كلية التربية الاساسية

قسم الرياضيات

محاضرات نظرية الحلقات

لطلبة المرحلة الثالثة

د حميد كاظم داود

(1-1) مفهوم الحلقة :

لتكن R مجموعة ما غير خالية ، ولتكن (+) و(•) عمليتين جبريتين ثنـــائيتين معرفتين على R. نقول عن الثلاثية (•,+,R) إنها حلقة بالنسبة للعمليتين (+) و(•) إذا تحققت الشروط التالية :

1- (+,R) زمرة إبدالية (Abelian group) .

2- (•,R) شبه زمرة (نصف زمرة) (Samigroup) .

3- العملية (•) توزيعية (Distributive) على العملية (+) من اليمين واليسار .

أو بكلام آخر ترتبط العمليتان (+) و(•) فيما بينهما بعملية توزيع الضـــرب علـــى الجمع من الطرفين، وهذا يعني:

من أجل أي a,b,c من R ، فإن :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

إذا كانت العملية (•) بالإضافة إلى الشروط السابقة ، عملية إبدالية علـــى عناصـــر المجموعـــة R ، فإننــــا نقـــول إن الحلقـــة (•,+,R) هـــي **حلقـــة إبداليـــة Commutative ring** إذا وُجد في المجموعة R عنصر محايد بالنسبة لعمليـــة

$(R,+,\cdot)$ وسنرمز له بالرمز 1 اي ان : لكل $a\in R$ ، فإن $1\cdot a = a \cdot a = a$.

ونقول في هذه الحالة ، إن الحلقة $(R,+,\cdot)$ **حلقة واحدية أو حلقة ذات عنصر وحدة أو حلقة بمحايد (Ring with identity)** .

ملاحظة (1) :

نؤكد أن (+) و(.) تمثلان عمليتين ثنائيتين مجردتين ، وليس عمليتـــي الجمـــع والضرب العاديتين .

ونرمز للمعكوس الضربي أي بالنسبة لعملية الضرب (.) للعنصر a في R بالرمز $\bar{a}$ ويسمى معكوس (مقلوب) العنصر a . أما المعكوس الجمعي للعنصر a في R نرمز له بـــ a- ويسمى بالمعكوس (نظير) الجمعي للعنصر a في R .

سنرمز لصفر الحلقة $(R,+,\cdot)$ بـــ o .

نسمي العملية الجبرية الثنائية (-) المعرفة على R بالشكل :

$$a - b = a + (-b) \quad , \quad \forall\, a,b\in R$$ **عملية الطرح**

وبالتالي يتحقق ما يلي :

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a \quad , \forall\, a,b,c\in R$$

لأن من قانون التوزيع الضربي على الجمع نجد أن :

$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) &= a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c) \\ &= a \cdot b + (-a \cdot c) = a \cdot b - a \cdot c \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة ، نثبت أن :

$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

(2-1) أمثلة :

1- المجموعات العددية التالية : Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، Q (مجموعة

الأعداد النسبية الكسرية) ، R (مجموعة الأعداد الحقيقية) تشـكل حلقـة إبداليـة وبمحايد بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين .

أي أن $(Z,+,\cdot)$ و $(Q,+,\cdot)$ و $(R,+,\cdot)$ حلقات إبدالية بمحايد .

2- مجموعة الأعداد المركبة C بالنسبة لعمليتي $(+)$ و $(\cdot)$ المعرفتين بالشكل :

$$x = a + i\,b\,,\; y = c + i\,d \;:\; \forall\, a,b,c \in R$$

حيث أن $a,b,c,d \in R$ و $i = \sqrt{-1}$.

$$x + y = a + i\,b + c + i\,d = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$x \cdot y = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = (a \cdot c - b \cdot d) + i\,(a \cdot d + b \cdot c)$$

تشكل حلقة إبدالية بمحايد .

تسـمى حلقـة الأعـداد المركبـة $(C,+,\cdot)$ حلقـة جـاوص الصـحيحة (ring of Gaussian integers).

(4-1) حلقة الأعداد الصحيحة قياس n :

(ring of integres modultion)

نذكّر القارئ الكريم أولاً، **بمفهوم التطابق قياس** n (Congruent modulo n) .

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ، نقول إن العددين الصحيحين b,a متطابقان قياس n إذا ، وفقط إذا، كان $a - b$ يقبل القسمة على n وهذا يكافئ $a - b = k.n$ حيث k عدد صحيح ، ونكتب بذلك : $a \equiv b \pmod{n}$.

إن علاقة التطابق قياس n هي علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصــحيحة وأن فصول التكافؤ لهذه العلاقة هي : $[0],[1],\ldots,[n-1]$ حيث أن :

$$[x] = \{\, x + t.n \;\; ; t \in Z \,\}$$

نسمي Z_n مجموعة الأعداد الصحيحة قياس n ، حيث Z_n مجموعة فصول التطابق قياس n .

