الفصل الأول : مفاهيم أساسية

١-١: خواص الأعداد الصحيحة

١-٢: قاعدة الترتيب الجيد والأستقراء الرياضي

تمارين :

١-١ : خواص الأعداد الصحيحة

يمكن بناء الأعداد الصحيحة $Z=\{0,\mp1,\mp2,\cdots\}$ من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{\cdots,3,2,1,0\}=N$ ، وإثبات خواص جمعها وضربها كما في [١]، لكننا سنورد تلك الخواص دون إثبات لأي منها ، ثم نستنتج منها خواصاً أساسية أخرى .

فإذا كان $a,b,c\in Z$ ، فإن :

(١) $a+b=b+a$ ، $a\cdot b=b\cdot a$. أي أن جمع وضرب الأعداد الصحيحة إبدالي (تبديلي Commutative) .

(٢) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ، $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$. أي أن جمع وضرب الأعداد الصحيحة تجميعي (Associative) .

(٣) $a + 0 = 0 + a = a$ ، $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(٤) لكل $a \in Z$ ، يوجد $-a \in Z$ بحيث أن $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(٥) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ، $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ أي أن الضرب توزيعي على الجمع .

(٦) إذا كان $a + b = a + c$ ، فإن $b = c$.

(٧) لكل $a, b \in N$ ، نجد أن $a + b \in N$ ، $a \cdot b \in N$.

مبرهنة ١-١-١ : إذا كان $a, b \in Z$ فإن

(أ) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ، (ب) $(-a) \cdot b = a(-b) = -(ab)$

(ج) $-(-a) = a$ ، (د) $(-a)(-b) = ab$

تعريف ١-١-١ :

إذا كان $Z^{+} = \{1, 2, 3, \cdots\} = N - \{0\} = N^{*}$ وكان $a, b \in Z$ فيقال عن

(أ) a أنها أصغر من b أو أن b أكبر من a ونكتب $a < b$ إذا كان

$$b - a \in N^{*}$$

(ب) a أنها أصغر أو تساوي b أو أن b أكبر أو تساوي a ونكتب $a \leq b$ إذا كان $b - a \in N$.

مبرهنة ١-١-٢ :

(أ) إذا كان $a,b,c\in Z$ وكان $a<b$ و $b<c$ فإن $a<c$.

(ب) إذا كان $a,b,c\in Z$ ، $a<b$ ، $c>0$ ، فإن $ac<bc$.

(ج) إذا كان $a,b\in Z$ فواحدة فقط مما يأتي صحيحة : إما $a<b$ أو $a=b$ أو $a<b$.

تعريف ١-١-٢ :

إذا كان $a\in Z$ فيقال عن $|a|$ أنهـا القيمـة المطلقـة (Absolute vatue) للعدد a إذا كان

$$|a|=\begin{cases} a & \forall a\geq 0 \\ -a & \forall a<0 \end{cases}$$

مبرهنة ١-١-٣ : إذا كان $a,b \in Z$ ، فإن

(أ) $|a| \geq 0$ ، (ب) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ، (ج) $-|a| \leq a \leq |a|$

(د) $|-a| = |a|$ ، (هـ) $|ab| = |a|\,|b|$ ، (و) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

(ز) $|a+b| \leq |a| + |b|$ ، (ح) $|a-b| \geq |a| - |b|$

١-٢ : قاعدة الترتيب الجيد والاستنتاج (الأستقراء) الرياضي

Well-ordering principle and Mathematical Induction

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على قاعدة الترتيب الجيد وعلاقتها بالأستنتاج الرياضي ، ونبدأ بالآتي :

تعريف ١-٢-١ :

يقال عن علاقة $\preceq$ على مجموعة غير خالية A أنها علاقة ترتيب جزئي (partial order relation) إذا كانت :

(أ) $\preceq$ علاقة منعكسة (reflexive) على A . أي أن $a \preceq a$ لكل $a \in A$.

(ب) $\preceq$ علاقة متخالفة أو تخالفيه (Antisymmetric) على A . أي أنه إذا كان $a \preceq b$ و $b \preceq a$ فإن $a = b$.

(ج) $\preceq$ علاقة متعدية(transitive) على A. أي أنه إذا كان $a \preceq b$ و $b \preceq c$ ، فإن $a \preceq c$.

