ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Аль Зухаири Хамид Кадим Давуд

Об абстрактных дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом и случайными возмущениями

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Каменский М.И.

Воронеж - 2015

Оглавление

0.0 Введение

Актуальность темы диссертации. Начиная с 50-х годов прошлого века дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом стали разделом теории дифференциальных уравнений. Отметим здесь лишь классические монографии Р. Беллмана и К. Кука [13], А. Д. Мышкиса [24], Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина [36], в которых приведены основные постановки задач для таких уравнений, указаны их приложения. С другой стороны, исследование различных математических моделей физических и технических объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, часто требует учета случайных воздействий на эти обьекты, что приводит к дифференциальным уравнениям, содержащимвыражения зависящие от случайного параметра ω из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, где $\mathcal{F}$ является σ −алгеброй событий, а P − вероятностной мерой, т.е. $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

Простейшие дифференциальные уравнения такого типа имеют следующий вид

$$\dot{x} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, x, \omega). \tag{0.1}$$

В этом случае часто анализ поведения траекторий может быть произведен при каждомфиксированномω и дальнейшим вычислениемусредненных характеристик. Более сложным является случай, когда воздействие на объектописывается с помощью так называемого "белого шума". В этом случае принятой математической моделью является уравнение следующего вида

$$d\mathrm{X} = \mathrm{a}(\mathrm{t}, \mathrm{X})d\mathrm{t} + \mathrm{b}(\mathrm{t}, \mathrm{X})d\mathrm{W}_\mathrm{t}\,, \tag{0.2}$$

где W_t −стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\mathrm{t}, \mathrm{P})$, где $\mathcal{F}_\mathrm{t}$ система полунепрерывных справа σ −алгебр, согласованная со случайным процессом W_t.

При этом под решением начальной задачи

$$x(0) = x_0, \tag{0.3}$$

сразу же понимается как решение интегрального уравнения

$$\mathrm{X}(\mathrm{t}) = \mathrm{X}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{a}\big(\mathrm{s}, \mathrm{X}(\mathrm{s})\big) ds + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{b}\big(\mathrm{s}, \mathrm{X}(\mathrm{s})\big) d\mathrm{W}_{\mathrm{s}} \,, \tag{0.4}$$

в некотором специальном функциональном пространстве. Второе интегральное слагаемое в правой части понимается в смысле интеграла Ито. Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, первые теоремы существования решений у уравнения (0.4) были связаны с условием Липшица для операторов a и b по пространственной переменной x и применением принципа сжимающих отображений. В этом случае решение уравнения (0.4) будет единственным, в рассматриваемом функциональном пространстве. В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений следующим результатом о единственности является теорема Осгуда. Поэтому естественнымусилением результата с условием Липшица для уравнения (4) являются условия типа

$$\begin{gathered} \|\mathrm{a}(\mathrm{t}, x) - \mathrm{a}(\mathrm{t}, y)\|^2 \leq \ \mathrm{L}(\mathrm{t}, \|x - y\|^2), \\ \|\mathrm{b}(\mathrm{t}, x) - \mathrm{b}(\mathrm{t}, y)\|^2 \ \leq \ \mathrm{L}(\mathrm{t}, \|x - y\|^2), \end{gathered} \tag{0.5}$$

где L некотория непрерывная функция такая, что начальная задача

$$\dot{\mathrm{u}} = \mathrm{L}(\mathrm{t}, \mathrm{u}), \tag{0.6}$$

$$\mathrm{u}(0) = 0, \tag{0.7}$$

имеет единственное нулевое решение на исследуемом отрезке. Такое условие конечно же эквивалентно условию единственности нулевого решения интегрального уравнения

$$\mathrm{u}(\mathrm{t}) = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\big(\mathrm{s}, \mathrm{u}(\mathrm{s})\big)\, ds, \tag{0.8}$$

в классе непрерывных функций. Заметим, что так как оператор, определенный правой частью уравнения (0.4) должен действовать в пространствах суммируемых с некоторой степенью по ω функций, естественным условием на a и b является условие подлинейного роста по пространственной переменной, обеспечивающие, кстати, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, нелокальную теорему существования.

В работах А.Е. Родкиной и Б.Н. Садовского [27], по-видимому, впервые для дифференциальных уравнений со случайным воздействием типа (0.2) было замечено, что условие (0.5) приводит к тому, что интегральный оператор, определенный, правой частью уравнения (0.4) уплотняет относительно специальной меры некомпактности (см.[11]). Связь условия единственности нулевого решения уравнения (0.8) и того, что интегральный оператор, порожденный правой частью обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \mathrm{f}(t, x),$$

В бесконечномерном банаховом пространстве $\mathbb{E}$, в котором оператор f по пространственной переменной удовлетворяет неравенству

$$\chi\big(\mathrm{f}(t, \mathbb{V})\big) \le \mathrm{L}\big(t, \chi(\mathbb{V})\big), \tag{0.9}$$

где $\chi -$мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $\mathbb{E}$ была к этому времени уже хорошо известна (см. [19],[53], [60]). В работах М.И. Каменского и П. Нистри (см. [20], [21]), условия типа (0.9) широко использовались для обоснования принципа усреднения для уравнений

$$\dot{x} = Ax + \mathrm{f}(t, x), \tag{0.10}$$

где $A-$ производящий оператор сильно непрерывной полугруппы линейных операторов e^{At}, действующий в банаховом пространстве $\mathbb{E}$, а $\mathrm{f}-$непрерывный оператор, удовлетворяющий оценке (0.9). Уравнения типа (0.10) часто называют абстрактными квазилинейными (полулинейными) параболическими уравнениями (см. [41]).

Различные приложения приводят к абстрактным параболическим уравнениям с отклоняющимся аргументом, т.е. уравнениям, в которых значение x входит в правую часть в различные моменты времени.

Для таких и близких к ним уравнений многими авторами исследовались различные вопросы существования, единственности, зависимости от параметра решений различных задач см., например, работы Р.Г. Алиева [2], [3] А. М. Зверкина, Г. А. Каменского [18], Л. Э. Эльсгольца и С. Б. Норкина [18], [36], М.И. Каменского [20], [21].

Если уравнение (0.10) возмущается "белым шумом" то это приводит к уравнениям следующего вида

$$\mathrm{dX} = \big(A\mathrm{X} + \mathrm{a}(\mathrm{t},\mathrm{X})\big)\mathrm{dt} + \mathrm{b}(\mathrm{t},\mathrm{X})\mathrm{dW_t}, \qquad (0.11)$$

где $\mathrm{a}\colon [0,\mathrm{T}] \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, через $\mathrm{W_t}$ обозначим стандартный винеровский процесс со значениями в некотором гильбертовом пространстве U, а b действует из $[0,\mathrm{T}] \times \mathrm{E}$ в пространство ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{E})$. Уравнения типа (0.10) посвящено большое количество работ. Отметим здесь лишь монографии [51], [55]. Однако в большинстве работ предполагается, что операторы a и b удовлетворяют условию Липшица по пространственным переменным, а не условиям типа (0.5). Под решением уравнения (0.11), с начальным условием

$$x(0) = \varphi, \qquad (0.12)$$

где $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, следуя [37], понимают, также как и в конечномерном случае, решение интегрального уравнения

$$\mathrm{X}(\mathrm{t}) = e^{A\mathrm{t}}\varphi + \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})}\mathrm{a}\big(\mathrm{s},\mathrm{X}(\mathrm{s})\big)ds + \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})}\mathrm{b}\big(\mathrm{s},\mathrm{X}(\mathrm{s})\big)d\mathrm{W_s}, \qquad (0.13)$$

где X —элемент специального функционального пространства случайных процессов, согласованных с процессом винера $\mathrm{W_t}$. Второе интегральноеслагаемоев правой части (0.13) понимается, как интеграл Ито в бесконечномерном пространстве (см. [39]). Для уравнения (0.13) при наличии условия Липшица стандартными методами теории сжимающих отображенийдоказываются (см. например [37], [58]) локальная и глобальная теоремы существования и единственности.

Однако случай, когда a и b удовлетворяют условиям типа (0.5),насколько известно автору, не изучен. Соображения типа принципа сжимающих отображений уже не могут быть применены, что делает исследование даже в этом случае без запаздывания интересным и актуальным. Для многозначных a и b близкие вопросы изучались в [43], [44].

Для уравнения (0.13) при наличие условия Липшица по пространственным переменным для операторов a и b установлены также теоремы о непрерывной зависимости от параметра (см. [36], [62]).

Обычно рассматривается уравнение

$$\mathrm{dX} = \big(A\mathrm{X} + \mathrm{a}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathrm{X})\big)dt + \mathrm{b}_{\alpha}\big((\mathrm{t},\mathrm{X})\big)d\mathrm{W}_{\mathrm{t}}\,, \qquad (0.14)$$

где a_{α} и b_{α} зависят от некоторого параметра $\alpha \in [0, \alpha_0]$.

Классическим, начиная с М.А. Красносельского и С.Г. Крейна [22], [23], результатом о непрерывной зависимости от параметра решений уравнения

$$\dot{x} = \mathrm{f}_{\alpha}(t, x),$$

где $\mathrm{f}_{\alpha}: [0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ с начальным условием (0.3) является теорема (см., [22]), в которой предполагается, что f_{α} интегрально непрерывна по параметру, т.е.

$$\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{f}_{\alpha}(\mathrm{s}, x)ds \ \to \ \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{f}_0(\mathrm{s}, x)ds\ , \quad \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}], \quad x \in \mathrm{E}. \qquad (0.15)$$

Этот результат особенно важен в принципе усреднения, где $\mathrm{f}_{\alpha}(\mathrm{t}, x) = \mathrm{f}_{\alpha}\left(\frac{\mathrm{t}}{\alpha}, x\right), \alpha \neq 0$. В этом случае в качестве f_0 выступает среднее

$$f_0(x) = \underset{N\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{N} \int_0^N f(s,x)ds.$$

Поэтому естественным вопросом для уравнения (0.14) является вопрос о непрерывной зависимости решений от параметра в случае, когда

$$\int_0^t a_\alpha(s,x)ds \ \to \int_0^t a_0(s,x)ds\ , \quad t \in [0,T], x \in \mathbb{E}, \qquad (0.16)$$

$$\int_0^t b_\alpha(s,x)ds \ \to \int_0^t b_0(s,x)ds\ , \quad t \in [0,T], x \in \mathbb{E}. \qquad (0.17)$$

Этот вопрос исследовался многими авторами как для конечномерных уравнений (0.2)(см. например [28], [29], [30]), так и для бесконечномерных уравнений типа (0.14), (см. [33], [58]).

Остановимся здесь на особенностях, по сравненнию с обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые возникают при изучении уравнений (0.2) и (0.14).

Если для обыкновенных дифференциальных уравнений из сходимости (0.15) следует сходимость решений в пространстве $\mathcal{C}([0\,,T],\mathbb{E})$,то для уравнений типа (0.2) или (0.14) соотношения (0.16), (0.17) не обеспечивают такой сходимости (см. [34], [35]).

Для сходимости в равномерной норме необходимо вместо соотношения (0.17) требовать выполнения соотношения

$$\int_0^t \|b_\alpha(s,x) - b_0(s,x)\|^2\, ds \ \to 0 \qquad (0.18)$$

в этом случае говорят о сильной сходимости решений уравнения (0.11). Соотношения (0.18) исключают из рассмотрения уравнения с быстро осциллирующими членами диффузии, а, следовательно, и построение теории, аналогичной принципу усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для конечномерного случая Р. З. Хасьминским [34], см., также А.В. Скороход [32] и Ю. В. Прохоровым [26], было предложено вместо сходимости в равномерной норме использовать слабую сходимость, т.е. слабую сходимость мер, порождаемых решениями x_α уравнения с параметром α в пространстве $\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{E})$, а именно сходимость

$$\int\limits_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{E})} g(\mathrm{u}) \quad d\mu_\alpha(\mathrm{u}) \to \int\limits_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{E})} g(\mathrm{u}) \quad d\mu_0(\mathrm{u}),$$

для произвольной непрерывной ограниченной g, определенной напространстве $\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{E})$. Здесь μ_α $-$мера, определяемая по x_α формулой

$$\mu_\alpha(\mathbb{B}\,) = \mathrm{P}\{x_\alpha \in \mathbb{B}\},$$

для любого борелевского множествапространства $\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{E})$. Такой взгляд позволяет обосновать и процедуру усреднения для уравнений со случайным возмущеннием в частности для уравнений (0.14) (см. [45], [61]).

В работах А.Е. Родкиной [27],[54], см. также работу Х. Мао [50], показана важность изучения дифференциальных уравнений со случайным возмущением, содержащих запаздывания. Был исследован конечномерный случай, в котором уравнение в наших обозначениях имеет следующий вид

$$\mathrm{dX} = \mathrm{a}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right) d\mathrm{t} + \mathrm{b}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right) d\mathrm{W}_\mathrm{t}, \qquad (0.19)$$

где $\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_m -$ функции, заданные на отрезке $[0\,,\mathrm{T}]$, характеризующие запаздывания и удовлетворяющие неравенствам $\mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \le \mathrm{t}$, для всех $i = 1, \dots, m$. Оператор $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}$, определяется формулой

$$\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t}) = \left(\mathrm{X}(\mathrm{h}_1(\mathrm{t})), \dots, \mathrm{X}(\mathrm{h}_m(\mathrm{t}))\right).$$

Перенос постановок задач А.Е. Родкиной [54] на уравнения (0.14) приводит к уравнению

$$\mathrm{dX} = \left(A\mathrm{X} + \mathrm{a}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right)\right)d\mathrm{t} + \mathrm{b}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right)d\mathrm{W}_{\mathrm{t}}, \qquad (0.20)$$

где $A -$ производящий оператор некоторой полугруппы e^{At}, а $\mathrm{a}\colon [0,\mathrm{T}] \times \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}$, и $\mathrm{b}\colon [0,\mathrm{T}] \times \mathbb{E}^m \to \mathcal{L}(\mathrm{U},\mathbb{E})$.

Уравнения типа (0.20) возникают при изучении стохастических систем в популяционной динамике[39], распространеним волн в случайных средах [40], задачах нелинейной фильтрации [41] и др. Однако для таких уравнений практически отсутствуют аналоги результатов связанных с существованием решений и зависимостью от параметра, что делает тему диссертации важной и актуальной.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является:

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начальной задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и случайными возмущениями в случае отсутствия условия Липшица и бесконечномерного фазового пространства.
2. Доказательство теоремы о продолжимости решения начальной задачи для указанных в п.1 дифференциальных уравнений в случае подлинейного роста операторных коэффициентов.
3. Нахождениеусловий сходимости решений указанных дифференциальных уравнений в случае выполнения условия (0.18).
4. Доказательство слабой сходимости решений в случае интегральной непрерывности коэффициентов (0.16), (0.17).

Методы исследования. Основные методы исследования сверены с приложениями теории уплотняющих операторов в специальных функциональных пространствах случайных процессов. Такой подход позволяет установить компактность множества решений для уравнений, зависящие от параметра и обосновать результаты о непрерывной зависимости в различных смыслах.

Научная новизна. Следующие результаты работы являются новыми:

1. Теорема существования, единственности и нелокальной продолжимости для дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах со случайными воздействиями и отклоняющимся аргументом.
2. Теорема о непрерывной по норме зависимости от параметра решений указанных выше дифференциальных уравнений.
3. Теорема о слабой сходимости по параметру решений дифференциальных уравнений со случайными воздействиями и запаздыванием в случае интегральный непрерывности операторов, входящих в эти уравнения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении задач описываемых дифференциальными уравнениями со случайными воздействиями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Воронежских зимних математических школах в 2012г., 2013 г., 2014г., на научных семинарах кафедры высшей математики ВГПУ (руководитель проф. В. В. Обуховский) и кафедры нелинейных колебаний ВГУ (руководитель проф. В. Г. Задорожний).

Публикации работы. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [5] - [10]. Доказательства всех результатов получены лично автором.

Работы [8]-[10]опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит извведения, двух глав и списка цитируемой литературы, включающего 62 наименований. Общий объем диссертации 83 стр.

Краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав. Во введении обосновывается актуальность темы, описывается методики исследования, приводятся используемые определения и факты в удобной для дальнейшего изложения форме.

