كرات مختلفة وعادة نمثل له بالرسم التالي :



فضاء العينة Sample space : هو مجموع النواتج المحتملة للتجربة ما ويرمز له بالرمز (S).

مثال: عند القاء قطعة نقود فان فضاء العينة هو $S = \{H, T\}$

اي ان $S = 2$

اما عند القاء قطعتي نقود فان فضاء العينة هو

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

اي ان $S = 4$

اما في حالة القاء زار الطاولة فان فضاء العينة هو

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

اي ان $S = 6$

وفي حالة القاء زاري طاولة فان فضاء العينة هو

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

اي ان $S = 36$

الحادث Event :- هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة
ونرمز له بالرمز E .. اي ان $E \subseteq S$

الحادث البسيط Simple Event :- هو مجموعة جزئية من فضاء العينة
تحتوي ناتجاً "واحداً" فقط

مثال :- عند القاء قطعتين من النقود ① ما حادث ظهور الصورة على كل
وجه من القطعتين؟ ② ما حادث ظهور الكتابة على كل وجه من القطعتين؟
الحل :-

① $E_1 = \{HH\}$ ② $E_2 = \{TT\}$

الحادث المركب Compound Event :- هو مجموعة جزئية من فضاء
العينة يحتوي على اكثر من ناتج واحد

مثال :- عند القاء قطعتين من النقود، ما حادث ظهور صورة واحدة
على الاقل على الوجه الظاهري
الحل :-

$E = \{HT, TH\}$

الحادث المستحيل Impossible Event :- هو مجموعة جزئية من
فضاء العينة لا يحتوي على اي عنصر

مثال : عند القاء حجر نرد ما حادث ظهور العدد 7 .
الحل :
$E = \phi$

الحادث المؤكد هو فضاء العينة

مثال :- عند القاء حجر نرد اذا كان E_1 حادث ظهور العدد زوجي ،
E_2 هو حادث ظهور عدد فردي فان $E_1 \cup E_2$ = فضاء العينة .

الحوادث المنفصلة او المتنافية Mutually Events :
يقال للحادثين E_1 ، E_2 انهما منفصلان او متنافيان اذا كان
تقاطعهما مجموعة خالية اي ان $E_1 \cap E_2 = \phi$

مثال : عند رمي قطعة نقود فمن المستحيل الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت .

الحوادث المستقلة Independent Event : هي الحوادث التي اذا وقع احدها لا يمنع او يؤثر على وقوع الاحداث الاخرى .

مثال : عند رمي قطعتي نقود فالحصول على صورة في القطعة الاولى لا يؤثر على نتيجة القطعة الثانية .

الحوادث غير المستقلة Nonindependent Events : هي الحوادث التي اذا وقع احداها يؤثر في وقوع الاحداث الاخرى .

مثال : صندوق به كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الاولى فان نتيجة السحبة الثانية ستتأثر بنتيجة السحبة الاولى لذا فالحادثان غير مستقلان .

الحالات الممكنة possible Cases

هي جميع الحالات المختلفة التي يمكن ان تظهر في تجربة معينة .

مثال : عند رمي قطعة نقود فعدد الحالات الممكنة هنا حالتين صورة وكتابة . اما عند رمي حجر نرد فان الحالات الممكنة = 6 حالات وعند رمي حجري نرد فان عدد الحالات الممكنة = 6 x 6 = 36 حالة . ومن ذلك نرى بان الحالات الممكنة هي نفسها فضاء العينة .

الحالات الموافقة Favourable Cases

هي الحالات التي تحقق ظهور الحادث المراد دراسته وتسمى ايضاً بحالات النجاح .

مثال : عند رمي حجر النرد فاذا كان الحادث هو الحصول على عدد زوجي فالحالات التي تحقق ظهور هذا الحادث هي الحصول على 2 أو 4 أو 6 فهذه الحالات تسمى الحالات الموافقة .

3/11

الحالات المتماثلة Equally likely Cases

هي الحالات المتكافئة والمتساوية في امكانية حدوثها.

مثال: عند رمي قطعة نقود فان الظروف المهيأة للحصول على اي وجه صورة أو كتابة تكون متكافئة مثال بأن الحالتين تنتج عن تجربة رمي قطعة النقود هاتان مثالتان.

الحوادث الشاملة Exhaustive Events

تسمى الحوادث A ، B ، C . حوادث شاملة في تجربة ما اذا كان لابد من حدوث احداها عند اجراء التجربة.

مثال: عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما اذا كان مدخنا او غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لانه لا بد للفرد ان يكون له صفة واحدة من هذه الصفات، كذلك عند رمي حجر نرد فان الحصول على العدد 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 تعتبر حوادث شاملة لانه لا بد من حدوث احداها.