وإذا عرّفنا على المجموعة Z_n العمليتين الثنائيتين $\oplus$ و $\otimes$ بالشكل :

$$[x] \oplus [y] = [x + y]$$

$$[x] \otimes [y] = [x \cdot y] \quad ; \quad \forall\, [x],[y] \in Z_n$$

عندئذٍ $(Z_n,\oplus,\otimes)$ حلقة إبدالية بمحايد (ذات عنصر وحدة) .

نسمي عادةً هذه الحلقة بحلقة الأعداد الصحيحة قياس n .

البرهان :

لنبرهن أولاً أن العمليتين الثنائيتين $\oplus$ و $\otimes$ معرفتين جيداً (حسنة التعريف) ، من أجل ذلك ، ليكن $[x] = [x_1]$ و $[y] = [y_1]$ ، وبالتالي فإن :

$$x \equiv x_1 \bmod n \;\; , \;\; y \equiv y_1 \bmod n$$

أي أن $n \,/\, (x_1 - x)$ و $n \,/\, (y_1 - y)$ ، وهذا يؤدي إلى أن : $n \,/\, [(x_1+y_1) - (x+y)]$

(5-1) الحلقة التامة (المناطق التكاملية) Integral domains :

القاسم اليميني والقاسم اليساري للصفر في حلقة :

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، ولنرمز لصفرها بـــ o ، وليكن a عنصراً ما مـــن A ، نقول عن a إنه قاسم يميني للصفر في الحلقة $(R,+,\cdot)$ ، إذا وجد في R عنصراً ، وليكن $b \neq o$ بحيث يكون $b \cdot a = o$.

ونقول عن a إنه قاسم يساري للصفر في الحلقة $(R,+,\cdot)$ ، إذا وجد في R عنصراً وليكن $c \neq o$ بحيث يكون : $a \cdot c = o$.

ينتج من التعريف السابق ما يلي :

(1) إذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، وo صفرها ، وإذا كانت $R \neq \{o\}$ ، فإن o هو قاسم يميني ويساري للصفر في الحلقـــة $(R,+,\cdot)$ ، لأنـــه ، إذا كـــان $a \neq o$ عنصراً من R ، فإن :

$$a \cdot o = o \cdot a = o$$

(2) لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية ، وإذا كان a عنصراً منها ، وله معكوس فيها، فإن a لا يمكن أن يكون قاسماً يسارياً ولا يمينياً للصفر في هذه الحلقة .

البرهان :

لنرمز بـــ 1 لعنصر الوحدة في الحلقـــة $(R,+,\cdot)$ ولصـــفرها بـــالرمز o . إن العنصر a من R لا يمكن أن يكون قاسماً يسارياً للصفر فيها.، لأنـــه إذا كـــان a

قاسماً يسارياً للصفر فيها ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر وليكن $b \neq o$ من R وبحيث يكون $a \cdot b = o$ ، لكن :

$$a \cdot b = o \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot o \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = o \Rightarrow$$
$$1 \cdot b = o \Rightarrow b = o$$

وهذا مخالف لكون $b \neq o$.

وبالطريقة نفسها ، نثبت أن العنصر a من R لا يمكن أن يكون قاسماً يمينياً للصفر في الحلقة $(R,+,\cdot)$.

ملاحظة (2) :

عندما نقول إن الحلقة $(R,+,\cdot)$ لا تحوي قواسم للصفر (Zero divisor) نقصد بذلك إن لم يكن بالإمكان إيجاد عنصرين b,a من R بحيث يكون :

$$a \neq o \ , \ b \neq o \ , \ a \cdot b = o$$

حيث o هو صفر الحلقة $(R,+,\cdot)$.

مثال (1) :

لتكن $(M_2(R),+,\cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة الحقيقية من الدرجة الثانية . إن $\begin{pmatrix} o & o \\ c & d \end{pmatrix}$ ، حيث d,c من R ، قاسم للصفر مـــن اليمـــين وأن $\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}$ قاســم للصفر من اليسار ، في الحلقة $(M_2(R),+,\cdot)$.

الحل :

$$\begin{pmatrix} o & o \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}$$

نلاحظ ، أولاً أن :

$$\begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & o \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}$$

(6-1) مميز حلقة Charactaristic of ring :

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، إذا وجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث $n.a = 0$ لكل $a \in R$ ، فإن أصغر عدد صحيح موجب يحقق هذه الخاصية يســمى مميــز الحلقة . وإذا لم يوجد هذا العدد ، أي أن $n = 0$ هو العدد الصحيح الوحيــد الــذي يحقق $n.a = 0$ لكل $a \in R$ ، فإننا نقول إن الحلقة $(R,+,\cdot)$ مميزها الصفر .

نرمز عادةً لمميز الحلقة $(R,+,\cdot)$ بالرمز $\text{Char}(R)$.