Приведем содержание диссертации по главам.

Нумерация приводимых ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

Первая глава посвящена теорема существования, единственности и продолжимости решений начальной задачи для дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве со случайным воздействием и отклоняющимся аргументом.

Первый параграф этой главы носит вспомогательный характер. В нем приводятся теоремы о непрерывной зависимости от параметра, начальных данных и интегральные неравенства для следующего интегрального уравнения с отклоняющимся аргументом.

$$\mathrm{Z}(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\big(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s}), \mu\big)\, ds, \qquad (1.1)$$

где$\mathrm{L}: [0,\mathrm{T}] \times \mathrm{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^1$ $-$непрерывная функция, D $-$некоторая область пространства $\mathbb{R}^m$, непрерывные функции $\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_m$, действуют из $[0,\mathrm{T}]$ в $[0,\mathrm{T}]$ и удовлетворяют неравенствам $\mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \le \mathrm{t}$, для всех $i = 1, \dots, m$, а оператор $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}: \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}], \mathbb{R}^1) \to \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}], \mathbb{R}^m)$ задан по следующему правилу:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s}) = \big(\mathrm{Z}(\mathrm{h}_1(\mathrm{s})), \dots, \mathrm{Z}(\mathrm{h}_m(\mathrm{s}))\big).$$

Теорема 1.1. *Пусть при* $\mu = 0$ *все решения уравнения (1.1) продолжимы на*$[0\,,T]$, *и уравнение (1.1) имеет единственное непрерывное решение* Z^0, *определенное на отрезке* $[0\,,T]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\mu \in (0,\delta)$ *все непрерывные решения* Z^μ *уравнения (1.1) определены на отрезке* $[0\,,T]$ *и удовлетворяют неравенству*

$$\|\mathrm{Z}^\mu - \mathrm{Z}^0\|_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{R}^1)} < \varepsilon.$$

Теорема 1.2. *Пусть интегральное уравнение*

$$\mathrm{Z(t)} = \mathrm{Z}_0(\nu) + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z(s)}\right) ds, \tag{1.4}$$

при $\nu = \nu_0$ *имеет единственное непрерывное решение* Z^0, *на отрезке* $[0\,,T]$, *на который продолжимы все решения уравнения (1.4), при* $\nu = \nu_0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\nu \in \boldsymbol{B}(\nu_0,\delta)$ *все решения* Z^ν *уравнения (1.4) продолжимы на отрезок* $[0\,,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\mathrm{Z}^\nu - \mathrm{Z}^0\|_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{R}^1)} < \varepsilon.$$

Теорема 1.3. *Пусть непрерывная функция* $y \in \mathcal{C}\big([0\,,T],\mathbb{R}^1\big)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{y(t)} \leq \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{y(s)}\right) ds, \tag{1.5}$$

и интегральное уравнение

$$\mathrm{Z(t)} = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z(s)}\right)\, ds, \tag{1.6}$$

имеет единственное непрерывное решение Z^0 *на отрезке* $[0\,,T]$, *на который продолжимы все решения уравнения (1.6).*

Тогда

$$y(\mathrm{t}) \leq \mathrm{Z}^0(\mathrm{t}), \qquad \mathrm{t} \in [0\,,\mathrm{T}]. \tag{1.7}$$

Близкие к затронутым в первом параграфе вопросы изучались различными авторами см., например, [46], [47], [48]. Изложение отличается от указанных здесь по форме и некоторым условиям, так здесь используется только условия единственности решения интегрального уравнения, а не конкретные условия такого факта, что требуеть некоторой модификации доказательств.

Второй параграф посвящен анализу интегрального оператора, возникающего при изучении начальной задачи для дифференциального уравнения следующего вида

$$\mathrm{dX} = \left(A\mathrm{X}(\mathrm{t}) + \mathrm{a}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right)\right)d\mathrm{t} + \mathrm{b}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t})\right)d\mathrm{W}_\mathrm{t}, \tag{1.11}$$

с начальным условием

$$\mathrm{X}(0) = \varphi, \tag{1.12}$$

где $A -$ производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At} действующей гильбертовом пространстве H. Процесс $\mathrm{W}_\mathrm{t} -$ стандартный винеровский процесс со значениями в U. Операторы a и b определены на $\mathbb{R}^1{\times}\mathrm{H}^m$и действуют соответственно в H и в $\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{H})$ (см., например, [32]), $\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_m -$ отклонения аргумента, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq \mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \leq \mathrm{t}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $\mathrm{t} \in [0, \infty)$. Оператор $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}$ сопоставляет функции X со значениями в H функцию $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}$ со значениями в H^m по следующему правилу: $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{t}) = \left(\mathrm{X}(\mathrm{h}_1(\mathrm{t})), \dots, \mathrm{X}(\mathrm{h}_m(\mathrm{t}))\right)$.

Ниже мы будем предполагать, что выполнены следующие условия

i) $\|\mathrm{a}(\mathrm{t}, x_1, \dots, x_k)\| \leq \mathrm{C}\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |x_i|\right),$

$$\|b(t, x_1, \dots, x_k)\| \leq C\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |x_i|\right),$$

$$\text{ii)} \|a(t, x_1, \dots, x_k) - a(t, y_1, \dots, y_k)\|^p \leq L\left(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p\right),$$

$$\|b(t, x_1, \dots, x_k) - b(t, y_1, \dots, y_k)\|^p \leq L\left(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p\right),$$

где функция L невозрастающая и выпуклая по второму аргументу такая, что

iii) для любой константы $C \geq 0$ интегральное неравенство

$$Z(t) \leq C \int_0^t L\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} Z(s)\right) ds$$

имеет единственное решение $Z(t) \equiv 0$.

Основными результатами параграфа являются следующие леммы

Лемма 1.1. *Пусть выполняется условие i), тогда оператор*

$$GX(t) = e^{At}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) dW_s$$

действует в пространстве $N_c^p(\mathbb{F}, [0,t]; H)$. (см., определение 0.35)

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия i), ii), iii). Тогда оператор* G *уплотняет относительно меры некомпактности, задаваемой формулой*

$$[\psi(\mho)](t) = \chi_t(\mho_t), \tag{1.15}$$

где χ_t *мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве* $N_c^p(\mathbb{F}, [0,t]; H)$, *а*

$$\mho_t = \left\{ X_t\big|_{[0,t]} : X \in \mho \right\} \subset N_c^p(\mathbb{F}, [0,t]; H),$$

здесь $\mho$ *– ограниченное множество из* $N_c^p(\mathbb{F}, [0,T]; H)$.

В третьем параграфе с использованием классической теоремы Б.Н. Садовского (см., [31], [32]), о неподвижной точке уплотняющего оператора, переводящего в себя ограниченное выпуклое замкнутое множество доказаны глобальная теорема существования решения задачи (1.11), (1.12).

Обозначим через $\mathbf{B}^{\Xi}(0, r)$ шар, радиуса r с центром в нуле в пространстве $\mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}$, снабженном нормой

$$\|\mathrm{X}\|_{\mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}}^{\Xi} = \left(\mathrm{E} \sup_{0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{T}} e^{-\Xi p s} \|\mathrm{X}(\mathrm{s})\|_{\mathrm{H}}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 1.3. *Пусть выполняются условия i)* (см. праграф 1.1). *Тогда существуют* Ξ *и* r *такие, что оператор* G *переводит шар* $\mathbf{B}^{\Xi}(0, r)$ *в себя.*

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия i) , ii) , iii)* (см. праграф 1.1). *Тогда уравнение* (1.11) *с начальным условием* (1.12) *имеет решение на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$.

В четвертом параграфе, при выполнении условий *i) – iii),* доказана теорема о единственности решений начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Теорема 1.5. *Пусть выполняются условия i) , ii) , iii). Тогда уравнение* (1.11) *с начальным условием* (1.12) *имеет на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$ *единственное решение.*

Вторая глава посвящена исследованию зависимости от параметра решенийначальной задачи.

$$\mathrm{dX}_{\alpha} = \left(A\mathrm{X}_{\alpha}(s) + \mathrm{a}_{\alpha}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_{\alpha}(\mathrm{s})\right)\right) ds + \mathrm{b}_{\alpha}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_{\alpha}(\mathrm{s})\right) d\mathrm{W}_{\mathrm{s}}\,, \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$\mathrm{X}(0) = \varphi, \quad (2.2)$$

где $W_s - (\mathbb{F}_t)$ − адаптированный процесс Винера в гильбертовом пространстве U с оператором ковариации Q. Здесь A − как и выше производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At} действующей в гильбертовом пространстве H.

Пусть $a_\alpha: \mathbb{R}^1 \times H^m \to H$, $b_\alpha: \mathbb{R}^1 \times H^m \to \mathcal{L}(U, H)$ (см, например[51]), отклонения аргумента $h_1, \dots, h_m$, удовлетворяющие, как и выше неравенствам $0 \le h_i(t) \le t$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $t \in [0, T]$.

Ниже мы будем предполагать, что для некоторого $p \ge 2$ выполнены следующие оценки

i) $\|a_\alpha(s, x)\|^p \le C(1 + \|x\|^p)$,

$\|b_\alpha(s, x)\|^p \le C(1 + \|x\|^p)$,

и

ii) $\|a_\alpha(s, x) - a_\alpha(s, y)\|^p \le L(\|x - y\|^p)$,

$\|b_\alpha(s, x) - b_\alpha(s, y)\|^p \le L(\|x - y\|^p)$,

где функция L невозрастающая и выпуклая функция такая, что

iii) для любой константы $C \ge 0$ интегральное неравенство

$$Z(t) \le C \int_0^t L\left(S_{h_1, \dots, h_m} Z(s)\right) ds$$

имеет единственное нулевое решение.

iv) Начальная функция $\varphi \in L^p(\Omega; H)$.

В первом параграфе этой главы предполагается, что выполнены условие:

v) Существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для всех $x \in H^m$ и $t_1, t_2 \in [0, T]$ такая, что $0 \le t_1 \le t_2 \le t_1 + \Delta_0$, полугруппа e^{At} непрерывна по норме операторов при $t > 0$ кроме того пусть выполнены соотношения:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{t_1}^{t_2} [a_\alpha(s, x) - a_0(s, x)] ds = 0 \qquad (2.3)$$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{tr}\{[b_\alpha(s,x)-b_0(s,x)]Q[b_\alpha(s,x)-b_0(s,x)]^*\}^{\frac{p}{2}}ds = 0 \qquad (2.4)$$

для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия i) – v). Тогда* $\psi(\{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}) = 0$, *т.е. решения* $\{X_\alpha\}$ *образуют компактное множество в пространстве* $N_c^p(F, [0,T]; H)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются предположения* i) – v). *Тогда для любого* $T > 0$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+}\sup_{t\in[0,T]}\|X_\alpha(t) - X_0(t)\|_p = 0,$$

где $\|X(t)\|_p = \left(E\|X(t)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < +\infty$.

Во втором параграфе в отличае от условия v) предполагается, выполненным следующее. Пусть $T > 0$ произвольное фиксированное число и

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+}\int_0^t e^{A(t-s)}a_\alpha(s,x)ds = \int_0^t e^{A(t-s)}a_0(s,x)ds \qquad (2.10)$$

и

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+}\left\|\int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{U}_\alpha(s,x)e^{A^*(t-s)}ds\right\|_{\mathcal{N}} = 0\,, \qquad (2.11)$$

для всех $x \in H^m, t \in [0,T]$, где

$$\mathbf{U}_\alpha(t,x) = b_\alpha(t,x)Qb_\alpha^*(t,x) - b_0(t,x)Qb_0^*(t,x) \; .$$

Кроме того, в этом параграфе A производящий оператор аналитической полугруппы, основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия i) – iv)* и (2.10), (2.11). *Тогда* $X_\alpha(\cdot,\varphi) \to X_0(\cdot,\varphi)$ *слабо в* $\mathcal{C}([0,T],H)$ *при* $\alpha \to 0^+$.

0.1 Необходимые понятия и факты

Определение 0.1. *(см. [11], [37]).ПустьE − банахово пространство и $B(E)$ множество всех его ограниченных подмножеств. Пусть M −частично упорядоченное множество. Отображение $\psi : B(E) \to M$, заданное на множестве ограниченных подмножеств банахова пространства E со значениями в некотором частично упорядоченном множестве $(M, \leq)$ называется мерой некомпактнсти, если $\psi(\overline{co}\,\Omega) = \psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in B(E)$.*

Определение 0.2. *(см. [11],[37]). Мера некомпактности ψ называется несингулярной, если для любых $x \in E$ и $\Omega \in B(E)$ мера некомпактности ψ удовлетворяет равенству*

$$\psi(\{x\} \cup \Omega) = \psi(\Omega).$$

Определение0.3. *(см. [11],[37]). Мера некомпактности ψ называется монотонной, если для любых Ω_1, $\Omega_2 \in B(E)$ из включения $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ следует неравенство $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$.*

Определение 0.4. *(см.[15],[31],[37]). Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$ множества $\Omega \in B(E)$ называется инфимум тех $\varepsilon > 0$, при которых Ω имеет в E конечную ε −сеть, т.е. существует конечное множество $y_1, \dots, y_m \in E$, такое что $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \boldsymbol{B}(y_i, \varepsilon)$, где*

$$\mathbf{B}(\varkappa, r) = \{x \in E : \|x - \varkappa\| < r\}.$$

Определение 0.5. *(см. [37]). Оператор $G: E \to E$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности ψ, если из неравенства $\psi(G(\Omega)) \nleq \psi(\Omega)$ следует относительная компактность множества Ω, здесь $\nleq$ означает отрицание отношения $\leq$ частичного порядка в множестве M.*

Теорема 0.1. *(см. [37]). Пусть $E \in B(\mathbb{E})$, выпукло и замкнуто. Пусть оператор $G: E \to E$ уплотняет относительно несингулярной монотонной меры некомпактности. Тогда G имеет в E хотя бы одну неподвижную точку.*

Пусть U, H вещественные сепарабельные гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_{\mathrm{H}}, \|\cdot\|_{\mathrm{U}}$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{H})$ пространство всех ограниченных линейных отображений из U в H, с нормой $|\cdot|_{\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{H})}$, будем писать $\mathcal{L}(\mathrm{U})$ вместо $\mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{U})$. Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, то $\mathcal{A}^*$ – сопряженный оператор. Через $|\mathcal{A}|_{\mathcal{N}}$ обозначается ядерная норма оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, при условии что $\mathcal{A}$- ядерный оператор , то есть

$$|\mathcal{A}|_{\mathcal{N}} = \sup\left\{\sum_{\mathrm{i}} |\langle \mathcal{A}\mathrm{e}_{\mathrm{i}}, f_{\mathrm{i}}\rangle|; \{\mathrm{e}_{\mathrm{i}}\}, \{f_{\mathrm{i}}\} \text{ ортонормированные базисы из H}\right\} < \infty.$$

Пусть U, H вещественные сепарабельные гильбертовы пространства и $\{\mathrm{e}_{\mathrm{i}}\}$ –ортонормированный базис из H. Оператор $\mathcal{A}$ – оператор Гильберта – Шмидта, если

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} |\mathcal{A}\mathrm{e}_{\mathrm{i}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Через $\mathcal{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{H})$ будем обозначать пространство операторов Гильберта - Шмидта из U в H, снабженное нормой $\|\cdot\|_2$.

Будем писать $\mathcal{L}_2(\mathrm{U})$ вместо $\mathcal{L}_2(\mathrm{U}, \mathrm{U})$ (см. [37]).

Пусть Q симметричный неотрицательный оператор $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathrm{U})$, и $\mathrm{Tr}\,\mathrm{Q} > 0$ $\left(\mathrm{Tr}\,\mathrm{Q} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}e_j, e_j\rangle\right)$, тогда существует полная ортонормированная система $\{e_k\}$ в U, и $\{\lambda_k\}$ ограниченная последовательность неотрицательных вещественных чисел, таких, что $\mathrm{Q}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1,2, \dots$ (см. [37]).

