كلية التربية الاساسية

قسم الرياضيات

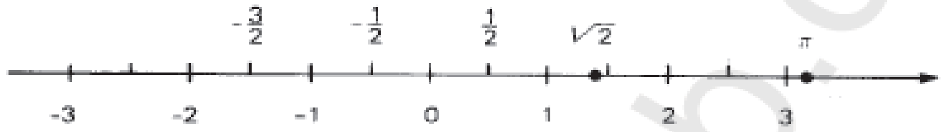
محاضرات التحليل العقدي

لطلبة المرحلة الرابعة

## (١ ,١) الأعداد المركّبة وجبرها

**Complex Numbers and their Algebra**

تسمى الأعداد التي تستخدم في الجبر البدائي في حساب التفاضل والتكامل أعداد*حقيقية تتكون من جميع الأعداد التي يمكن تمثيلها هندسيا بوساطة نقاط على خط مستقيم لانهائي في الطول (انظر الشكل رقم ١,١).




الشكل رقم (١ ,١) نموذج لنظام الأعداد الحقيقية.

الخط المستقيم مقسم إلى مسافات متساوية بحيث يقابل كل قسم عددا طبيعيا، مع ملاحظة أن الأعداد الموجبة تقع على يمين الصفر والأعداد السالبة على يساره. كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة تقع على هذا الخط وتحقق الأعداد الحقيقية خمس قواعد جبرية تسمى مسلمات الحقل وهي :

**١ – قانون التبديل**

$$ab = ba \text{ و } a + b = b + a$$

**٢ – قانون التجميع (الدمج)**

$$(a+b)c = ac + bc \text{ و } (a+b)+c = a+(b+c)$$

**٣ – قانون التوزيع**

$$(a+b)c = ac + bc \text{ و } a(b+c) = ab + ac$$

**٤ – عنصر الوحدة**

وحدة الجمع $0$ ، ووحدة الضرب $1$ ، $1 \neq 0$

بحيث إن : $a.1 = a = 1.a$ و $a + 0 = a = 0 + a$

**٥ – المعكوس**

كل عدد حقيقي $a$ له معكوس جمعي $(-a)$ ، وإذا كان $a \neq 0$ فله معكوس ضربي $a^{-1}$ يحقق :

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

و

$$a.a^{-1} = 1 = a^{-1}.a$$

وينقص الأعداد الحقيقية أصلا شيء واحد ؛ فهي لا تزودنا بجميع الحلول الممكنة لمعادلات كثيرة الحدود. مثال ذلك المعادلة $x^2 + 1 = 0$ لا يمكن أن تُحل باستخدام الأعداد الحقيقية لأن مربع أي عدد حقيقي عدد غير سالب.

وللتغلب على هذا النقص نعرّف مجموعة الأعداد المركبة $\mathbf{C}$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة :

$$z = (x, y)$$

من الأعداد الحقيقية $x$ و $y$ حيث تحقق هذه الأزواج عمليتي الجمع والضرب التاليتين :

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

$$(x, y).(a, b) = (xa - yb, xb - ya)$$

ويمكن تمثيل العدد المركب الذي على الشكل $(x, y)$ بنقطة في المستوى الديكارتي إحداثياها $x, y$ هما مركبتا العدد المركب $z = (x, y)$. على كل حال، يمكن لتحقيق أكثر من فائدة ، أن نقابل بين $z$ وبين المتجه (قطعة مستقيمة موجهة) الذي مبدؤه نقطة الأصل ونهايته النقطة $(x, y)$. وباستخدام هذا التمثيل لكل عدد مركب نرى أن مجموع عددين مركبين :

**مثال (١, ١, ١)**

أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $z = 2 + 3i$

**الحل**

لدينا $Re\, z = 2$ و $Im\, z = 3$

يسمح لنا استخدام الرمز $z = x + iy$ للأعداد المركبة أن نجمع المقادير المركبة ونضربها بالطريقة نفسها التي استخدمناها عند جمع كثيرات الحدود وضربها مع ملاحظة أن $i^2 = -1$ فعلى سبيل المثال:

$$(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i$$
$$(1 + 2i)(2 + 3i) = 2 + (4i + 3i) + 6i^2$$
$$= -4+7i$$

من السهل التحقق من أن عمليتي الجمع والضرب للأعداد المركبة تحققان خواص التبادل، التجميع والتوزيع.