أمثلة

مثال 1 :- اذا القيت ثلاث قطع نقود على احد اوجه كل منها صورة وعلى الآخر كتابة عبر عما يأتي :-

1. فضاء العينة.
2. حادث وجهان صورة ووجه كتابة.
3. حادث وجه واحد على الاقل كتابة
4. حادث اربعة اوجه كتابة
5. حادث وجهان على الاكثر صورة.

الحل :-

1. $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
2. $E_1 = \{HHT, HTH, THH\}$
3. $E_2 = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

④ $E_3 = \phi$

⑤ $E_4 = \{HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$

ملاحظة

عبارة على الأقل تأخذ ذلك العدد تصاعدياً أي أكبر عدد.

عبارة على الأكثر تأخذ ذلك العدد تنازلياً أي الصفر.

مثال ②: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ملاحظة العدد على الوجه الظاهر العلوي.

① صف فضاء العينة،

② صف الأحداث التالية

ⓐ E_1 ظهور عدد أولي ⓑ E_2 ظهور عدد فردي

ⓒ E_3 ظهور عدد زوجي

③ أي حادثتين بقيت منفصلتين وأي الأحداث السابقة شاملة؟

الحل

① $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② ⓐ $E_1 = \{2, 3, 5\}$

ⓑ $E_2 = \{1, 3, 5\}$

ⓒ $E_3 = \{2, 4, 6\}$

③ $E_2 \cap E_3 = \phi$

$\therefore$ E_2, E_3 حادثتين منفصلتين

E_1, E_2, E_3 الحوادث شاملة.

مثال ③ : اذا القينا حجرين من احجار النرد

① اكتب فضاء العينة الذي يعبر عن نواتج التجربة .

② العدد على وجه احد الاحجار ضعف الذي على وجه الحجر الآخر .

③ العدد على وجه احد الاحجار يساوي العدد على وجه الحجر الآخر .

④ مجموع العددين على وجه الحجرين = 8 .

⑤ العدد على وجه الحجر الاول اصغر من العدد على وجه الحجر الآخر

⑥ العدد على وجه الحجر الاول اكبر من العدد على وجه الحجر الآخر واجب

الحل :

①

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

② $E_1 = \{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(6,3),(3,6)\}$

③ $E_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

④ $E_3 = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

⑤ $E_4 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4)$
$(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)$
$(5,6)\}$

مبدأ العد او القاعدة الاساسية للعد

اذا امكن اجراء عملية ما بطرق عددها (m) وبعد اتمامها باحد هذه الطرق امكن اجراء عملية اخرى بطرق عددها (n) فانه يمكن اجراء العمليتين معاً بطرق $(m.n)$

او يمكن توضيحها بالشكل التالي :-

لتكن تجربة ما مركبة من تجربتين متتاليتين وكان فضاء العينة للتجربة الاولى $= S_1$ وفضاء العينة للتجربة الثانية $= S_2$ وبذلك فان فضاء العينة للتجربة كلها =

$$N(S) = N(S_1) \times N(S_2)$$

ويمكن تعميم هذا المبدأ او القاعدة على تجربة مركبة من ثلاث تجارب او اكثر.

مثال ① :- ما عدد عناصر فضاء العينة للتجارب التالية :

① رمي قطعة نقود معدنية مرتين.

② رمي ثلاث احجار نرد

③ عند سحب كرتين على التوالي من كيس فيه عشر كرات مختلفة مرة بالارجاع ومرة اخرى بدون ارجاع.

الحل :

① $S_1 = 2 \times 2 = 2^2 = 4$

② $S_2 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$

③ $S_3 = 10 \times 10 = 10^2 = 100$ في حالة الارجاع

$S_3 = 10 \times 9 = 90$ في حالة بدون ارجاع

مثال 2 :- عند رمي قطعة نقود معدنية ثم حجر النرد ثم قطعة معدنية اخرى .

1 صف فضاء العينة

2 ما عدد عناصر هذا الفضاء ؟

الحل :

1 $S_1 = \{H, T\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_3 = \{H, T\}$

2 $N(S_1) = 2$

$N(S_2) = 6$

$N(S_3) = 2$

$N(S) = N(S_1) \times N(S_2) \times N(S_3)$

$N(S) = 2 \times 6 \times 2$

$N(S) = 24$

مثال 3 :- كم طريقة علينا تكوين عدد مكون من رقمين من بين الارقام (5, 4, 3) بحيث :

1 يسمح بتكرار الرقم .

2 لا يسمح بتكرار الرقم .

الحل :

1 عدد الطرق $= 3 \times 3 = 9$

وهي (54, 45, 43, 34, 55, 44, 33, 53, 35)

2 عدد الطرق $= 2 \times 3 = 6$

وهي (43, 34, 54, 45, 53, 35)

مثال (4) :- كم عدد مكون من (4) أرقام يمكن تكوينه باستخدام الارقام (1، 2، 3، 4، 5) عندما :

1. يسمح بتكرار الرقم ،
2. لا يسمح بتكرار الرقم .