Определение 0.6. *(см.[11], [12]). Вероятностным пространством называется тройка* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, состоящая из пространства элементарных событий* Ω*,* $\sigma -$*алгебры* $\mathcal{F}$ *подмножеств* Ω*, называемых событиями, и неотрицательной нормированной, т.е.* $\mathrm{P}(\Omega)=1$*,* $\sigma -$ *аддитивной меры* P *на* $\Omega -$ *вероятности.*

Определение 0.7. *(см. [14], [37]). Стохастический базис* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P) -$ *это вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, оснащеное возрастающим семейством* $\sigma -$*алгебр множеств* $\{\mathcal{F}_t\}, t \in [0,T]$*,* $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t \leq \mathcal{F}$ *(т.е., линейно упорядоченное множество, при* $s \leq t, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$*) называемых фильтрацией, являющимся непрерывным справа, т.е.,* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$*, где* $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Определение 0.8. *(см.[14],[37]). Стохастический базис* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *называется полным, если* $\sigma -$*алгебра* $\mathcal{F}$ *пополнена всевозможными нулевыми по мере* P *множествами, и каждая* $\sigma -$*алгебра* $\mathcal{F}_t$ *также содержит все множества из* $\mathcal{F}$ *с* $P -$ *мерой нуль.*

Определение 0.9. *(см. [37]). Фильтрация* $\{\mathcal{F}_t\}, t \in [0,T]$ *называется нормальной, если*

(i) $\mathcal{F}_0$ *содержит все множества* $f \in \mathcal{F}$ *такие, что* $P(f)=0$*,*

(ii) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *для всех* $t \in T$.

Определение 0.10. *(см.[37]). Пусть* $E -$ *метрическое пространство, тогда наименьшая* $\sigma -$*алгебра содержащая все открытые (замкнутые) подмножества* E *называется борелевской* $\sigma -$*алгеброй и обозначается* $\mathcal{B}(E)$.

Определение 0.11. *(см.[50],[56]). Рассмотрим метрическое пространство* E*, наделенное борелевской* $\sigma -$*алгеброй его подмножеств* $\mathcal{B}(E)$*. Напомним, что отображение* $\nu : \mathcal{B}(E) \to [0, \infty)$ *называется вероятностной мерой, если*

1. *Мера* ν *нормирована, т.е.* $\nu(E) = 1$*,*

2. Мера ν счетно-аддитивна, т.е. $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{B}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(\boldsymbol{B}_i)$ для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\boldsymbol{B}_i \in \mathrm{B}(E)$, $i \in N$.

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathrm{E})$ банахово пространство всех ограниченных, непрерывных вещественных функций, определенных на E, оснащенное нормой (см. [14], [37])

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathrm{E}} |\varphi(x)|.$$

Определение 0.12. *(см. [14], [37]). Последовательность вероятностных мер $\{\mu_n\}$, на пространстве $(E, \mathrm{B}(E))$, слабо сходится к вероятностной мере μ, если для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi \in \mathcal{C}(E)$ выполнено*

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} \varphi(x)\, \mu_n(dx) = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} \varphi(x)\, \mu(dx).$$

Стоящие справа и слева интегралы понимаются как интегралы Лебега по мерам μ_n и μ соответственно.

Определение 0.13. *(см.[37], [50]). Семейство Λ −вероятностных мер на пространстве $(E, \mathrm{B}(E))$ называется компактным, если произвольная последовательность $\{\mu_n\}$ элементов из Λ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Определение 0.14. *(см. [12]) Пусть H сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle .,. \rangle$. Для произвольной вероятностной меры μ её характеристическим функционалом $\hat{\mu}$ называют преобразование Фурье $\hat{\mu} = \int_H e^{i\langle x,\lambda \rangle} \mu(dx)$. Если характеристический функционал имеет вид $exp\left\{-\frac{1}{2}(Qy, y)\right\}$, то мера $\mu = \mu_Q$ называется центрированной гауссовой мерой. При этом оператор Q называется корреляционным оператором. Он является неотрицательным и ядерным, т.е. конечна норма*

$$|\mathrm{Q}|_{\mathcal{N}} = \sup\left\{\sum_{\mathrm{i}} |\langle \mathrm{Qe_i}, f_{\mathrm{i}}\rangle|; \{\mathrm{e_i}\}, \{f_{\mathrm{i}}\}\ \text{ортонормированные базисы из H}\right\} < \infty.$$

Определение 0.15. *(см. [25]). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностное пространство, а E банахово пространство с $\sigma-$алгеброй B. Измеримое отображение X из $(\Omega, \mathcal{F})$ в (E, B) называется случайной величиной. Если не оговорено противное, в качестве B используется Борелевская $\sigma-$алгебра в E.*

Определение 0.16. *(см. [37]). Если $X-$случайная величина из $(\Omega, \mathcal{F})$ в (E, B) и P- вероятностная мера в Ω то через $L(X)$ обозначим распределение случайной величиный X, т.е. мера $L(X)$ на B определяется равенством*

$$L(X)(\mathcal{B}) = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) \in \mathcal{B}\}, \text{ для всех } \mathcal{B} \in \mathrm{B}.$$

Определение 0.17. *(см. [29]). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)-$ вероятностное пространство и $X-$ некоторая случайная величина из $(\Omega, \mathcal{F})$ в (E, B). Если интеграл $\int_{\Omega} |X|\, dP$ конечен, то интеграл $E(X) = \int_{\Omega} X\, dP$ называется математическим ожиданием случайной величины.*

Определение 0.18. *(см. [62]). Если $X_{\alpha}: (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathcal{C}([0,T], H)-$ случайные величины, то $X_{\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} X_0$ слабо в $\mathcal{C}([0,T], H)$ если, $\mu_{\alpha}(P) \to \mu_0(P)$ слабо в $\mathcal{C}([0,T], H)$, где вероятностные меры $\mu_{\alpha}(P)$ определяются формулой*

$$\mu_{\alpha}(\mathrm{P})(\mathrm{C}) = \mathrm{P}\{\mathrm{X}_{\alpha} \in \mathrm{C}\}$$

для любого борелевского множества $\mathrm{C} \subseteq \mathcal{C}([0,\mathrm{T}], \mathrm{H})$.

Определение 0.19. *(см. [14],[37]). Пусть$E-$ банахово пространство и $B(E)$ $\sigma-$алгебра его борелевских подмножеств, предположим, что задано $(\Omega, \mathcal{F}, P)-$ вероятностное пространство и $t \in [0,T]$. Семейство $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ со* *значениями в E, будем называть стохастическим процессом (или случайным процессом), если $X(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ является случайной величиной (т.е., измеримым отображением из Ω в E). Говорят, что множество функций $X(.,\omega), \omega \in \Omega$, образуют траектории стохастического процесса $X(t)$. Если функции непрерывные п. н., то говорят, что процесс X имеет непрерывные траектории.*

Определение 0.20. *(см. [14], [37]). Стохастический процесс $X(t)$ называется стохастически непрерывным в $t_0 \in [0,T]$, если, для всех $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $\rho > 0$ такое, что*

$$\mathrm{P}(\|X(\mathrm{t}) - X(\mathrm{t}_0)\| \geq \varepsilon) \leq \delta, \text{ для всех } \mathrm{t} \in [\mathrm{t}_0 - \rho, \mathrm{t}_0 + \rho] \cap [0,\mathrm{T}].$$

Определение 0.21. *(см.[14] [32], [37]). Если стохастический процесс $X(t)$- стохастически непрерывен в каждой точке [0, T], то говорят, что $X(t)$ непрерывен на $[0,T]$.*

Определение 0.22. *(см. [14], [37])). Стохастический процесс X(t), заданный на стохастическом базисе (Ω,F ,F_t , P), называется неупреждающим, если при любом $t \in [0,T]$ случайная величина $X(t)$ измерима по $\sigma-$алгебре F_{t}.*

Определение 0.23. *(см. [37]). Пусть $Q - n \times n$ положительно определенная матрица, и m вектор из $\mathbb{R}^n$. Функция*

$$g_{m,Q}(x) = \frac{1}{((2\pi)^n|\mathrm{Q}|)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}^{-1}(x-m),(x-m)\rangle}$$

является плотностью вероятностной меры на $\mathbb{R}^n$, и называется невырожденным гауссовым распределением, обозначаемым $N(m,Q)$. Его характеристический функционал имеет вид

$$\widehat{\mathrm{N}}(m,\mathrm{Q})(\lambda) = e^{i\langle\lambda,m\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}\lambda,\lambda\rangle} \ ,\lambda \in \mathbb{R}^n$$

т.е. $\int_{R^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle} g_{m,Q}(x)dx = \widehat{\mathrm{N}}(m,\mathrm{Q})(\lambda)$.

Можно показать (см.[37]), что для произвольного конечномерного невырожденного оператора Q на H и $m \in$ H существует единственная гауссовская мера, обозначаемая $\mathrm{N}(m, \mathrm{Q})$ с характеристическим функционалом

$$\widehat{\mathrm{N}}(m, \mathrm{Q})(\lambda) = e^{i\langle \lambda, m\rangle} e^{\frac{-1}{2}\langle \mathrm{Q}\lambda, \lambda\rangle}, \lambda \in H.$$

Пусть $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}; \mathrm{E})$ множество всех классов эквивалентности E −значных случайных величин (по отношению к отношению эквивалентности $\mathrm{X} \sim Y \leftrightarrow \mathrm{X} = Y$ п.н.). Тогда $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}; \mathrm{E})$–пространство с нормой

$$\|X\|_p = \left(\mathrm{E}\|X\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty,$$

если $\Omega = [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{F} = \mathrm{B}([0, \mathrm{T}])$ и P −мера Лебега на $[0, \mathrm{T}]$, то обозначим $\mathcal{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$, $1 \leq p < +\infty$ (см. [37]).

Пусть $\mathrm{X}(\mathrm{t})$ измеримый E −значный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$. Будет удобно рассматривать $\mathrm{X}(\mathrm{t})$ как отображение из Ω в банахово пространство функций (эквивалентных классов функций) таких как $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, \mathrm{T}], \mathrm{E})$ или $\mathcal{L}^p = \mathrm{L}^{p\mathcal{L}^p}(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$, $1 \leq p < +\infty$ ассоциирующее каждому $\omega \in \Omega$ траекторию $\mathrm{X}(., \omega)$ (см. [48]).

Определение 0.24. *(см. [11], [37]). Пусть U, H вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Стохастический процесс W_t, $t \geq 0$, со значениями в U называется $Q-$винеровским процессом, если он обладает следующими свойствами:*

1) *процесс $W_0 = 0$,*
2) *процесс W имеет непрерывные траектории, п.н.*
3) *процесс W имеет независимые приращения,*
4) *распределение $\mathrm{L}(W_t - W_s) = N(0, (t-s)Q)$, $t \geq s \geq 0$,*

где $\mathrm{L}(W_t - W_s)$ является распределением, $N(0, (t-s)Q)$ является невырожденным распределением Гаусса, с оператором ковариации $(t-s)Q$.

Определение 0.25. *(см.[11], [37]). Если стохастический процесс* $W_t, t \in [0,T]$ *удовлетворяет условиям 1) - 4) в определении 0.24. То говорят что,* W *является* Q *—винеровским процессом на отрезке* $[0,T]$.

Определение 0.26. *(см.[12], [37]). Пусть* $W_t, t \in [0,T]$ *винеровский процесс в* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с нормальной фильтрацией* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *в* $\mathcal{F}$. *Предположим, что*

1) $W_t - \mathcal{F}_t -$ *измеримый,*

2) $W_{t+\boldsymbol{h}} - W_t$*- не зависит от* $\mathcal{F}_t$ *, для всех* $t, \boldsymbol{h} \geq o$.

Если Q *—винеровскии процесс,* W*удовлетворяет условиям 1) - 2). То говорят что,* W *является* Q *—винеровским процессом относительно фильтрации* $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Определение 0.27. *(см.[37]). Пусть* $\mathcal{P}_\infty - \sigma -$ *алгебра, порождаемая множествами вида*

$$(s,t]\times\mathbf{F},\ 0\leq s<t<\infty,\ \mathbf{F}\in\mathcal{F}_s \text{ и } \{0\}\times\mathbf{F},\mathbf{F}\in\mathcal{F}_0.$$

Эта $\sigma -$ *алгебра называется* σ *—алгеброй и её элементы, называются предсказуемыми множествами. Сужение* $\sigma -$ *алгебры* $\mathcal{P}_\infty$ *на* $[0,T]\times\Omega$. *Обозначается через* $\mathcal{P}_T$.

Произвольное измеримое отображение из $\left([0,\mathrm{T}]\times\Omega, \mathcal{P}_\mathrm{T}\right)$ в $(\mathrm{E};\mathcal{B}(\mathrm{E}))$ называется предсказуемым процессом.

Предсказуемый процесс обязательно адаптирован.

Определение 0.28. *(см.[37]) Процесс* Φ *—адаптированый с* W_t *случайный процесс,*$t \in [0,T]$ *положим*

$$\|\Phi\|_\mathrm{T} = \left\{\mathrm{E}\int_0^\mathrm{T} \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2}\ ds\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\mathrm{E}\int_0^\mathrm{T} Tr\left(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}}\right)^*ds\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\mathbb{V}(a,b)$ —класс функций, $f\colon[0,\infty)\times\Omega\to\mathrm{E}$ таких что (см.[39]):

(1) $(t,\omega)\to f(t,\omega)$ является $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$–измеримым.

(2) функция $f(t,\omega)$ является $\mathcal{F}_\mathrm{t} -$ адаптированной

(3) $\quad E\left[\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 \, dt\right] < \infty.$

Для f, удовлетворяющих (1) - (3) по обычной схеме (см., например [25], [42]) определям интеграл Ито $\int_a^b f \, dW_t$.

Нам потребуются следующие свойства интеграла Ито

Теорема 0.2. *(см. Теорема 2.3 из[42]). Пусть* $f, g \in \mathbb{V}(a,b)$, *и пусть* $0 \le a < b$. *Тогда*

(1)$\int_a^b f \, dW_t = \int_a^u f \, dW_t + \int_u^b f \, dW_t$ *п.н.*

(2) $\int_a^b (\,cf + g)\, dW_t = c \cdot \int_a^b f \, dW_t + \int_a^b g \, dW_t$, *где с постоянная для п.в.* ω

(3) $E\left[\int_a^b f \, dW_t\right] = 0$,

(4) $\int_a^b f^2 \, dW_t$ *является* F_b *−измеримой.*

(5) $E\left[\left\|\int_a^b f\,(t,\omega) dW_t\right\|^2\right] = E\left[\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 \, dt\right]$, $\qquad$ (0.21)

Последнее свойство называют изометрией Ито.

Определение 0.29. *(см. [37]). Любое семейство* $S(t), t \in [0,\infty) -$ *ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве* E, *удовлетворяющих следующим условиям*

1) $S(0) = I$,

2) $S(t+s)=S(t)\,S(s)$, *для всех* $t, s \in [0,\infty)$,

называется полугруппой.

Определение 0.30. *(см.[37]). Если полугруппа* $S(t)$ *удовлетворяет условию* $S(t)x -$ *непрерывна на* $[0,\infty)$, *для всех* $x \in E$, *то говорят, что* $S(t)-$ C_0 *−полугруппа линейных операторов (сильно непрерывная полугруппа).*

Определение 0.31. *(см. [37], [52], [59]). Полугруппа* $S(t)$ *в банаховом пространстве* E *называется непрерывной по норме (или равномерно непрерывной) , если отображение*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$$

является непрерывным относительно равномерной операторной топологии в $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

Определение 0.32. *(см. [37]). Пусть* $S(t) - C_0$ *–полугруппа, тогда линейный оператор* A, *определяемый следующими соотношениями*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{E} : \exists \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$$

для всех $x \in D(A)$, *называют производящим оператором полугруппы* $S(t)$.

Свойства производящего оператора приведены в следующих двух теоремах.