العددان 0 و 1 هما عنصرا الوحدة لعمليتي الجمع والضرب للأعداد المركبة.

يمكن أن نطرح الأعداد المركّبة بملاحظة أن:

$$z - z' = z + (-z') = z + (-1)\, z'$$

مثال ذلك:

$$(7+2i) - (3-4i) = (7+2i) + (-3+4i)$$
$$= 4 + 6i$$

إذن $-z$ هو المعكوس الجمعي للعدد $z$.

للتحقق من أن الأعداد المركبة تكوّن حقلا (انظر إلى التمرين رقم ٣٣) يجب أن نثبت وجود معكوس ضربي لأي عدد: $a + ib \neq 0$.

إذا ضربنا $a + ib$ بمرافقة $a - ib$ نجد :

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 + (abi - abi) - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

ومنه يكون المعكوس الضربي للعدد $a + bi$ مساويا :

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

قسمة عددين مركبين ننجزها بضرب البسط بالمعكوس الضربي للمقام. فعلى سبيل المثال، إذا أردنا قسمة $x + iy$ على $a + bi \neq 0$

نكتب :

$$\frac{x + yi}{a + bi} = (x + yi)\left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)i$$

ويمكن إجراء عملية القسمة بطريقة بديلة بضرب البسط والمقاوم (المقسوم، والمقسوم عليه)، بالمرافق المركب للمقام :

$$\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{x + yi}{a + bi}\,\frac{a - bi}{a - bi} = \left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)i$$

**مثال (٢ ,١ ,١)**

اكتب الكسر $\frac{1 - 2i}{3 - 4i}$ على شكل عدد مركب؟

**الحل**

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام نجد :

$$\frac{1-2i}{3-4i}=\frac{(1-2i)}{(3-4i)}\frac{(3+4i)}{(3+4i)}=\frac{3-6i+4i-8i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$
$$=\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$$

لنرمز للمرافق المركب للعدد المركب z بالرمز $\bar{z}$

لاحظ أنه إذا كان $z = x + iy$

فإن :

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)$$
$$=2x=2\operatorname{Re} z$$

$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)$$
$$=2yi=2i\operatorname{Im} z$$

أيضا

$$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)$$
$$=x^2+y^2$$

من ذلك نحصل على المتساويتين :

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2}$$
$$\operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2}$$

تخبرنا نظرية فيثاغورث أن :

$z\bar{z}$ = مربع (طول z)

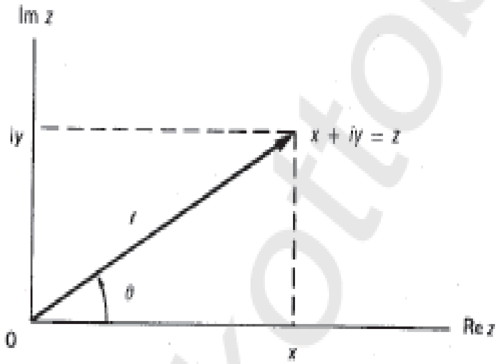
## (٢ ,١) التمثيل القطبي
### Polar Representation

وجدنا أن الأعداد المركبة يمكن أن تمثل بمتجهات في المستوى المركب. وفي هذا الجزء سوف نستخدم فكرة قطعة الخط المستقيم الموجهة لحساب خواص الطول، وزاوية ميل المتجه في المستوى المركب.

لندرس المتجه غير الصفري:

$$z = x + iy$$

كما هو موضح في الشكل رقم (١,٦).