ويقال عن $(A, \preceq)$ أنها مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً (partially ordered set) ، إذا كانت $A \neq \varnothing$ و $\preceq$ علاقة ترتيب جزئي على A .

مثال ١-٢-١ :

(أ) إذا كان $A \in \{N, Z, Q, R\}$ ، وكان $a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b$ فــإن $(A, \preceq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً .

(د) إذا كانت $\preceq$ معرفة على N^* كالآتي : $a \preceq b \Leftrightarrow b \setminus a$ ، فإن $\preceq$ علاقة ترتيب جزئي على N^* ، وعليه فإن $(N^*, \preceq)$ مجموعة مرتبة جزئياً .

تعريف ١-٢-٢ :

إذا كانت $(A, \preceq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً ، فيقال عن $a \in A$ أنه عنصر أول أو عنصر أصغر (first or least or smallest element) للمجموعة A ونكتب $l(A) = a$ إذا كان $a \preceq x$ لكل $x \in A$.

مثال ١-٢-٢ :

(أ) $(\mathrm{N}\ ,\ \leq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً ، $l(\mathrm{N})=0$.

(ج) إذا كانت $A=\{x\in R \mid 0<x<1\}$ ، فإن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً لكنها لا تملك عنصر أول .

تعريف ١-٢-٣ :

يقال عن مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً $(A,\preceq)$ أنها مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً (well-ordered Set) إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من A تحوي عنصراً أولاً .

مثال ١-٢-٣ :

(أ) إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ ، فإن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جيــداً لأن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً وكل مجموعة جزئية مــن A تحوي عنصر أول .

(د) إذا كانت $A = [0,1]$ فإن A مجموعة ليست مرتبــة ترتيبــاً جيــداً لأن $A \underset{\neq}{\subset} B =]0,1]$ لا تحوي عنصر أول .

(و) $(Z,\leq)$ مجموعة ليست مرتبة ترتيباً جيداً ، لأن $\{-1, -2, -3, \cdots\}$ مجموعة جزئية منها لا تحوي على عنصر أول (عنصر أصغر) .

قاعدة الترتيب الجيد (Well-ordering principle)

$(N, \leq)$ مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً .

والآن إلى المبرهنة الآتية التي تبين بعض تطبيقات قاعدة الترتب الجيد .

مبرهنة ١-٢-١ :

(أ) لا يوجد عدد صحيح بين الصفر والواحد .

(ب) الواحد أصغر عدد موجب .

(ج) إذا كان $n \in Z$ ، فلا يوجد $m \in Z$ ، بحيث أن $n < m < n+1$

مبرهنة ١-٢-٤: العبارات الآتية متكافئة .

(أ) قاعدة الأستقراء الرياضي (principle of Mathematical Induction)

إذا كانت B مجموعة جزئية من N^* وكان $1 \in B$ و $(n \in B \Rightarrow n+1 \in B)$ فإن $B = N^*$.

(ب) القاعدة العامة للأستقراء الرياضي (Transfinite Induction) .

إذا كانت B مجموعة جزئية من N^* ، وكان $1 \in B$ و ($n \in B$ عندما $m \in B$ لكل $m < n$) ، فإن $B = N^*$.

(ج) لكل مجموعة جزئية غير خالية من N^* عنصر أول (أصغر) .

ملاحظة :

لإثبات صحة العبارة $P(n)$ لجميع قيم $n \in N^*$ يكفــي أن نبــرهن علـــى أن $P(1)$ عبارة صحيحة ونثبت أن صدق العبارة $P(m)$ يــؤدي إلـــى صـــدق العبارة $P(m+1)$ ، لأنه إذا كانت $S = \{ n \in N^* \mid P(n) \text{ عبارة صحيحة} \}$ ، فإن $1 \in S$ ، كما أنه إذا كان $m \in S$ فإن $m+1 \in S$ ، وعليه فإن $S = N^*$.

مثال (١) :

أثبت أن $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

أن أول من أثبت صحة تلك العلاقة هو أبو بكر الكوخي ، أما الحسن بن الهيــثم والسموؤل المغربي وابن البنـــاء المراكــشي فقــد أثبتوهـــا بطــرق مختلفـــة ،

الإثبات :

نفرض أن $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، إذاً عنــدما $n = 1$ نجــد أن الطرف الأيمن $= \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ، والطرف الأيــسر $= 1^2 = 1$ أيــضاً وعليــه فإن $P(1)$ عبارة صادقة .