Теорема 0.3. *(см. [37]). Пусть* $A -$ *производящий оператор* C_0 *–полугруппы* $S(t)$ *в* $\mathbb{E}$. *Тогда* $A -$ *замкнут и его область* $D(A)$ *плотна в* $\mathbb{E}$. *Более того, если* $x \in D(A)$, *то*

$$S(t)x \in \mathcal{C}^1([0, +\infty); \mathbb{E}) \cap \mathcal{C}([0, +\infty), D(A))$$

и

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)\,Ax, t \geq \mathbf{0}.$$

Теорема 0.4. *(см. [37]). Пусть* $A: D(A) \subset E \to E$ *линейный замкнутый оператор в* E. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*

(i) $A -$ *производящий* C_0 *–полугруппу* $S(t)$ *такой что* $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, *для всех* $t \geq 0$ *и* $M > 0$,

(ii) $D(A)$ *плотно в* E, *резольвентное множество* $\rho(A)$ *содержит отрезок* $(\omega, +\infty)$ *и выполняется следующая оценка*

$$\left\|R^k(\lambda, A)\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}, k = 1,2, \dots,$$

где $R(n, A)$ *резольвента оператора в* A, *а,* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}$.

В дальнейшем полугруппу, построенную по её производящему оператору A, будем обозначать $e^{\mathrm{A}t}$.

Определение 0. 33. *(см. [49]). Говорят что, линейный оператор* $A: D(A) \subset E \to E$ *является секторальным, если существуют постоянные* $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, \pi), M > 0$, *такие что*

i) $\rho(A) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}: |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$,

ii) $\|Re(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$ для всех $\lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Пусть A– секторальный оператор, тогда в силу теоремы 0.4. определено семейство операторов $\{e^{\mathrm{At}}, \mathrm{t} \geq 0\}$ образующее полугруппу, т.е.,

$$e^{\mathrm{A(t+s)}} = e^{\mathrm{At}} e^{\mathrm{As}} \quad, t, s \geq 0, e^{\mathrm{A0}} = \mathrm{I},$$

отображение $(0, +\infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{t} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{At}}$ в том случае является аналитическим (см. [49]).

Предложение 0.1. *(см. [49]). Пусть A–секториальный оператор. Тогда*

$$e^{\mathrm{At}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\epsilon,\theta}} e^{\lambda \mathrm{t}}\, \Re(\lambda, A) \mathrm{d\lambda} \ , \ \ \mathrm{t} > o$$

где, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_0\right)$ *и* $\gamma_{\epsilon,\theta}$ *–представляет собой следующей ориентированый против часовой стрелки, путь в* $\mathbb{C}$

$$\gamma_{\epsilon,\theta} = \gamma_{\epsilon,\theta}^{+} \cup \gamma_{\epsilon,\theta}^{-} \cup \gamma_{\epsilon,\theta}^{0} \ ,$$

$$\gamma_{\epsilon,\theta}^{\pm} = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \omega + re^{\pm \mathrm{i}\theta}, r \ \geq \ \varepsilon\right\},$$

$$\gamma_{\epsilon,\theta}^{0} = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \omega + \varepsilon e^{\mathrm{i}\eta}, |\eta| \ \leq 0 \right\}.$$

Определение 0. 34. *(см. [37]). Пусть* $A-$ *производящий оператор* C_0- *полугруппы* e^{At}, $\Phi - \mathcal{L}_2$ *– значный предсказуемый процесс,* $t \in$ *[0,T]. Здесь* $W_\sigma -$ *стандартный винеровский процесс со значениями в* U. *Процесс* $X(t)$, *определяемый следующим интегралом Ито*

$$\mathrm{X(t)} = \int\limits_{0}^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{A(\mathrm{s}-\sigma)}\Phi(\sigma)\mathrm{dW}_{\sigma},$$

называется стохастической сверткой.

Определение 0.35. *(см. [44]). На протяжении этой работы, обозначим через N_c^P ($\mathbb{F}$, [0,T];H) пространство непрерывных F_t −адаптированых H-значных процессов X таких, что*

$$\|X\|^{P}_{\mathrm{N^P_c}(\mathbb{F},\,[0,\mathrm{T}];\mathrm{H})} = \mathrm{E}\left(\sup_{0\le \mathrm{s}\le \mathrm{T}} \|X\|^{P}_{\mathrm{H}}\right) < +\infty.$$

Пусть $\Phi: [0,\mathrm{T}] \to \mathrm{H}$ или $\Phi: [0,\mathrm{T}] \to \mathcal{L}(\mho,\mathrm{H})$, и Φ −адаптированый с W_t случайный процесс и $\mathrm{E}\int_0^T \|\Phi(\sigma)\|^2 \mathrm{d}\sigma < \infty$, тогда при $p \ge 2$, выполняется неравенство конволюции (см.[37]),

$$\mathrm{E}\left[\sup_{\mathrm{s}\le\mathrm{t}}\left\|\int\limits_{0}^{s} \mathrm{e}^{A(\mathrm{s}-\sigma)}\Phi(\sigma)\mathrm{dW}_{\sigma}\right\|^{p}\right] \le \mathrm{c}_p \sup_{\mathrm{s}\le\mathrm{t}}\mathrm{E}\left(\left\|\int\limits_{0}^{s} \Phi(\sigma)\mathrm{dW}_{\sigma}\right\|^{p}\right)$$

$$\le \mathrm{C}_p\mathrm{E}\left(\int\limits_{0}^{t} \|\Phi(\sigma)\|^2\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{p}{2}} \qquad (0.22)$$

где $\mathrm{c}_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ и $\mathrm{C}_p = \left(\frac{p}{2}\,(p-1)\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p^2}{2}}$, а Е (У) обозначает математическое ожидание случайной величины У.

Теорема 0.5. *(см. Теорема 1.1 из[59]). Пусть существует $M > 0$, такое, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) \ge 0$, оператор $\lambda I - A$ является обратимым и*

$$\|\lambda I - A\|^{-1} \le \frac{M}{1+|\lambda|}.$$

Пусть $p > 2, \lambda \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

Пусть $\mathfrak{z}: [0,T] \times \Omega \to \mathcal{L}(U,H) -$ F_t −адаптированый измеримый стохастический процесс такой, что

$$\mathrm{E}\int_0^{\mathrm{T}} \|\mathfrak{z}(s)\|_Q^p \, ds < \infty.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\left(\sup_{0\le r,\mathrm{t}\le\mathrm{T}} \left\| \frac{\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{\mathrm{A(t-s)}}\, \mathfrak{z}(s)\mathrm{dW}_s - \int_0^{\mathrm{s}} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(r-s)}\, \mathfrak{z}(s)\mathrm{dW}_{\mathrm{s}}}{|t-r|^{\lambda}} \right\|^p\right) \le \mathrm{C}(\lambda)\mathrm{E}\int_0^{\mathrm{T}} \|\mathfrak{z}(s)\|_Q^p \, ds.$$

Глава 1

Теорема существования, единственности и продолжимости решений начальной задачи для дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве со случайным воздействем и отклоняющимся аргументом

В настоящей главе приведены теоремы о непрерывной зависимости от параметра и интегральное неравенство для интегрального оператора с запаздыванием. Основными являются теоремы существования и единственности решения у начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

1.1. Теоремы о непрерывной зависимости от параметра и интегральное неравенство для интегрального оператора с запаздыванием

В этом параграфе будут установлены теоремы о непрерывной зависимости от параметра и начальных данных следующего интегрального уравнения с запаздыванием

$$\mathrm{Z}(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s}), \mu\right) ds, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{L}: [0,\mathrm{T}] \times \mathrm{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^1$ −непрерывная функция, D −некоторая область пространства $\mathbb{R}^m$, непрерывные функции $\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_m$, действуют из $[0,\mathrm{T}]$ в $[0,\mathrm{T}]$ и удовлетворяют неравенствам $\mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \le \mathrm{t}$, для всех $i = 1, \dots, m$, а оператор $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}: \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}], \mathbb{R}^1) \to \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}], \mathbb{R}^m)$ заданпо следующему правилу

$$\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s}) = \big(\mathrm{Z}(\mathrm{h}_1(\mathrm{s})), \dots, \mathrm{Z}(\mathrm{h}_m(\mathrm{s}))\big).$$

Теорема 1.1. *Пусть при* $\mu = 0$ *все решения уравнения (1.1) продолжимы на* $[0\,,T]$, *и уравнение (1.1) имеет единственное непрерывное решение* Z^0, *определенное на отрезке* $[0\,,T]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\mu \in (0,\delta)$ *все непрерывные решения* Z^μ *уравнения (1.1) определены на отрезке* $[0\,,T]$ *и удовлетворяют неравенству*

$$\|\mathrm{Z}^\mu - \mathrm{Z}^0\|_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{R}^1)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ для последовательность $\mu_n \to 0$, $\mathrm{Z}^n\,, \mathrm{t}_n$ такие, что
$\mathrm{Z}^n \in \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}], \mathbb{R}^1)$, $\|\mathrm{Z}^n(\mathrm{t}) - \mathrm{Z}^0(\mathrm{t})\| < \varepsilon_0$ при $\mathrm{t} \in (0\,,\mathrm{t}_n)$, а $\|\mathrm{Z}^n(\mathrm{t}_n) - \mathrm{Z}^0(\mathrm{t}_n)\| = \varepsilon_0$, и Z^n удовлетворяет уравнению (1.1) на отрезке $[0\,,\mathrm{t}_n]$. Заметим, что последовательность $\{\mathrm{t}_n\}$ не может стремиться к нулю. В противном случае выполнелось бы неравенство

$$\varepsilon_0 = \|\mathrm{Z}^n(\mathrm{t}_n) - \mathrm{Z}^0(\mathrm{t}_n)\| \le$$
$$\le \int_0^{\mathrm{t}_n} \Big(\big|\mathrm{L}\big(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}^n(\mathrm{s}), \mu_n\big)\big| + \big|\mathrm{L}\big(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}^0(\mathrm{s}), 0\big)\big|\Big) ds.$$

Но стоящее справа под знаком интеграла выражение ограничено в силу непрерывности функции L, ограниченности Z^n на отрезке $[0\ ,\mathrm{t}_n]$ и неравенств $\mathrm{h}_i(\mathrm{s}) \le \mathrm{s}$, для всех $i = 1, \dots, m$. Поэтому, если $\mathrm{t}_n \to 0$, то стоящее справа выражение тоже стремится к нулю и мы получаем противоречие $0 < \varepsilon_0 \le 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{t}_n \to \alpha \in (0,\mathrm{T}]$. Тогда существует

$\mathrm{d} \in (0, \alpha)$ такое, что на отрезке $[0, \alpha - \mathrm{d}]$ все решения Z^n удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathrm{Z}^n(\mathrm{t}) - \mathrm{Z}^0(\mathrm{t})\| < \varepsilon_0 \text{ и } \|\mathrm{Z}^n(\alpha - \mathrm{d}) - \mathrm{Z}^0(\alpha - \mathrm{d})\| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}. \qquad (1.2)$$

Но тогда функции Z^n образуют в пространстве $\mathcal{C}([0\,, \alpha - \mathrm{d}], \mathbb{R}^1)$ компактную последовательность, удовлетворяющую равенству

$$\mathrm{Z}^n(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\big(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}^n(\mathrm{s}), \mu^n\big)\, ds, \ \ \mathrm{t} \in [0, \alpha - \mathrm{d}]. \qquad (1.3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{Z}^n \to \bar{\mathrm{Z}}$ в пространстве $\mathcal{C}([0\,, \alpha -$ d,*ℝ1.* Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (1.3), получим, что Z является решением уравнения (1.1) при $\mu = 0$ на отрезке $[0, \alpha - \mathrm{d}]$. Это решение может быть продолжено на отрезок $[0, \mathrm{T}]$. Мы сохраним за этим продолжением обозначение $\bar{\mathrm{Z}}$. В силу неравенствы (1.2) $\bar{\mathrm{Z}} \neq \mathrm{Z}^0$, в чем противоречие. ■

В случае, когда начальное условие Z_0 также непрерывно зависит от некоторого параметра ν, из банахова пространства, производя замену переменных $\mathrm{Z}(\mathrm{t}) - \mathrm{Z}_0(\nu) = \tilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{t})$, мы получим следующий результат, используемый в дальнейщем. Как и выше предполагается, что $\mathrm{L}\colon [0, \mathrm{T}] \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$ непрерывна.

Теорема 1.2. *Пусть интегральное уравнение*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0(\nu) + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s})\right) ds, \qquad (1.4)$$

При $\nu = \nu_0$ *имеет единственное непрерывное решение* Z^0, *на отрезке* $[0\,, T]$, *на который продолжимы все решения уравнения (1.4), при* $\nu = \nu_0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\nu \in \boldsymbol{B}(\nu_0, \delta)$ *все решения* Z^ν *уравнения (1.4) продолжимы на отрезок* $[0\,, T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\mathrm{Z}^\nu - \mathrm{Z}^0\|_{\mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}],\mathbb{R}^1)} < \varepsilon.$$

Перейдем теперь к теореме об интегральном неравенстве. Пусть, как и выше функция L непрерывна. Предположим дополнительно, что L монотона по второму аргументу, т.е.

$$\mathrm{L}(\mathrm{t}, x) \leq \mathrm{L}(\mathrm{t}, y),$$

если $x \prec y$по конус у неотрицательных координат в пространстве$\mathbb{R}^m$.

Теорема 1.3. *Пусть непрерывная функция* $y \in C([0\,, T], \mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) \leq \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{y}(\mathrm{s})\right) ds, \tag{1.5}$$

и интегральное уравнение

$$\mathrm{Z}(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}(\mathrm{s})\right)\, ds, \tag{1.6}$$

имеет единственное непрерывное решение Z^0 *на отрезке* $[0\,, T]$, *на который продолжимы все решения уравнения (1.6).*

Тогда

$$y(\mathrm{t}) \leq \mathrm{Z}^0(\mathrm{t}), \qquad t \in [0\,, \mathrm{T}]. \tag{1.7}$$

Доказательство. Обозначим правую часть неравенства (1.5) через $\mathcal{W}(\mathrm{t})$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathcal{C}^1([0\,, \mathrm{T}], \mathbb{R}^1)$ и $\mathrm{y}(\mathrm{t}) \leq \mathcal{W}(\mathrm{t})$ при любом $\mathrm{t} \in [0\,, \mathrm{T}]$. Поэтому

$$\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\, \mathrm{y}(\mathrm{s}) \prec\ \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{W}(\mathrm{s}),$$

и в силу монотонности L по второму аргументу, имеет место следующее дифференциальное неравенство

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathrm{t}) \leq \mathrm{L}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{W}(\mathrm{t})\right). \tag{1.8}$$

Заметим, что Z^0 является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathrm{t}) = \mathrm{L}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{M}(\mathrm{t})\right), \tag{1.9}$$

и как $\mathcal{W}$ так и Z^0 удовлетворяют начальному условию

$$\mathcal{M}(0) = \mathrm{Z}_0. \tag{1.10}$$

Если бы неравенство (1.8) было строгим, то в силу монотонности функции L и неравенств $\mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \leq \mathrm{t}$, для всех $i = 1, \dots, m$, мы получили бы

$$\mathcal{W}(\mathrm{t}) \leq \mathcal{M}(\mathrm{t}),$$

где $\mathcal{M}$ −решение задачи (1.9), (1.10), так как в любой точке τ, где $\dot{\mathcal{W}}(\tau) \leq \mathcal{M}(\tau)$ выполнено неравенство $\dot{\mathcal{W}}(\tau) - \dot{\mathcal{M}}(\tau) < 0$ и, следовательно функция $\mathcal{W}(\mathrm{t}) - \mathcal{M}(\mathrm{t})$ убывает в окрестности τ, т.е. $\mathcal{M}(\mathrm{t})$ никогда не может достичь $\mathcal{W}(\mathrm{t})$.

Рассмотрим теперь $\mathcal{M}^n$, которые являются решениями интегральных уравнений

$$\mathcal{M}^n(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \left(\mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{M}^n(\mathrm{s})\right) + \frac{1}{n}\right) ds,$$

а, следовательно, и решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathrm{t}) = \mathrm{L}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{M}(\mathrm{t})\right) + \frac{1}{n},$$

с начальным условием (1.10). Заметим, что тогда

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathrm{t}) < \mathrm{L}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{W}(\mathrm{t})\right) + \frac{1}{n},$$

и поэтому, как показано выше

$$\mathcal{W}(\mathrm{t}) \leq \mathcal{M}^n(\mathrm{t}), \qquad \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}].$$

В силу теоремы 1.1 $\mathcal{M}^n$ сходится равномерно к Z^0 на отрезке $[0, \mathrm{T}]$, что и доказывает неравенство (1.7).