الحل :

1. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$
2. $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

مضروب n   n factorial

مضروب n يرمز له بالرمز n! يعرف بانه

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

مثال : جد مضروب 5 اي 5!

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ملاحظات

1. $0! = 1$
2. $1! = 1$
3. $n! = n[(n-1)!]$
4. $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

التباديل   permutation

يقصد بالتباديل بانها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء باخذها كلها او بعضها ويرمز له بالرمز npr او p^n_r اي تباديل r من n وقانونه هو :

$$npr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ① : اذا كان لدينا اربعة حروف A ، B ، C ، D واختير منها حرفان ، فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار حرفين الحرفين ؟

الحل :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$4P2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = \underline{\underline{12}}$$

مثال ② : اذا كان لدينا خمسة طلاب يراد اختيار ثلاث طلاب منهم ليكونوا من الاوائل . ما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ضمن الاوائل الطلبة ؟

الحل

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = \underline{\underline{60}}$$

مثال ③ : كم عدد طرق اجلاس (7) أشخاص حول مائدة دائرية عندما :

① يمكن اجلاسهم في اي مكان .

② شخصان يجب ان يجلسوا متجاورين

③ شخصان يجب ان لا يجلسوا متجاورين .

الحل

① $(n-1)! = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \underline{\underline{720}}$

② $5! \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = \underline{\underline{240}}$

③ $720 - 240 = \underline{\underline{480}}$

مثال ④ : بكم طريقة يمكن اجلاس (8) اشخاص على كرسيين ؟

الحل

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$8P2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = \underline{\underline{56}}$$

مثال ⑤ : بكم طريقة يمكن ترتيب (9) كتب على رف
اذا كان :-
① اي ترتيب ممكن
② اربعة كتب معينة يجب ان تكون معاً .
③ ثلاث كتب معينة يجب ان تشغل النهاية

الحل :

① $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \underline{362880}$

② $5! \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 120 \times 24 = \underline{2880}$

③ $6! \times 3! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 720 \times 6$
$= \underline{4320}$

التوافيق Combinations

يقصد بالتوافيق بانها عدد طرق الاختيار (غير المرتب) التي يمكن تكوينها من عدة اشياء باخذها كلها او بعضها ويرمز له بالرمز C^n_r او $\binom{n}{r}$ وقانونه هو :

$$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ① :- ما عدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من (5) اشخاص من مجموع (9) اشخاص ؟

الحل :

$$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C^9_5 = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!}$$

$$= \frac{9!}{5! \times 4!}$$

$$= \frac{9 \times \cancel{8}^{2} \times 7 \times \cancel{6}^{2} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{4}_{1} \times \cancel{3}_{1} \times \cancel{2} \times 1} = \underline{126}$$

مثال (2): ما هو عدد العينات التي يمكن تكوينها من مجتمع مؤلف من (6) أشخاص بحيث يكون حجم العينة منها شخصين ؟

الحل:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{4!}} = \underline{\underline{15}}$$

مثال (3): ما هو عدد اللجان التي يمكن تأليفها من (4) أفراد بحيث أن كل لجنة تحتوي على

(1) 2 فرد

(2) 3 أفراد

الحل:

(1)
$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!} \times \cancel{2} \times 1} = \underline{\underline{6}}$$

(2)
$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!\times 1!} = \frac{4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 1} = \underline{\underline{4}}$$

مثال (4): جد التوافيق لكل مما يأتي:

(1)
$$C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = \underline{\underline{35}}$$

(2)
$$C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{6}} = \underline{\underline{35}}$$

نلاحظ أن $C_4^7 = C_3^7$

أي أن $C_r^n = C_{n-r}^n$

مثال ⑤ : اذا كان عدد الاسئلة في امتحان ما هو (8) أسئلة وكان المطلوب الاجابة عن خمسة اسئلة فقط بشرط ان تكون ثلاثة منها من الاسئلة الاربعة الاولى .

الحل :

$$C^4_3 \times C^4_2 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{3!\ 1!} \times \frac{4!}{2!\ 2!}$$

$$= \frac{4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 1} \times \frac{\cancel{4}^{2} \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!} \times \cancel{2}}$$

$$= 4 \times 6 = \underline{\underline{24}}$$

مثال ⑥ : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تتكون من ثلاث رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (6) سيدات ؟

الحل :

$$C^7_3 \times C^6_2 = \frac{7!}{3!(7-3)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

$$= \frac{7!}{3!\ 4!} \times \frac{6!}{2!\ 4!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{3 \times 2} \times 1 \times \cancel{4!}} \times \frac{\cancel{6}^{3} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{2}_{1} \times \cancel{4!}}$$

$$= 35 \times 15$$

$$= \underline{\underline{525}}$$