والآن أفرض أن $P(m)$ عبارة صادقة . نجد أن

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

ولإثبات صحة العبارة $P(m+1)$ لاحظ أن

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

وعليه فإن

$$\sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m+1)\left[m(2m+1)+6(m+1)\right]}{6} = \frac{(m+1)[2m^2+7m+6]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)\left[(m+1)+1\right]\left[2(m+1)+1\right]}{6}$$

إذاً $P(m+1)$ عبارة صادقة ، وعليه فإن $P(n)$ عبارة صادقة لجميـــع قـــيم n الصحيحة الموجبة .

مثال (٢) :

إذا كان a,b عددين حقيقين، $n \in N^*$، فأثبت أن

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i-1}$$

الإثبات :

نفـــرض أن $P(n): \dfrac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i-1}$. إذاً عنـــدما $n = 1$ نجـــد أن

$L.H.S. = 1$ ، $R.H.S. = \sum_{i=1}^{1} a^{1-i} b^{i-1} = 1$ ، وعليه فإن الطرفين متساويان ،

وبالتالي فإن $P(1)$ عبارة صادقة (صحيحة) .

والآن لنفرض أن $P(m)$ عبارة صـــادقة . إذاً $\dfrac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b} = \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1}$

ولإثبات صحة $P(m+1)$ ، لاحظ أن

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b} = \frac{a^{m+1} - ab^m + ab^m - b^{m+1}}{a-b} = a\left(\frac{a^m - b^m}{a-b}\right) + b^m$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1} + b^m = a\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right) + b^m$$

$$= a^m + a^{m-1}b + \cdots + ab^{m-1} + b^m = \sum_{i=1}^{m+1} a^{(m+1)-i} b^{i-1}$$

وعليه فإن $P(m+1)$ صادقة وبالتالي فإن $P(n)$ صادقة لكل $n \in N^*$.

مثال (٦):

أثبت أن (أ) $2^n > n$ لكل $n = N^*$

(ب) $2^n > 5n$ لكل $n \geq 5$

الإثبات :

(أ) إذا كان $n=1$ ، فإن $2^1 = 2 > 1$ وعليه فإن العبارة أعلاه صحيحة عندما $n=1$. والآن لنفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=m$. إذاً $2^m > m$ ، لكن $2^{m+1} > 2m$ ، $2m \geq m+1$. إذاً $2^{m+1} > m+1$ وعليه فإن العبارة أعلاه صحيحة عندما $n=m+1$ ، وبالتالي فإن $2^n > n$ لكل $n = N^*$.

(ب) لتكن $P(n) : \forall n \geq 5 , 2^n > 5n$. إذاً عندما $n=5$ ، نجد أن $2^5 = 32 > 25$ وعليه فإن $p(5)$ عبارة صحيحة ، والآن لنفرض أن $P(m)$ صحيحة . إذاً $2^n > 5m$ لكل $5 \leq m < k$ ، ولإثبات صحة العبارة $P(m+1)$ ، لاحظ أن

$2^m > 5m \Rightarrow 2^{m+1} > 10m = 5m + 5m > 5m + 5 = 5(m+1)$ ،وعليه،

فإن $P(m+1)$ عبارة صحيحة . إذاً $2^n > 5n$ لكل $n \geq 5$.

تمـــــارين

أثبت أن

(أ) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل $n \in N^*$.

(ب) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$ لكل $n \in N^*$.

(ج) $\sum_{i=1}^{n} (4i+1) = 2n^2 + 3n + 1$ لكل $n \in N^*$.

(د) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ لكل $n \in N^*$.

(هـ) إذا كان $a \neq 1$ ، فإن $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

مثال (٥): متتابعة فيبوناشي (Fibonacci Sequence)

تنسب المتتابعة $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$ إلـــى الايطـــالي ليونـــاردو فيبوناشي (١١٧٠ – ١٢٥٠م) ، الذي نقل في كتابة (Liber Abaci) الأرقـــام العربية إلى أوربا عام ١٢٠٢م ، ويقول البعض أن تلك المتتابعة معروفة من قبل وتعرّف كالآتي :

$f_1 = f_2 = 1$ ، $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ لكل $n \in N^*$.