1.2. Меры некомпактности и уплотняющие операторы, возникающие в теории стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

В этом параграфе приведены понятия меры некомпактности и уплотняющего оператора, возникающие в теории стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, которые будут использованы в дальнейщем.

Рассмотрим начальную задачу для стохастического дифференциального уравнения следующего вида

$$\mathrm{dX} = \left(A\mathrm{X(t)} + \mathrm{a}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X(t)}\right)\right)d\mathrm{t} + \mathrm{b}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X(t)}\right)d\mathrm{W_t}, \qquad (1.11)$$

с начальным условием

$$\mathrm{X}(0) = \varphi, \qquad (1.12)$$

где $A-$ производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At} действующий в гильбертовом пространстве H, операторы a и b определены на $\mathbb{R}^1{\times}\mathrm{H}^m$ и действуют соответственно в H и в $\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{H})$ (см., например, [37]), $\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_m -$ отклонения аргумента, удовлетворяющие неравенствам $0 \le \mathrm{h}_i(\mathrm{t}) \le \mathrm{t}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $\mathrm{t} \in [0, \infty)$. Оператор $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}$ сопоставляет функции X со значениями в H функцию $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}$ со значениями в H^m по следующему правилу $\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X(t)} = \left(\mathrm{X}(\mathrm{h}_1(\mathrm{t})), \dots, \mathrm{X}(\mathrm{h}_m(\mathrm{t}))\right)$. Процесс $\mathrm{W_t} -$ стандартный винеровский процесс со значениями в U.

Под решением уравнения (1.11) на отрезке [0,T], с начальным условием (1.12), будем понимать стохастический процесс $x \in \mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}(\mathrm{F}, [0,\mathrm{T}]; \mathrm{H})$ (см., определение 0.35), удовлетворяющий интегральному уравнению

$$X(t) = e^{A(t-s)}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) ds +$$

$$+ \int_0^t e^{A(t-s)} b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) dW_s \,. \qquad (1.13)$$

Ниже мы будем предполагать, что выполнены следующие оценки

i) $\|a(t, x_1, \dots, x_k)\| \le C\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |x_i|\right)$,

$\|b(t, x_1, \dots, x_k)\| \le C\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |x_i|\right)$,

ii) $\|a(t, x_1, \dots, x_k) - a(t, y_1, \dots, y_k)\|^p \le L\left(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p\right)$,

$\|b(t, x_1, \dots, x_k) - b(t, y_1, \dots, y_k)\|^p \le L\left(t, \sum_{i=1}^{k} \|x_i - y_i\|^p\right)$,

где функция L невозрастающая и выпуклая по второму аргументу функция такая, что

iii) для любой константы $C \ge 0$ интегральное неравенство

$$Z(t) \le C \int_0^t L\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} Z(s)\right) ds$$

имеет единственное решение $Z(t) \equiv 0$.

Все доказательства ниже проводятся для случая $p = 2$. Для перехода к произвольному $p \ge 2$ следует просто воспользоваться неравенствами (0.22).

Лемма 1.1. *Пусть выполняется условие i), тогда оператор*

$$GX(t) = e^{At}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) ds + + \int_0^t e^{A(t-s)} b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) dW_s$$

действует в пространстве $N_c^p(\mathbb{F}, [0,t]; H)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{N}_c^p(\mathrm{F}, [0,T];H)$ и $t \in [0,T]$, тогда

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le\tau}|(GX(s))|^2 \le C\left(\int_0^\tau \left|e^{A(t-s)}a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)\right|^2 ds\right)+$$

$$+\sup_{0\le s\le\tau}\left(\left|\int_0^s e^{A(t-s)}\, b\left(s,\left(S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)\right)dW_s\right|\right)^2 \le$$

$$\le C\int_0^\tau \left|a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)\right|^2 ds + \int_0^\tau \left|\, b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)\right|^2 ds \le$$

$$\le C\left[\int_0^\tau \left(\left|S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right|^2+1\right)ds + \int_0^\tau \left(\left|S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right|^2+1\right)ds\right] \le$$

$$\le C\left[1+\int_0^\tau \sum_{i=1}^k \|X\|_{\mathrm{N}_c^p}^2\, ds + \int_0^\tau \sum_{i=1}^k \|X\|_{\mathrm{N}_c^p}^2\, ds\right]. \qquad (1.14)$$

Таким образом

$$\|GX\|_{\mathrm{N}_c^p}^2 \le C\left(1+\sum_{i=1}^k \|X\|_{\mathrm{N}_c^p}^2\right). \blacksquare$$

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathrm{N}_c^p(\mathrm{F}, [0,T];H)$ меру некомпактности, задаваемую формулой

$$[\psi(\mho)](t) = \chi_t(\mho_t), \qquad (1.15)$$

где χ_t мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $\mathrm{N}_c^p(\mathrm{F}, [0,t];H)$, а

$$\mho_t = \left\{X_t\big|_{[0,t]} : X \in \mho\right\} \subset \mathrm{N}_c^p(\mathrm{F}, [0,t];H),$$

здесь $\mho$ − ограниченное множество из $\mathrm{N}_c^p(\mathrm{F}, [0,T];H)$.

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия i), ii), iii). Тогда оператор* G *уплотняет относительно меры некомпактности, задаваемой формулой* (1.15).

Доказательство. Заметим, что $\psi(\mho) \in \mathrm{M}[0,\mathrm{T}]$, где $\mathrm{M}[0,\mathrm{T}]-$ линейное частично упорядоченное пространство всех скалярных функций, состоящее из всех неубывающих функций, и определяет меру некомпактности на $\mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}(\mathbb{F}, [0,\mathrm{T}];\mathrm{H})$.

Покажем, что функция $\mathrm{t} \longmapsto [\psi(\mho)](\mathrm{t})$ является неубывающей и ограниченной. Действительно, если $\mathrm{t}_1 \leq \mathrm{t}_2$, то можно указать $\chi_{\mathrm{t}_2}(\mho_{\mathrm{t}_2}) + \varepsilon -$сеть множества $\mho_{\mathrm{t}_2}$, центрами которой являются функции $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m$. Но тогда $\mathrm{y}_1\big|_{[0,\mathrm{t}_1]}, \dots, \mathrm{y}_m\big|_{[0,\mathrm{t}_1]}$ образуют $\chi_{\mathrm{t}_2}(\mho_{\mathrm{t}_2}) + \varepsilon -$сеть множества $\mho_{\mathrm{t}_1}$, и следовательно, $\chi_{\mathrm{t}_1}(\mho_{\mathrm{t}_1}) \leq \chi_{\mathrm{t}_2}(\mho_{\mathrm{t}_2}) + \varepsilon$. Очевидно, $\chi_{\mathrm{t}}(\mho_{\mathrm{t}}) \leq \sup\limits_{x \in \mho} \|\mathrm{X}_{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}} \leq \mathrm{M}$, т.е. $\psi\,(\mho)$ ограничена. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ эта функция может иметь лишь конечное число скачков величины большей или равной ε, обозначим точки этих скачков через $\mathrm{t}_1, \dots, \mathrm{t}_n$.

Выберем $\delta_1 > 0$, такой, что $i \neq j \Longrightarrow (\mathrm{t}_i - \delta_1, \mathrm{t}_i + \delta_1) \cap (\mathrm{t}_j - \delta_1, \mathrm{t}_j + \delta_1) = \emptyset$, выбросим из отрезка $[0,\mathrm{T}]$ точки, соответствующие этим скачкам вместе с непересекающими $[0,\mathrm{T}]$ их $\delta_1 -$окрестностями. С помощью точек $\beta_j, j = 1, \dots, m$ разделим оставшуюся часть отрезка, на участки на которых колебания $\omega(\psi(\mho), [\beta_j, \beta_{j+1}]) < \varepsilon$.

Напомним,

$$\omega(\psi(\mho), [\beta_j, \beta_{j+1}]) = \sup_{\mathrm{t} \in [\beta_j, \beta_{j+1}]} \psi(\mho)(\mathrm{t}) - \inf_{\mathrm{t} \in [\beta_j, \beta_{j+1}]} \psi(\mho)(\mathrm{t}).$$

Выберем $\delta_2 > 0$, таким что $j \neq k \Longrightarrow [\beta_j - \delta_2, \beta_j + \delta_2] \cap [\beta_k - \delta_2, \beta_k + \delta_2] = \emptyset$, окружают точки β_j непересекающимися $\delta_2 -$окрестностями, пусть функции $z_1, \dots, z_m$ образуют $\chi_{\beta_j}(\mho_j) + \varepsilon -$ сеть множества $\mho_{\beta_j}$. Построим семейство $\mathcal{Z} = \left\{ z_k|_{[\beta_{j-1} + \delta_2, \beta_j - \delta_2]} : k = 1, \dots, m \right\}$ путем взятия всех непрерывных процессов z_k, которые совпадают с произвольным элементом $[(\psi(\mho)) + \varepsilon] -$сети множества $\mho_{\beta_j}$ из отрезка $\sigma_j = \left[\beta_{j-1} + \delta_2, \beta_j - \delta_2\right]$, $j = 1, \ldots, m$, и линейны на дополняющих сегментах.

Пусть $u \in (\mathrm{G}\mho)(\mathrm{t})$, тогда $u \in (\mathrm{G}z)(\mathrm{t})$ для некоторого $z \in \mho$ и,

$$\left[\left(\psi(\mho)\right)(\beta_j) + \varepsilon\right]^p \geq \left\|z - z_p^{\beta_j}\right\|_{\mathrm{N_c^p}}^p,$$

где некоторый элемент $z_p^{\beta_j} \in \left[\left(\psi(\mho)\right)\beta_j + \varepsilon\right]$ −сети множества $\mho_{\beta_j}$. Заметим $z_p^{\beta_j}|_{\sigma_j} = z_k|_{\sigma_j}$, где $z_k \in \mathcal{Z}_k$, что для $s \in \sigma_j$:

$$\mathrm{E}|z(\mathrm{s}) - z_k(\mathrm{s})|^p \leq \mathrm{E} \sup_{\beta_{j-1}+\delta_2 \leq s \leq \beta_j - \delta_2} |z(\mathrm{s}) - z_k(\mathrm{s})|^p \leq$$

$$\leq \left\|z - z^{\beta_j}\right\|_{\mathrm{N_c^p}}^p \leq \left[\left(\psi(\mho)\right)\left(\beta_j\right) + \varepsilon\right]^p \leq$$

$$\leq \left[\left(\psi(\mho)\right)(s) + 2\varepsilon\right]^p.$$

Поэтому при $\sigma_j^{\mathrm{t}} = \sigma_j \cap \left[0, \bar{\mathrm{h}}(\mathrm{t})\right]$, где $\bar{\mathrm{h}}(\mathrm{t}) = \sup_{0 \leq s \leq \mathrm{t}} \{\mathrm{h}_1(s), \ldots, \mathrm{h}_m(s)\}$. Тогда

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq \mathrm{t}} |(\mathrm{G}z)(\mathrm{s}) - (\mathrm{G}z_k)(\mathrm{s})|^2 \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \sup_{\tau \in [0,\mathrm{t}]} \mathrm{E} \left\{ \left| \int_0^\tau e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})} \left(\mathrm{a}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z(\mathrm{s})\right) - \mathrm{a}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z_k(\mathrm{s})\right)\right) ds \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \int_0^\tau e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})} \left(\mathrm{b}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z(\mathrm{s})\right) - \mathrm{b}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z_k(\mathrm{s})\right)\right) ds \right|^2 \right\}.$$

В силу монотонности и выпуклости функций L по второму аргументу и ограниченности полугруппы на конечном отрезке неравенство можно продолжить следующим образом

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq \mathrm{t}} |(\mathrm{G}z)(\mathrm{s}) - (\mathrm{G}\, z_k)(\mathrm{s})|^2 \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \sup_{\mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]} \mathrm{E} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \left|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_m} z_k(\mathrm{s})\right|^2\right) ds.$$

Таким образом

$$\left[\left(\psi(\mho_t)\right)\right]^p \leq \varepsilon + C\int_0^t L\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\left(\psi(\mho)\right)^2(s) + 2\varepsilon\right)\, ds,$$

в силу условия iii), $\psi(\mho)(t) \equiv 0$, т. е. $\mho$ относительно компактно.■

1.3. Теорема существования

Приведем доказательство теоремы о существовании решения в начальной задаче для стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

В пространстве $N_c^p(F, [0,T];H)$ рассмотрим норму задаваемую равенством

$$\|X\|_{N_c^p}^{\Xi} = \left(E \sup_{0\leq s\leq T} e^{-\Xi ps}\|X(s)\|_H^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где Ξ – некоторый положительный параметр, который, будет выбран ниже, таквведеная норма, очевидно, эквивалентна первоначальной, так как

$$e^{-\Xi T}\|X\|_{N_c^p} \leq \|X\|_{N_c^p}^{\Xi} \leq \|X\|_{N_c^p}.$$

Обозначим через $\mathbf{B}^{\Xi}(0,r)$ шар, радиуса r с центром в нуле в пространстве N_c^p, снабженном нормой $\|\cdot\|_{N_c^p}^{\Xi}$.

Лемма 1.3. *Пусть выполняются условия i)* (см. праграф 1.1). *Тогда существуют* Ξ *и* r *такие, что оператор* G *переводит шар* $\mathbf{B}^{\Xi}(0,r)$ *в себя.*

Доказательство. В силу условия i)

$$e^{-\Xi pt}\|GX(t)\|_H^p \leq e^{-\Xi pt}\left(C + C\int_0^t \left\|S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right\|_H^p ds\right) \leq$$

$$\leq e^{-\Xi p\mathrm{t}}\left(\mathrm{C}+\mathrm{C}\int\limits_0^{\mathrm{t}}\sup_{0\leq\tau\leq s}\|\mathrm{X}(\tau)\|_{\mathrm{H}}^{p}\,d\tau\right)\leq$$

$$\leq e^{-\Xi p\mathrm{t}}\left(\mathrm{C}+\mathrm{C}\int\limits_0^{\mathrm{t}}e^{\Xi ps}\sup_{0\leq\tau\leq s}e^{-\Xi p\tau}\|\mathrm{X}(\tau)\|_{\mathrm{H}}^{p}\,d\tau\right)\leq$$

$$\leq e^{-\Xi pt}\left(\mathrm{C}+\mathrm{C}\int\limits_0^{\mathrm{t}}e^{\Xi p\tau}d\tau\left(\sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}}e^{-\Xi ps}\|\mathrm{X}(\tau)\|_{\mathrm{H}}^{p}\right)\right)\leq$$

$$\leq \mathrm{C}+\frac{\mathrm{C}}{\Xi p}\sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}}e^{-\Xi ps}\|\mathrm{X}(\mathrm{s})\|_{\mathrm{H}}^{p}\ .$$

Отсюда следует неравенство

$$\mathrm{E}\sup_{0\leq t\leq \mathrm{T}}e^{-\Xi ps}\|\mathrm{GX}(\mathrm{t})\|^{p}\ \leq \mathrm{C}+\frac{\mathrm{C}}{\Xi p}\mathrm{E}\sup_{0\leq s\leq \mathrm{T}}e^{-\Xi ps}\|\mathrm{X}(\mathrm{s})\|_{\mathrm{H}}^{p}.$$

Таким образом

$$\left(\|\mathrm{GX}\|_{\mathrm{N}_c^p}^{\Xi}\right)^{p}\leq \mathrm{C}+\frac{\mathrm{C}}{\Xi p}\left(\|\mathrm{X}\|_{\mathrm{N}_c^p}^{\Xi}\right)^{p}.$$

Выбрав теперь Ξ так, чтобы было выполнено неравенство $\frac{\mathrm{C}}{\Xi p}<1$, мы можем подобрать r такое, что

$$\mathrm{C}+\frac{\mathrm{C}}{\Xi p}r^{p}<r^{p}.$$

Таким образом $\mathrm{G}\mathbf{B}^{\Xi}(0,r)\subseteq\mathbf{B}^{\Xi}(0,r)$. ■

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия* i) , ii) , iii) (см. праграф 1.1). *Тогда уравнение* (1.11) *с начальным условием* (1.12) *имеет решение на отрезке* $[0,\mathrm{T}]$.