**الشكل رقم (٦ ,١). التمثيل القطبي.**

نستطيع حساب طول المتجه $z$ باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نسمي هذا الطول بمقياس العدد المركب $z$، ويرمز له بالرمز:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لاحظ أن:

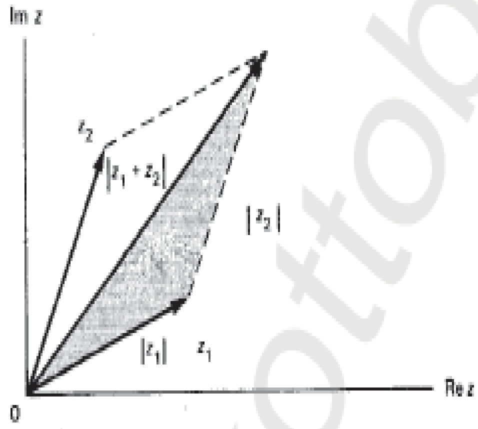
$$|\bar{z}| = |z| \text{ و } |z| \geq \operatorname{Im} z \text{ ، } |z| \geq \operatorname{Re} z$$

المتباينة (المتراجحة) المثلثية The triangle inequality

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

البرهان

تذكر أن طول أحد أضلاع مثلث أقل من مجموع طولي الضلعين الآخرين، وبالتالي فإن المتراجحة المثلثية تنتج مباشرة من المثلث المظلل في الشكل رقم (١,٧). وإن المتراجحة المثلثية ممكن أن تثبت جبريا أيضا (انظر التمرين رقم ٣٨). ■




الشكل رقم (١, ٧). المتباينة المثلثية $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

بالرجوع إلى الشكل رقم (١,٦)، نرى أن الزاوية التي يصنعها المتجه: $z = x + iy$ مع المحور الحقيقي تعطي بالصيغة:

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

سوف تكون هذه الصيغة، على كل حال، غير صالحة في الربع الثاني أو الثالث حيث إن القيم لدالة الظل العكسية (arctan) تقع في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. وأكثر من هذا، فإن زاوية الميل للمتجه تحدد بوجه عام بإضافة مضاعفات $2\pi$. وبما أن الزوايا:

$$\theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

مثال (٥, ٢, ١)

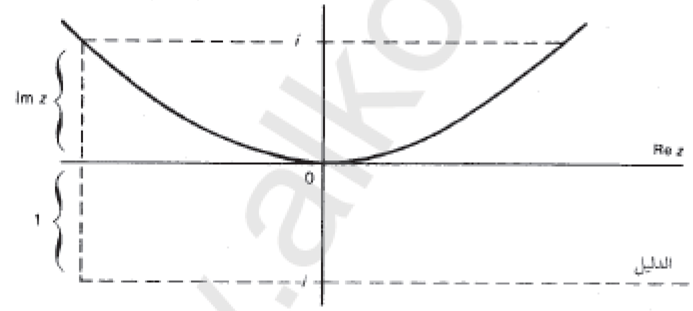
يعرّف القطع المكافئ على أنه مجموعة النقاط من المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F$ يساوي بعدها عن مستقيم ثابت ما. (تسمى النقطة F بؤرة القطع ويسمى المستقيم $L$ دليله). أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $i$ ودليله المستقيم $\operatorname{Im} z = -1$.

الحل

من التعريف نحصل على :

$$|z-i| = \operatorname{Im} z + 1,$$

حيث تقع أقرب نقطة على الدليل من $z$ عموديا أسفل $z$، انظر الشكل رقم (١,١١).




الشكل رقم (١١ ,١). القطع المكافئ $|z - i| = \operatorname{Im} z + 1$

وإذا أردنا الحصول على العلاقة المقابلة من الهندسة التحليلية، نربع الطرفين للمساواة السابقة فنحصل على :

$$|z|^2 + 1 + 2\operatorname{Re} zi = (\operatorname{Im} z + 1)^2$$