أثبت أن

(أ) كلاً من f_{3n-1} ، f_{3n-2} عدد فردى بينما f_{3n} عدد زوجي لكل $n \in N^*$.

(ب) $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ لكل $n \in N^*$.

البرهان : (بالإستقراء الرياضي على n)

(أ) إذا كـــان $n=1$ ، فـــإن $f_{3n-2}=f_1=1$ ، $f_{3n-1}=f_2=1$ بينمـــا $f_{3n}=f_3=2$. إذاً عندما $n=1$ نجد أن كلاً من f_{3n-1} ، f_{3n-2} عدد فردي بينما f_{3n} عدد زوجي .

والآن لنفرض أن العبارة صحيحة (صادقة) عندما $n=m$ ، إذاً كل مـــن f_{3m-1} ، f_{3m-2} عدد فردي بينما f_{3m} عدد زوجي . ولإثبات صحة العبـــارة عندما $n=m+1$ ، لاحظ أن $f_{3(m+1)-2}=f_{3m+1}=f_{3m}+f_{3m-1}$ حـــسب تعريف متتابعة فيبوناشي لكن f_{3m} عدد زوجي ، f_{3m-1} عدد فردي بالفرض، ومجموع عددين أحدهما فـــردي والآخـــر زوجـــي يكـــون عـــدداً فرديـــاً. إذاً f_{3m+1} عدد فردي . وحيث أن

$f_{3(m+1)-1} = f_{3m+1} = f_{3m+1} + f_{3m}$ و f_{3m+1} عدد فردي، f_{3m} عدد زوجي

إذاً f_{3m+2} عدد فردي . وحيث أن

$f_{3(m+1)} = f_{3m+3} = f_{3m+2} + f_{3m+1}$ حسب تعريف متتابعة فيبوناشي لكــن

كلاً من f_{3m+1} ، f_{3m+2} عدد فردي ، كما أثبتنا ، إذاً f_{3m+3} عــدد زوجــي

وعليه فإن العبارة أعلاه صحيحة عندما $n = m + 1$ ، وبالتالي فإن كلاً من

f_{3n-1} ، f_{3n-2} عـــــدد فـــــردي بينمـــــا f_{3n} عـــــدد زوجــــــي

لكل $n \in N^*$.

(ب) نفرض أن $P(n): f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$. إذاً عندما $n = 1$ نجــد أن

$L.H.S = f_2^2 - f_1 f_3 = 1^2 - 1(2) = -1$ ، $R.H.S = (-1)^1 = -1$ ، وعليه

فإن الطرفين متساويان وبالتالي فإن $P(1)$ صحيحة .

والآن لنفـــرض أن $P(m)$ صـــحيحة . إذاً $f_{m+1}^2 - f_m f_{m+2} = (-1)^m$

ولإثبات صحة $P(m+1)$ ، لاحظ أن

$f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1}$ ، $f_{m+2} = f_{m+1} + f_m$ حسب تعريف متتابعة فيبوناشي ، وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}
f_{m+2}^2 - f_{m+1} f_{m+3} &= f_{m+2}^2 - f_{m+1}\left(f_{m+2} + f_{m+1}\right) \\
&= f_{m+2}^2 - f_{m+1} f_{m+2} - f_{m+1}^2 \\
&= f_{m+2}\left(f_{m+2} - f_{m+1}\right) - f_{m+1}^2 = f_{m+2} f_m - f_{m+1}^2 \\
&= -\left(f_{m+1}^2 - f_{m+2} \cdot f_m\right) = -(-1)^m = (-1)^{m+1}
\end{aligned}$$

إذاً $P(m+1)$ صحيحة ، وعليه فإن $P(n)$ صحيحة لكل $n \in N^*$.

(٨) تسمى المتتابعة $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \cdots$ متتابعة لوكاس (Lucas sequence) نسبة للرياضي الفرنسي لوكاس (١٨٤٢ – ١٨٩١) والتي تعرّف كالآتي

$L_1 = 1 \;,\; L_2 = 3 \;,\; L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \;,\; \forall n \in N^*$. أثبت أن

(أ) كلاً من L_{3n-2} ، L_{3n-1} عدد فردي بينما L_{3n} عدد زوجي .

(ب) $L^2_{n=1} - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$.

(ج) $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ لكل $n \in N^*$.