Доказательство. Приведем для случая $p=2$. Для других $p\in(1,\infty)$ доказательство проводятся аналогично, с заменой соответствующих констант C_2 на C_p из неравенств (0.22). Разрешимость задачи (1.13) в $\mathrm{N}_{\mathrm{c}}^{p}(\mathrm{F},[0,\mathrm{T}];\mathrm{H})$ следует из теоремы 0.1 Действительно, нетрудно убедиться, что мера некомпактности ψ

имеет все необходимые свойства и оператор G уплотняет см. лемму 1.2. В качестве C достаточно в силу леммы 1.3 взять $\mathbf{B}^{\Xi}(0, r)$.

1.4. Теорема единственности

В этом разделе доказывается теорема о единственности решений начальной задачи для стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Теорема 1.5. *Пусть выполняются условия* i), ii), iii). *Тогда уравнение* (1.11) *с начальным условием* (1.12) *имеет на отрезке*$[0, \mathrm{T}]$ *единственное решение*.

Доказательство. Действительно если X и Y два решения уравнения (1.11) с начальным условием (1.12). Тогда, обозначая через $\mathbb{Z}$ их разность, инеем

$$\mathbb{Z}(\mathrm{t}) = \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})} \left(\mathrm{a}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{s})\right) - \mathrm{a}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Y}(\mathrm{s})\right)\right) ds +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})} \left(\mathrm{b}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{s})\right) - \mathrm{b}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Y}(\mathrm{s})\right)\right) d\mathrm{W}_{\mathrm{s}}.$$

Применяет оценки ii) и неравенство (0.22), получим

$$\mathrm{E} \sup_{0\le s\le \mathrm{t}} |\mathbb{Z}(\mathrm{s})|^p \le \mathrm{C} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{E}\left|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}|\mathbb{Z}|^p(\mathrm{s})\right|\right)\, ds \le$$

$$\le \mathrm{C} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{s}, \mathrm{E} \sup_{0\le \tau\le \mathrm{s}} \left|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}|\mathbb{Z}(\tau)|^p\right|\right)\, ds,$$

в силу iii) $\mathrm{E} \sup\limits_{0\le s\le \mathrm{t}} |\mathbb{Z}(\mathrm{s})|^p \equiv 0$, $\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$, т.е. $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. ■

Глава 2

О зависимости от параметра решении стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

В настоящей главе осуществляется исследование зависимости от параметра решений начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздыванием и случайными воздействиями.

2.1 О непрерывности по параметру в сильном смысле

Рассмотрим стохастическоедифференциальноеуравнение

$$dX_\alpha = \left(AX_\alpha(s) + a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\right)\right)ds + b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\right)dW_s\,, \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$X(0) = \varphi, \quad (2.2)$$

где $W_s - (\mathbb{F}_t)$ −адаптированный процесс Винера вгильбертовом пространствеUс оператором ковариации Q. Здесь A −как и выше производящий оператор сильно непрерывной полугруппы e^{At} действующей в гильбертовом пространстве H.Операторы a_α и b_α зависят опараметра $\alpha \in [0,1]$. Пусть $a_\alpha: \mathbb{R}^1 \times H^m \to H$, $b_\alpha: \mathbb{R}^1 \times H^m \to \mathcal{L}(U, H)$, отклонения аргумента $h_1, \dots, h_m$, удовлетворяют как и выше неравенствам $0 \le h_i(t) \le t$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $t \in [0, T]$.

Ниже мы будем предполагать, что для некоторого $p \ge 2$ выполнены следующие оценки

$i_\alpha)$ $\quad \|a_\alpha(s, x)\|^p \le C(1 + \|x\|^p)$,

$$\|b_\alpha(s,x)\|^p \le C(1+\|x\|^p),$$

и

$ii_\alpha)\|a_\alpha(s,x)-a_\alpha(s,y)\|^p \le L(\|x-y\|^p),$

$$\|b_\alpha(s,x)-b_\alpha(s,y)\|^p \le L(\|x-y\|^p),$$

где функция L невозрастающая и выпуклая функция такая, что

iii_α) для любой константы $C \ge 0$ интегральное неравенство

$$Z(t) \le C\int_0^t L\left(S_{h_1,\dots,h_m}Z(s)\right)\,ds$$

имеет единственное нулевое решение.

iv) Начальная функция$\varphi \in \mathcal{L}^p(\Omega;H)$.

В силу результатов первойглавы, см. теоремы 1.4 и начальная задача (2.1) (2.2) при каждом α имеет единственное решение $X_\alpha \in N_c^p(\mathbb{F},\ [0,T];H)$, определенное на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющей интегральному уравнению

$$X_\alpha(t) = e^{At}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)}a_\alpha\left(s,S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)ds +$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}b_\alpha\left(s,S_{h_1,\dots,h_m}X(s)\right)dW_s\,.$$

v) Предположим, что существует$\Delta_0 > 0$ токое, что для всех$x \in H^m$ и $t_1,t_2 \in [0,T]$ таких, что$0 \le t_1 \le t_2 \le t_1+\Delta_0$, полугруппа e^{At} непрерывна по норме операторов при $t>0$ кроме таго пусть выполнены соотношения:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{t_1}^{t_2}[a_\alpha(s,x)-a_0(s,x)]\;ds = 0 \qquad (2.3)$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{t_1}^{t_2}\left(tr\{[b_\alpha(s,x)-b_0(s,x)]\,Q[b_\alpha(s,x)-b_0(s,x)]^*\}\right)^{\frac{p}{2}}\;ds = 0 \qquad (2.4)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0,T]$.

Ниже в доказательствах все константы обозначаются одной буквой C.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* $i_\alpha) - v$). *Тогда* $\psi(\{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}) = 0$, *т.е. решения* $\{X_\alpha\}$ *образуют компактное множество в пространстве* $N_c^p(\mathbb{F}, [0,T];H)$.

Доказательство. Заметим, что $\psi\{X_\alpha\} \in M[0,T]$, где $M[0,T] -$ линейное частично упорядоченное пространство всех скалярных функций, состоящее из всех неубывающих функций, и определяет меру некомпактности на $N_c^p(\mathbb{F}, [0,T];H)$.

Функция $t \longmapsto [\psi\{X_\alpha\}](t)$ является неубывающей и ограниченной (см., лемма 1.2). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ эта функция может иметь лишь конечное число скачков величины большей или равной ε, обозначим точки этих скачков через $t_1, \dots, t_n$.

Выберем $\delta_1 > 0$, такой, что $i \neq j \Longrightarrow [t_i - \delta_1, t_i + \delta_1] \cap [t_j - \delta_1, t_j + \delta_1] = \emptyset$, выбросим из отрезка $[0,T]$ точки, соответствующие этим скачкам вместе с непересекающими $[0,T]$ их δ_1 –окрестностями. С помощью точек $\beta_j, j = 1, \dots, \imath$ разделим оставшуюся часть отрезка, на участки на которых колебания

$$\omega\left(\psi\{X_\alpha\}, [\beta_j, \beta_{j+1}]\right) < \varepsilon.$$

Напомним,

$$\omega\left(\psi\{X_\alpha\}, [\beta_j, \beta_{j+1}]\right) = \sup_{t \in [\beta_j, \beta_{j+1}]} [\psi\{X_\alpha\}](t) - \inf_{t \in [\beta_j, \beta_{j+1}]} [\psi\{X_\alpha\}](t).$$

Выберем $\delta_2 > 0$, таким что $j \neq \ell \Longrightarrow (\beta_j - \delta_2, \beta_j + \delta_2) \cap (\beta_\ell - \delta_2, \beta_\ell + \delta_2) = \emptyset$, окружают точки β_j непересекающимися δ_2 –окрестностями, пусть функции $z_1, \dots, z_m$ образуют $\chi_{\beta_j}(\{X_\alpha\}_j) + \varepsilon -$ сеть множества $\{X_\alpha\}_{\beta_j}$. Построим семейство $\mathcal{Z}_j = \left\{ z_j|_{\beta_j - \delta_2, \beta_j + \delta_2} : j = 1, \dots, m \right\}$ путем взятия всех непрерывных процессов z_j, которые совпадают с произвольным элементом $[(\psi\{X_\alpha\}) + \varepsilon]$ –сети множества

$\{X_\alpha\}_{\beta_j}$ из отрезка $\sigma_j = [\beta_j - \delta_2, \beta_j + \delta_2], j = 1, \dots, \imath$, и линейны на дополняющих сегментах.

Пусть $u \in (G\{X_\alpha\})(t)$, тогда $u \in (Gz)(t)$, для некоторого $z \in \{X_\alpha\}$ и,

$$[(\psi\{X_\alpha\})(\beta_j) + \varepsilon]^p \geq \left\| z - z_p^{\beta_j} \right\|_{N_c^p}^p,$$

где некоторый элемент $z_p^{\beta_j} \in [(\psi\{X_\alpha\}) + \varepsilon]$ −сети множества $\{X_\alpha\}_{\beta_j}$. Затем, $z_p^{\beta_j}|_{\sigma_j} = z_j|_{\sigma_j}$, где $z_j \in \mathcal{Z}$, что для $s \in \sigma_j$ тогда:

$$\mathrm{E}\left|z(s) - z_j(s)\right|^p \leq \mathrm{E} \sup_{\beta_{j-1}+\delta_2 \leq s \leq \beta_j - \delta_2} \left|z(s) - z_j(s)\right|^p \leq$$

$$\leq \left\| z - z^{\beta_j} \right\|_{N_c^p}^p \leq \left[(\psi\{X_\alpha\})(\beta_j) + \varepsilon\right]^p \leq$$

$$\leq [(\psi\{X_\alpha\})(s) + 2\varepsilon]^p.$$

Поэтому при $\sigma_j^t = \sigma_j \cap [0, \bar{h}(t)]$, где $\bar{h}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \{h_1(s), \dots, h_m(s)\}$. Тогда

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left|(Gz)(s) - (Gz_j)(s)\right|^p \leq$$

$$\leq C \sup_{\tau \in [0,t]} \mathrm{E} \left\{ \left| \int_0^\tau e^{A(t-s)} \left(a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} z(s)\right) - a\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} z_j(s)\right) \right) ds \right|^p + \right.$$

$$\left. + \left| \int_0^\tau e^{A(t-s)} \left(b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} z(s)\right) - b\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} z_j(s)\right) \right) \right|^p ds \right\}$$

в силу монотонности и выпуклости функций L и ограниченности полугруппы на конечном отрезке, последнее неравенство можно продолжить следующим образом

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left|(Gz)(s) - (Gz_j)(s)\right|^p \leq\leq C \sup_{t \in [0,T]} \mathrm{E} \int_0^t L\left(\left| S_{h_1,\dots,h_m} z(s) - S_{h_1,\dots,h_m} z_j(s) \right|^p \right) ds \,.$$

Таким образом

$$\left[\left(\psi(\{X_\alpha\}_t)\right)\right]^p \le \varepsilon + C\int_0^t L\left(S_{h_1,\dots,h_m}(\,\psi\{X_\alpha\})^2(s) + 2\varepsilon\right)\, ds$$

в силу условия iii_α), произвольности ε и теорем 1.2 и 1.3 $\psi\{X_\alpha\}(t) \equiv 0$ т.е., $\{X_\alpha\}$ относительно компактно. ■

Теорема 2.2. *Пусть выполняются предположения* i_α) – v). *Тогда для любого* $T > 0$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+} \sup_{t\in[0,T]} \|X_\alpha(t) - X_0(t)\|_p = 0$$

где $\|X(t)\|_p = \left(E\|X(t)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < +\infty$.

Доказательство. Зафиксируем $T > 0$, $\eta > 0$.

Пусть $\{\tau\}_{i=0}^N$ обозначает разбиение отрезка [0,T] такое, что для $i = 1, \dots, N$ и $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ имеем

$$\|X_0(t) - X_0(\tau_{i-1})\|_p < \eta. \tag{2.5}$$

Можем дополнительно считать, что $\max\{\tau_i - \tau_{i-1}, i = 1, \dots, N\} \le \min(\eta, \Delta_0)$. Положим $\tau(t) = \max\{i, \tau_i \in [0, t]\}$, $q(t) = \tau_{\tau(t)}$ тогда

$$X_\alpha(t) - X_0(t) =$$

$$= \int_0^t \left\{e^{A(t-s)} a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_\alpha(s)\right) - e^{A(t-s)} a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_0(s)\right)\right\} ds +$$

$$+ \int_0^t \left\{e^{A(t-s)} b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_\alpha(s)\right) - e^{A(t-s)} b_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_0(s)\right)\right\} dW_s \equiv$$

$$\equiv R_1 + R_2.$$

Здесь,

$$R_1 = \int_0^{q(t)} e^{A(t-s)}\left[a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_\alpha(s)\right) - a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_0(s)\right)\right] ds +$$

$$+\int\limits_{q(t)}^{t} e^{A(t-s)}\left[a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)-a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)\right]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)}\left[a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)-a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)\right]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)}\left[a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)-a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)\right]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(t-s)}\left[a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)-a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)\right]ds\equiv$$

$$\equiv I_1(t)+\dots+I_5(t).$$

Теперь, используя ii_α), получаем

$$\|I_1(t)\|_p\le$$

$$\le C\left(\int\limits_0^t\left\|e^{A(t-s)}\left[a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\right)-a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)\right]\right\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le C\int\limits_0^t L\left(\left\|S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)-S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right\|^p\right)ds;$$

$$\|I_2(t)\|_p\le C\int\limits_{q(t)}^{t}\left\|\left(a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\right)-a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)\right)\right\|^p ds\le$$

$$\le C\int\limits_{q(t)}^{t}\left(1+\left\|S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s)\right\|+\left\|S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right\|\right)^{\frac{p}{2}}ds\le C\eta.$$

В соответствии с (2.5) можем оценить$I_3(t)$ следующим образом

$$\|I_3(t)\|_p\le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\| e^{A(\mathrm{t-s})} \left[\mathrm{a}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) - \mathrm{a}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\tau_{i-1}) \right) \right] \right\|^p ds \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\| \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\tau_{i-1}) \right\|^p d\mathrm{s} \leq \mathrm{C}\eta;$$

по аналогии $\|\mathrm{I}_5(\mathrm{t})\|_p \leq \mathrm{C}\eta$.

Окончательно,

$$\|\mathrm{I}_4(\mathrm{t})\|_p \leq \mathrm{C} \sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})} \left\| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A(\tau_i - \mathrm{s})} \left[\mathrm{a}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\tau_{i-1}) \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \mathrm{a}_0 \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\tau_{i-1}) \right) \right] ds \right\|_p.$$

Следовательно, исходя из предположения, (2.3) и теоремы Лебега (см., [20] стр. 140) о сходимости, можем найти $\alpha_1 > 0$, такое, что $\|\mathrm{I}_4(\mathrm{t})\|_p < \eta$ для $\alpha \in (0, \alpha_1]$. Теперь нам нужно оценить

$$R_2 = \int_0^{\mathrm{q(t)}} e^{A(\mathrm{t-s})} \left[\mathrm{b}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) \right) - \mathrm{b}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) \right] \mathrm{dW_s} +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{q(t)}} \left\{ e^{A(\mathrm{t-s})} \mathrm{b}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) - e^{A(\mathrm{t-s})} \mathrm{b}_0 \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) \right\} \mathrm{dW_s} +$$

$$+ \int_{\mathrm{q(t)}}^{\mathrm{t}} \left\{ e^{A(\mathrm{t-s})} \mathrm{b}_\alpha \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) - e^{A(\mathrm{t-s})} \mathrm{b}_0 \left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m} \mathrm{X}_0(\mathrm{s}) \right) \right\} \mathrm{dW_s} \equiv$$

$$\equiv \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3.$$

Используя (0.22)и свойства функции L, легко вывести

$$\|K_1\|_p \le C\left(\int_0^t L\left(\left\|S_{h_1,\dots,h_m}X_\alpha(s) - S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right\|^p\right)ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(s) = e^{A(t-s)}b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right) - e^{A(t-s)}b_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)$, используя оценку i_α), легко доказать что, $\sup\{\|\mathfrak{N}(s)\|^p, 0 \le s \le t \le T\} \le C$, где константа C не зависит от α. Теперь в силу (0.22) имеем

$$\|K_2\|_p \le C\left(\int_0^{q(t)} |\mathrm{tr}\,\{\mathfrak{N}(s)\,Q\,\mathfrak{N}(s)^*\}|^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C\left(\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\mathrm{tr}\left\{e^{A(t-s)}\left[b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right) -\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)\right]Q\,\mathfrak{N}(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\mathrm{tr}\left\{e^{A(t-s)}\left[b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right) -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - b_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right)\right]Q\,\mathfrak{N}(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\mathrm{tr}\left\{e^{A(t-s)}\left[b_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(\tau_{i-1})\right) -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - b_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right)\right]Q\,\mathfrak{N}(s)^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{1}{2}} \equiv$$

$$\equiv C(J_1 + J_2 + J_3)^{\frac{1}{2}}.$$

Перейдем к оценке слагаемых J_1, J_2, J_3.

$$J_1 \le \mathrm{tr}Q\sum_{i=1}^{\tau(t)}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\left\|e^{A(t-s)}\left[b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_0(s)\right) -\right.\right.\right.$$

$$- \mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)\Big]\Big\| \, \|\mathfrak{N}(\mathrm{s})\|\Big|^{\frac{p}{2}} ds \le$$

$$\le \mathrm{trQ}\sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\Big\|e^{A(\mathrm{t-s})}\Big[\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right) -$$

$$- \mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)\Big]\Big\|^p \, \|\mathfrak{N}(\mathrm{s})\|^p ds \ \le$$

$$\le \mathrm{tr\,Q}\sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left\|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right\|^p ds \le \mathrm{C}\eta,$$

по аналогии $\mathrm{J}_3 \le \mathrm{C}\eta$; пусть $\{\mathrm{e_n}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ ортонормированный базис из $\mathbb{E}$.