مثال (8) :

مميز الحلقات $(Z,+,\cdot)$ و$(Q,+,\cdot)$ و$(R,+,\cdot)$ و$(C,+,\cdot)$ هو الصفر دوماً ، بينما مميز الحلقة $(Z_n,\oplus,\otimes)$ يساوي n . كما أن مميز الحلقة $(Z_4 \times Z_6 ,\oplus,\otimes)$ هو 12 أي أن : $\text{Char}(Z_4 \times Z_6) = 12$.

(7-1) الحقل Field :

بدايةً نعرّف الحقل المتخالف (Skew field) .

نقول إن الحلقة بمحايد $(R,+,\cdot)$ حلقة قاسمية (Division ring) أو حقل متخالف ، إذا كان كل عنصر غير صفري من R هو عنصر وحدة .

مثال (10) :

وجدنا سابقاً أن $(Z_P,\oplus,\otimes)$ حلقة بمحايد حيث P عدد أولـــي . ولنبـــرهن أن $(Z_P,\oplus,\otimes)$ حلقة قاسمية (حقل متخالف) .

الحل :

ليكن $[o] \neq [a] \in Z_P$ فإن $\gcd(a,p) = 1$ ، وهذا يعني أنـــه يوجـــد عـــددان صحيحان $s,t \in Z$ بحيث يكون : $a\cdot s + p\cdot t = 1$ وبالتالي فإن :

$$[a]\otimes[s] \oplus [p]\otimes[t] = [1]$$

أي أن $[a]\otimes[s] = [1]$ وهذا يؤدي إلى أن [s] هو معكـــوس [a] الضـــربي، إذن $(Z_P,\oplus,\otimes)$ حلقة قاسمية .

لنعرف الآن الحقل field :

تعريف : كل حلقة $(R,+,\cdot)$ تسمى حقلاً إذا حققت الشروط التالية :

1- يوجد في R عنصران على الأقل .

2- يوجد في R عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب $(\cdot)$.

3- لكل عنصر مختلف عن الصفر من R معكوس في R بالنسبة للعملية $(\cdot)$.

(1-2) الحلقة الجزئية subring :

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من R . إذا كانت S حلقة بالنسبة للعمليتين (+) و(.) على S ، فإننا نقول إن $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ ، ونرمز لذلك بالشكل : $S \le R$

إذا كانت $S \le R$ و $S \ne R$ ، فإننا نقول أن $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية فعلية (Proper subring) من الحلقة $(R,+,\cdot)$ ونرمز لذلك بـ $S < R$.

نعلم من نظرية الزمر ، أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة جزئية غير خالية ولتكن H زمرة جزئية (Subgroup) من الزمرة $(G,\star)$ هو أن يكون $x \cdot y^{-1} \in H$ لكل y,x من H . سنستخدم هذا المفهوم في الحلقات الجزئية من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة (I) :

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت $\phi \ne S \subseteq R$ ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ هو أن يكون :

$$x \cdot y \in S \quad , \quad x - y \in S$$

وذلك من أجل أي y,x من S .

البرهان :

نفرض أولاً أن $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ ، وبالتالي فإن $(S,+,\cdot)$ زمرة جزئية من R بالنسبة لعملية الجمع، وبالتالي يكون $x - y \in S$ لكل y,x من

S، وبما ان $(S,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ فإن $x\cdot y\in S$ لكل y,x من S

نفرض الآن العكس ، أي لنفرض أن $x-y\in S$ و $x\cdot y\in S$ لكـل y,x مـن S ، وهذا يعني أن S زمرة جزئية بالنسبة لعملية الجمع فـي R ، وبمـا أن الخاصـة الإبدالية صحيحة بالنسبة لعملية الجمع على R فهي صحيحة أيضاً على S ، إذن S زمرة جزئية إبدالية . وبما أن عمليتي التجميعية وعملية توزيع الضرب على الجمع صحيحتان على R فهما صحيحتان على S لكون S مجموعة جزئية من R ، إذن $S\leq R$.

(2-2) أمثلة :

1- إن $\{o\}$ و R حلقتين جزئيتين بالنسبة لأي حلقة R ، تسمى عـادةً الحلقـة $(\{o\},+,\cdot)$ حلقة جزئية مبتذلة Trivial subring .

2- إن المجموعة $\{0,2,4\}$ تشكل حلقة جزئية بالنسبة للحقل $(Z_6,\oplus,\otimes)$.

3- إن حلقة الأعداد الصحيحة $(Z,+,\cdot)$ هي حلقة جزئية مـن حلقـة الأعـداد الحقيقية $(R,+,\cdot)$.

4- من أجل كل عدد صحيح موجب n ، المجموعة التالية :

$$n\cdot Z=\{0,\pm n,\pm 2n,....\}$$

هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة $(Z,+,\cdot)$.