Пусть

$$\mathfrak{M}_i(\mathrm{s}) = e^{A(\mathrm{t-s})}\Big[\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right) - \mathrm{b}_0\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)\Big],$$

оценки $\sup\{\mathfrak{M}_i(\mathrm{s}), i = 1, \dots, N, \mathrm{s} \in [\tau_{i-1}, \tau_i]\} \le \mathrm{C}$ могут быть легко проверены. Теперь

$$\mathrm{J}_2 = \sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\Big|\mathrm{tr}\ \Big\{\mathfrak{M}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\Big[\ e^{A(\mathrm{t-s})}\,\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right) -$$

$$- \ e^{A(\mathrm{t-s})}\mathrm{b}_0\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right)\Big]^*\Big\}\Big|^{\frac{p}{2}} ds \ \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\Big|\mathrm{tr}\ \Big\{\mathfrak{M}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\Big[\ e^{A(\mathrm{t-s})}\Big[\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right) -$$

$$- \ \mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)\Big]\Big]^*\Big\}\Big|^{\frac{p}{2}} ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|\mathrm{tr}\{\mathfrak{M}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\mathfrak{M}_i(\mathrm{s})^*\}|^{\frac{p}{2}} ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|\mathrm{tr}\left\{\mathfrak{M}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\left[\ e^{A(\mathrm{t-s})}\left[\mathrm{b}_0\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-\,\mathrm{b}_0\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right)\right]\right]^*\right\}\right|^{\frac{p}{2}}ds\equiv\mathrm{J}_4+\mathrm{J}_5+\mathrm{J}_6.$$

Как и прежде, мы можем получить $\mathrm{J}_4+\mathrm{J}_6\le\mathrm{C}\eta$.

Далее, полагая

$$\mathcal{R}_i(\mathrm{s})=\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)-\mathrm{b}_0\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\tau_{i-1})\right)$$

$$\mathrm{J}_5\le\mathrm{C}\sum_{i=1}^{\tau(\mathrm{t})}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|\mathrm{tr}\{\mathcal{R}_i(\mathrm{s})\ \mathrm{Q}\ \mathcal{R}_i(\mathrm{s})^*\}|^{\frac{p}{2}}ds\le$$

$$\le\ \mathrm{C}\sum_{i=1}^{N}(\tau_i-\tau_{i-1})^{\frac{(p-2)}{p}}\left(\mathrm{E}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\mathrm{tr}\{\mathcal{R}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\ \mathcal{R}_i(\mathrm{s})^*\})^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{2}{p}}\le$$

$$\le\ \mathrm{C}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathrm{E}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\mathrm{tr}\{\mathcal{R}_i(\mathrm{s})\mathrm{Q}\mathcal{R}_i(\mathrm{s})^*\})^{\frac{p}{2}}ds\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Из (2.4) для $i=1,\dots,N$ и почти $\vartheta\in\Omega$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\mathrm{tr}\{\mathcal{R}_i(\mathrm{s})(\vartheta)\mathrm{Q}\ \mathcal{R}_i(\mathrm{s})(\vartheta)^*\})^{\frac{p}{2}}ds=0,$$

следовательно, применяя теорему Лебега (см., [17] стр. 140) о сходимости получаем существование $\alpha_2>0$ такого, что $\mathrm{J}_5\le\eta$ для каждого $\alpha\in(0,\alpha_2]$.

$$\|\mathrm{K}_3\|_p\le\mathrm{C}\left(\int_{\mathrm{q(t)}}^{\mathrm{t}}\left\|e^{A(\mathrm{t-s})}\,\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s})\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,e^{A(\mathrm{t-s})}\mathrm{b}_0\left(\mathrm{s},\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right)\right\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\ \le\mathrm{C}\eta.$$

Объединяя все выведенные оценки, имеем для α достаточно небольшой

$$\|\mathrm{R}_2\|_p \leq \mathrm{C}\left(\eta^{\frac{p}{2}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\left\|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right\|^p\right)ds\right).$$

Доказательство завершено, потому что мы нашли постоянную C, для любого $\eta > 0$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

$$\|\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{X}_0(\mathrm{s})\|^p \leq$$

$$\leq \mathrm{C}\left(\eta^{\frac{p}{2}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\left\|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right\|^p\right)ds\right).$$

Итак установлено, что

$$\|\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{X}_0(\mathrm{s})\|^p \leq$$

$$\leq \mathrm{C}\eta^{\frac{p}{2}} + \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\left\|\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_0(\mathrm{s})\right\|^p\right)ds.$$

Обозначим $\|\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{s}) - \mathrm{X}_0(\mathrm{s})\|^p$ через $\mathcal{U}_\alpha(\mathrm{t})$, тогда

$$\mathcal{U}_\alpha(\mathrm{t}) \leq \mathrm{C}\eta^{\frac{p}{2}} + \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{U}_\alpha(\mathrm{s})\right)ds.$$

Положим теперь

$$\mathrm{C}\eta^{\frac{p}{2}} + \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{L}\left(\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathcal{U}_\alpha(\mathrm{s})\right)ds = \mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{t}),$$

имеем

$$\mathcal{U}_\alpha(\mathrm{t}) \leq \mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{t}),$$

функция $\mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{t})$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{\mathrm{Z}}_\alpha(\mathrm{t}) \leq \mathrm{L}\left(\mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{t})\right),$$

$Z_\alpha(0) = C\eta^{\frac{p}{2}}.$

Поэтому $Z_\alpha(t) \le Z_\alpha^B(t,\eta)$, где $Z_\alpha^B(t,\eta)$ – верхнее решение задачи

$$\dot{Z}(t) = CL\left(S_{h_1,\dots,h_m} Z(t)\right), \tag{2.6}$$

$$Z(0) = C\eta^{\frac{p}{2}}.$$

Но в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных для задачи (2.6) (см.теорему 1.3), $Z_\alpha(t,\eta) \underset{\eta \to 0}{\rightrightarrows} 0$ на отрезке $[0, T]$, что и завершает доказательство теоремы.

2.2 О непрерывной зависимости от параметра в слабом смысле

Целью параграфа является доказательство слабой сходимости при $\alpha \to 0$ решений начальной задачи стохастического эволюционного уравнения

$$dX_\alpha = \left(AX_\alpha(t) + a_\alpha(t, S_{h_1,\dots,h_m} X_\alpha(t))\right)dt + b_\alpha\left(t, S_{h_1,\dots,h_m} X_\alpha(t)\right)dW_t \tag{2.7}$$

с начальным условием

$X_\alpha(0) = \varphi$,(2.8)

где $A: \mathrm{Dom}(A) \to H$ является производящим оператором аналитической полугруппы e^{At} в гильбертовом пространстве H.

Остальные обозначения в уравнении (2.7) те же, что и в параграфе 2.1.

Итак, рассмотрим начальную задачу (2.7) и (2.8), для $\alpha \in [0, \alpha_0)$, предполагая, выполнеными следующие условия:

(i) $A: \mathrm{Dom}(A) \to H$ является производящим оператор аналитической полугруппы e^{At} в H.

(ii) $\|a_\alpha(t,x)\|_H + \|b_\alpha(t,x)\|_{\mathcal{L}(U,H)} \le C(1+|x|_{H^m})$, для всех $x \in H^m, t \ge 0$ и $\alpha \in [0,\alpha_0)$.

(iii) $\|a_\alpha(t,x) - a_\alpha(t,y)\|_H^2 + \|b_\alpha(t,x) - b_\alpha(t,y)\|_{\mathcal{L}(U,H)}^2 \le L(|x-y|_{H^m}^2)$,

для всех $x \in H^m, t \ge 0$ и $\alpha \in [0,\alpha_0)$, где функция L невозрастающая, выпуклая функция такая, что для любой константы $C \ge 0$ интегральное неравенство

(iv)

$$Z(t) \le C\int_0^t L\left(S_{h_1,\dots,h_m} Z(s)\right) ds$$

имеет единственное решение $Z(t) \equiv 0$.

(v) φ является H-значной F - измеримой случайной величиной из пространства $\mathcal{L}_p(\Omega, H)$.

Задача (2.7) , (2.8) в силу теорем 1.4 и 1.5 имеет единственное решение $X_\alpha \in N_c^p(\mathrm{F}, [0,T]; H)$являющееся решением интегрального уравнения

$$X_\alpha(s) =$$

$$= e^{At}\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} a_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) ds +$$

$$+ \int_0^t e^{A(t-s)} b_\alpha\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X(s)\right) dW_s \ . \qquad (2.9)$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* ***(i)*** – ***(iv)*** . *Пусть* $T > 0$ *произвольное, фиксированное число. Предположим, что*

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+} \int_0^t e^{A(t-s)} a_\alpha(s,x) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} a_0(s,x) ds \ (2.10)$$

и

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to 0^+}\left|\int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{U}_\alpha(s,x)e^{A^*(t-s)}ds\right|_{\mathcal{N}} = 0\,, \tag{2.11}$$

для всех $x \in \mathrm{H}^m, \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]$, *где*

$$\mathbf{U}_\alpha(\mathrm{t},x) = \mathrm{b}_\alpha(\mathrm{t},x)\mathrm{Q}\mathrm{b}_\alpha^*(\mathrm{t},x) - \mathrm{b}_0(\mathrm{t},x)\mathrm{Q}\mathrm{b}_0^*(\mathrm{t},x).$$

Тогда $\mathrm{X}_\alpha(\cdot\,,\varphi) \to \mathrm{X}_0(\cdot\,,\varphi)$ *слабо в* $\mathcal{C}([0,\mathrm{T}],\mathrm{H})$ *при* $\alpha \to 0^+$.

Нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 2.1. *(см., [61]) Пусть* $\mu_n, n \geq 0$ *центрированные гауссовы меры на сепарабельном гильбертовом пространстве* Y *с операторами ковариации* $\mathfrak{P}_n$. *Тогда* $\mu_n \to \mu_0$ *слабо в* Y *если, и только если* $|\mathfrak{P}_\mathrm{n} - \mathfrak{P}_0|_{\mathcal{N}} \to 0, \mathrm{n} \to \infty$.

Предложение 2.2 является модификацией предложения 2.2 из [61].

Предложение 2.2. *Пусть* U, V, H *вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть* $\upsilon: H^m \to V$*-липшицево непрерывное отображение, пусть* $\eth: [s,t] \times H^m \to \mathcal{L}(U,V)$ *−измеримое отображение, такое что*

$$|\eth(r,x)|_{\mathcal{L}(\mathrm{U,V})} \leq \mathrm{C}(1 + |x|_{\mathrm{H^m}}),$$

$$|\eth(r,x) - \eth(r,\mathrm{y})|^2_{\mathcal{L}(\mathrm{U,V})} \leq \mathrm{L}\left(|x-y|^2_{\mathrm{H^m}}\right)$$

для C *постоянной и* $r \in [s,t], x, y \in H^m$. *Пусть* $g \in BL(V)$, *где* $BL(V)$ *− пространство всех ограниченных функций на* V, *удовлетворяющих условию Липшица. Положим*

$$\Upsilon(\mathrm{y}) = \mathrm{E}g\left(\upsilon(\mathrm{y}) + \int_s^t \eth(r,\mathrm{y})\, d\mathrm{W}_r\right), \qquad \mathrm{y} \in \mathrm{H^m}.$$

Пусть $u: \Omega \to H - F_s -$ *измеримая случайная величина с* $E|u|^2_H < \infty$. *Тогда*

$$\Upsilon(u) = \mathrm{E}\left[\mathrm{g}\left(\upsilon(u) + \int_s^t \eth(r,u)\, d\mathrm{W}_r\right)\middle|\, \mathrm{F_s}\right] \mathrm{P} - \text{п. н.} \tag{2.12}$$

Доказательство. Для упрощения обозначений, мы будем рассматривать случай $\upsilon \equiv 0$; легко видеть, что это не ограничивает общности.

Возьмем произвольное $\gamma > 0$, пусть$\{\mathfrak{z}_i; i \in \mathbb{N}\}$ –плотное подмножество H и борелевское разбиение $\{\mathfrak{T}(i); i \in \mathbb{N}\}$ в H определено следующим образом

$$\mathfrak{T}(1) = \{\xi \in \mathrm{H}\,;\ |\xi - \mathfrak{z}_1| < \gamma\},$$

$$\mathfrak{T}(i+1) = \{\xi \in \mathrm{H}\,;\ |\xi - \mathfrak{z}_{i+1}| < \gamma\} \setminus \bigcup_{j \le i} \mathfrak{T}(j).$$

Можно считать, что $\mathfrak{z}_i \in \mathfrak{T}(j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Определим

$$u_\gamma(\mathfrak{w}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}\big(u(\mathfrak{w})\big)\mathfrak{z}_i, \qquad \mathfrak{w} \in \Omega,$$

$$\Upsilon_\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(\xi)\mathrm{E}\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth(r, \mathfrak{z}_i)\, \mathrm{d}\mathrm{W}_r\right), \quad \xi \in \mathrm{H},$$

где $\mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(j)}$ обозначает индикаторную функцию множества $\mathfrak{T}(j)$.

Очевидно,

$$\mathrm{E}\left|u - u_\gamma\right|_{\mathrm{H}}^2 < \gamma^2$$

и

$$\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth(r, u_\gamma)\, d\mathrm{W}_r\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u)\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth(r, \mathfrak{z}_i)\, d\mathrm{W}_r\right)\mathrm{P} - \text{п.н.}$$

Поэтому

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth\big(r, u_\gamma\big)\, d\mathrm{W}_r\right)\middle|\, \mathrm{F}_{\mathrm{s}}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u)\ \mathrm{E}\left[\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth(r, \mathfrak{z}_i)\, d\mathrm{W}_r\right)\middle|\, \mathrm{F}_{\mathrm{s}}\right] = = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\mathfrak{T}(i)}(u)\ \mathrm{E}\,\mathrm{g}\left(\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}} \eth(r, \mathfrak{z}_i)\, d\mathrm{W}_r\right)$$

$$= \Upsilon_\gamma(u).$$

Кроме того,

$$\mathrm{E}\left|\mathrm{g}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, u_\gamma)\, d\mathrm{W}_r\right) - \mathrm{g}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, u)\, d\mathrm{W}_r\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BL}}^2 \mathrm{E}\left|\int\limits_{s}^{t} \left[ð(r, u_\gamma) - ð(r, u)\right] d\mathrm{W}_r\right|_V^2 \leq$$

$$\leq \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BL}}^2 \mathrm{tr(Q)} \int\limits_{s}^{t} \mathrm{E}\left|ð(r, u_\gamma) - ð(r, u)\right|_{\mathcal{L}(\mathrm{U,V})}^2 dr \leq$$

$$\leq \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BL}}^2 \mathrm{C\,tr(Q)} \int\limits_{s}^{t} \mathrm{L}\left(\mathrm{E}\left|u - u_\gamma\right|_{\mathrm{H}}^2\right) dr.$$

В силу непрерывности функции L последнее выражение стремится к нулю при $\gamma \to 0$.

Поэтому

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{g}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, u_\gamma)\, d\mathrm{W}_r\right)\middle|\, \mathrm{F}_s\right] \xrightarrow[\gamma \to 0^+]{}$$

$$\xrightarrow[\gamma \to 0^+]{} \mathrm{E}\left[\mathrm{g}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, u)\, d\mathrm{W}_r\right)\middle|\, \mathrm{F}_s\right] \text{ в } \mathcal{L}_2(\Omega).$$

Аналогично, если $\xi \in \mathrm{H}$, то существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\xi \in \mathfrak{T}(j_0)$, таким образом,

$$\left|\Upsilon_\gamma(\xi) - \Upsilon(\xi)\right|^2 = \left|\mathrm{Eg}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, \mathfrak{z}_{j_0})\, d\mathrm{W}_r\right) - \mathrm{Eg}\left(\int\limits_{s}^{t} ð(r, \xi)\, d\mathrm{W}_r\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BL}}^2 \mathrm{C\,tr(Q)} \int\limits_{s}^{t} \mathrm{L}\left(\mathrm{E}\left|\xi - \mathfrak{z}_{j_0}\right|_{\mathrm{H}}^2\right) dr.$$

Отсюда следует, что

$$\Upsilon_\gamma(\mathfrak{s}) \xrightarrow[\gamma\to 0^+]{} \Upsilon(\mathfrak{s}) \ \text{ для всех } \quad \mathfrak{s} \in \mathrm{H}.$$

Отсюда вытекает (2.12) . ■

Вернемся теперь к задаче (2.7) - (2.8). Пусть, выполнены условия теоремы 2.3.

Лемма 2.1. *Для каждого $T > 0$ существует постоянная C такая, что для любого $\alpha \in [0, \alpha_0)$ имеем*

$$\mathrm{E}\|\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{t})\|_{\mathrm{H}}^2 \le \mathrm{C}(1 + \mathrm{E}\|\varphi\|_{\mathrm{H}}^2), \qquad 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}, \tag{2.13}$$

при условии, что правая часть конечна.

Доказательство. Решение X_α удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathrm{X}_\alpha(\mathrm{t}) = e^{A\mathrm{t}}\varphi + \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})}\mathrm{a}_\alpha\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{s})\right) ds +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{t}} e^{A(\mathrm{t}-\mathrm{s})}\mathrm{b}_\alpha\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}(\mathrm{s})\right) d\mathrm{W}_\mathrm{s}$$

В силу оценки **(ii)** и неравенства (0.21) имеем

$$\mathrm{E}\|\mathrm{X}(\mathrm{t})\|^2 \le \mathrm{C}\left(\mathrm{E}\|\varphi\|^2 + \int_0^{\mathrm{t}} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\left\|\mathrm{X}\left(\mathrm{h}_\mathrm{i}(\mathrm{s})\right)\right\|^2\right) ds \right) \le$$

$$\le \mathrm{C}\left(\mathrm{E}\|\varphi\|^2 + 1 + \int_0^{\mathrm{t}} \left(\sum_{i=1}^{m} \sup_{\tau\in[0,\,\mathrm{h}_\mathrm{i}(\mathrm{s})]} \mathrm{E}\left\|\mathrm{X}\left(\mathrm{h}_\mathrm{i}(\tau)\right)\right\|^2\right) ds \right)$$

Поскольку $\mathrm{h}_\mathrm{i}(\mathrm{s}) < \mathrm{s}$, то

$$\mathrm{E}\|\mathrm{X}(\mathrm{t})\|^2 \le \mathrm{C}(1 + \mathrm{E}\|\varphi\|^2) + \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} \sum_{i=1}^{m} \sup_{0\le\tau\le\mathrm{s}} \mathrm{E}\|\mathrm{X}(\tau)\|^2\, ds.$$

Полагая $\mathrm{t} = \tau$ и замечая, что правая часть последнего неравенства монотониа по τ получаем

$$\sup_{\tau\in[0,t]} \mathrm{E}\|\mathrm{X}(\tau)\|^2 \le \mathrm{C}(1+\mathrm{E}\|\varphi\|^2) + \mathrm{C}\int_0^t \sum_{i=1}^{m} \sup_{0\le\tau\le s} \mathrm{E}\|\mathrm{X}(\tau)\|^2\, ds.$$

Обозначим $\sup_{\tau\in[0,t]} \mathrm{E}\|\mathrm{X}(\tau)\|^2$ через $\mathrm{Y(t)}$ тогда

$$\mathrm{Y(t)} \le \mathrm{C}(1+\mathrm{E}\|\varphi\|^p) + \mathrm{C}\int_0^t \mathrm{Y(s)}\,ds.$$

В силу леммы Гроноулла (см., например[16]стр. 108) имеем (2.13).■

Как видно из доказательства, константа C в (2.13) независит от $\alpha \in [0, \alpha_0)$.

Для $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, определим

$$\mathrm{g^N(X)} = \begin{cases} \mathrm{X} & \text{если } |\mathrm{X}| \le \mathrm{N} \\ \dfrac{\mathrm{N_X}}{|\mathrm{X}|_\mathrm{H}} & \text{если } |\mathrm{X}| > N \end{cases}$$

Зафиксируем $\mathrm{T} > 0$ и произвольную последовательность $\alpha_\mathrm{n} \in (0, \alpha_0), \alpha_\mathrm{n} \searrow 0$. Для краткости положим

$$\mathrm{a}_{\alpha_\mathrm{n}} = \mathrm{a_n}\ , \qquad \mathrm{b}_{\alpha_\mathrm{n}} = \mathrm{b_n}\ , \quad \mathrm{P}_{\alpha_\mathrm{n}} = \mathrm{P},$$

$$\mathrm{X_n} = \mathrm{X}_{\alpha_\mathrm{n}}(\cdot, \varphi), \quad \mathrm{X_n^N} = \mathrm{X}_{\alpha_\mathrm{n}}(\cdot, \varphi^\mathrm{N}), \quad \mathrm{X_0^N} = \mathrm{X_0}(\cdot, \varphi^\mathrm{N}).$$

Будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathrm{P}_{\alpha_\mathrm{n}}$ просто E без индекса, если это не приводит к двусмысленности.

Предложение 2.3. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ *и* $\gamma > 0$ *существует* $\varrho > 0$ *такое, что*

$$\sup_{\mathrm{n}\ge 0} \mathrm{E} \max_{\substack{0\le \mathrm{s,t}\le \mathrm{T} \\ |\mathrm{s-t}|\le\varrho}} \left|\mathrm{X_n^N(t)} - \mathrm{X_n^N(s)}\right|^2 \le \gamma.$$

Доказательство. Как выше все константы обозначаются C одной буквой C.

Выберем $p > 2$ и$\lambda \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. По теореме 0.5 имеем

$$\mathrm{E} \sup_{\substack{0\le \mathrm{s,t}\le \mathrm{T} \\ |t-\mathrm{s}|\le\varsigma}} \left| \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-r)}\, \mathrm{b_n}\left(r, \mathrm{S}_{\mathrm{h_1,\dots,h_m}} \mathrm{X_n^N}(r)\right) d\mathrm{W}_r - \right.$$

$$-\int_0^s e^{A(s-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r \Bigg|^2 \le C\varsigma^{2\lambda} \tag{2.14}$$

для любого $\varsigma > 0$.

Действительно,

$$E \sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\varsigma}} \left| \frac{\int_0^t e^{A(t-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r - \int_0^s e^{A(s-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r}{\varsigma^{\lambda}} \right|^2 \le$$

$$\le \left(E \sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\varsigma}} \left| \varsigma^{-\lambda} \left\{ \int_0^t e^{A(t-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_0^s e^{A(s-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r \right\} \right|^p \right)^{\frac{2}{p}} \le$$

$$\le \left(E \sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |t-s|\le\varsigma}} \left| |t-s|^{-\lambda} \left\{ \int_0^t e^{A(t-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_0^s e^{A(s-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r \right\} \right|^p \right)^{\frac{2}{p}} \le$$

$$\le \left(C(\lambda) \int_0^T E\left(tr\left\{ b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) Q\, b_n^*\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) \right\} \right)^{\frac{p}{2}} dr \right)^{\frac{2}{p}} \le$$

$$\le C\, tr(Q) \left(\int_0^T E\left(1 + \left|S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right|^p\right) dr \right)^{\frac{2}{p}}$$

таким образом (2.14) из следует леммы 2.1, аналогично получаем

$$\mathrm{E}\sup_{\substack{0\le s,t\le T\\ |s-t|\le\varsigma}}\left|\int_0^t e^{A(t-r)}\,a_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(r)\right)dr -\right.$$

$$\left.-\int_0^s e^{A(t-r)}\,a_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(r)\right)dr\right|^2 \le C\varsigma^{2\lambda}. \qquad (2.15)$$

Сначала мы докажем, что существует $\varrho_1 > 0$ такое, что

$$\sup_{n\ge 0}\mathrm{E}\sup_{0\le t\le 2\varrho_1}\left|X_n^N(t) - \varphi^N\right|^2 \le C\gamma \qquad (2.16)$$

(С постоянной C, не зависящей от ϱ_1, конечно). Фактически, по определению слабого решения

$$X_n^N(t) - \varphi^N = [e^{At} - I]\varphi^N + \int_0^t e^{A(t-s)}\,a_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s)\right)ds +$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}\,b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}X_n^N(s)\right)dW_s \equiv \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3.$$

Из (2.14) и (2.15) имеем

$$\sup_{n\ge 0}\mathrm{E}\sup_{0\le t\le 2\varrho_1}\{|\mathbf{J}_2|^2 + |\mathbf{J}_3|^2\} \le C\varsigma^{2\lambda} \qquad (2.17)$$

для любого $\varsigma > 0$. Поскольку случайные величины φ^N слабо сходятся, они плотны по теореме Прохорова, следовательно, существует компактное множество $\mathbf{K} \subseteq H$ такое, что

$$\sup_{n\geq 0} P\ \left\{\varphi^N \notin \mathbf{K}\right\} \leq \gamma.$$

Как хорошо известно, $e^{At}X \to X$ при $t \searrow 0$ равномерно для $X \in \mathbf{K}$, следовательно, мы можем найти $\varrho_1 \in \left(0, \gamma^{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ такое, что

$$\sup_{0\leq t\leq 2\varrho_1} \sup_{x\in\mathbf{K}} \left|e^{At}X - X\right| < \sqrt{\gamma}.$$

Тогда

$$E \sup_{0\leq t\leq 2\varrho_1} \left|e^{At}\varphi^N - \varphi^N\right|^2 \leq \gamma + E\mathfrak{x}_{\left\{\varphi^N \notin \mathbf{K}\right\}} \sup_{0\leq t\leq 2\varrho_1} \left|e^{At}\varphi^N - \varphi^N\right|^2 \leq$$

$$\leq \gamma + C\ E\mathfrak{x}_{\left\{\varphi^N \notin \mathbf{K}\right\}} \left|\varphi^N\right|^2 \leq C\ P\ \left\{\varphi^N \notin \mathbb{C}\right\} \leq C\gamma.$$

Эта оценка вместе с (2.17) дает (2.16).

Полугруппа (e^{At}) является аналитической на **(i)**, следовательно, функция $\mathcal{L}(H)$ − значных $t \mapsto e^{At}$ равномерно непрерывна на $[\varrho_1, T]$ (см. [38]).Мы можем найти $\varrho_2 \in \left(0, \gamma^{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ такое, что

$$\sup_{\substack{\varrho_1 \leq t,s\leq T \\ |s-t|\leq\varrho_2}} \left|e^{At} - e^{As}\right|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sqrt{\gamma}.(2.18)$$

Пусть $s, t \in [\varrho_2, T], t > s$, тогда

$$X_n^N(t) - X_n^N(s) = (e^{At} - e^{As})\varphi^N +$$

$$+\left\{\int_0^t e^{A(t-r)}\, a_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dr - -\int_0^s e^{A(s-r)}\, a_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dr\right\}$$

$$+\left\{\int_0^t e^{A(t-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r -\right.$$

$$\left. - \int_0^s e^{A(s-r)}\, b_n\left(r, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(r)\right) dW_r \right\} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3.$$

Очевидно,

$$\sup_{n\geq 0} E \sup_{|t-s|\leq \varrho_2} \{|\mathcal{Q}_2|^2 + |\mathcal{Q}_3|^2\} \leq C\varrho_2{}^{2\lambda} \leq C\gamma$$

в силу (2.14) и (2.15). Окончательно,

$$E \sup_{|t-s|\leq \varrho_2} \left|(e^{At} - e^{As})\varphi^N\right|^2 \leq N^2\gamma$$

В силу (2.18), мы получилм

$$\sup_{n\geq 0} E \sup_{\substack{\varrho_1 \leq s,t\leq T \\ |s-t|\leq \varrho_2}} \left|X_n^N(t) - X_n^N(s)\right|^2 \leq C\gamma. \tag{2.19}$$

Объединяя оценки (2.19) и (2.16) мы завершаем доказательство предложения 2.3.

Следствие 2.1. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ *существует такое разбиение* $\{0 = t_0 < \cdots < t_\ell = T\}$ *отрезка* $[0, T]$ *такое, что*

$$\sup_{n\geq 0} E\left(\max_{i=0,\dots,\ell-1} \max_{t_i\leq t\leq t_{i+1}} \left|X_n^N(t) - X_n^N(t_i)\right|^2\right) \leq \gamma. \tag{2.20}$$

Ниже нам потребуется дискретизация процесса X_n^N. Пусть $\Pi = \{0 = t_0 < \cdots < t\ell$=T – разбиение отрезка *[0,* T*]*. Определим

$$X_n^{\Pi}(t) = e^{At}\varphi^N + \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i \wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} e^{A(t-s)} a_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^{\Pi}(t_i)\right) ds +$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i \wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} e^{A(t-s)} b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^{\Pi}(t_i)\right) dW_s \tag{2.21}$$

для любого $t \in [0, T]$ и $n \geq 0$. Напомним, $a \wedge b = \min(a, b)$.(Заметим, что процесс X_n^{Π} зависит от N).

Лемма 2.2. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ *существует такое разбиение* $\Pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_\ell = T\}$ *отрезка* $[0, T]$, *что*

$$\sup_{n\geq 0} \max_{i=0,\dots,\ell} E\left|X_n^N(t_i) - X_n^{\Pi}(t_i)\right|^2 \leq \gamma.$$

Доказательство. По некоторому $\gamma > 0$ найдем разбиение $\Pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_\ell = T$ такое, что выполнено (2.20). В силу (2.21), получим

$$E\left|X_n^{\Pi}(t_{j+1}) - X_n^N(t_{j+1})\right|^2 \leq C \int_0^{t_{j+1}} \left|e^{A(t_{j+1}-s)}\right|_{\mathcal{L}(H)}^2 \times$$

$$\times E\left|\sum_{i=0}^{j} \mathfrak{X}_{[t_{i,}t_i+1)}(s)\left\{a_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^{\Pi}(t_i)\right) - a_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(s)\right)\right\}\right|^2 ds +$$

$$+2\,\mathrm{tr}(Q) \int_0^{t_{j+1}} \left|e^{A(t_{j+1}-s)}\right|_{\mathcal{L}(H)}^2 \times$$

$$\times E\left|\sum_{i=0}^{j} \mathfrak{X}_{[t_{i,}t_i+1)}(s)\left\{b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^{\Pi}(t_i)\right) - b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m} X_n^N(s)\right)\right\}\right|^2 ds \leq$$

$$\le C\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}} L\left(E\left|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i)-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{N}(s)\right|^2\right)ds+$$

$$+C\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}} L\left(E\left|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{N}(t_i)-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{N}(s)\right|^2\right)ds\le$$

$$\le C_\gamma+C\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}} L\left(E\left|S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_i)-S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{N}(t_i)\right|^2\right)ds,$$

где $C_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$.

Таким образом, полагая

$f_n(t)=E\left|X_n^{\Pi}(t_i)-X_n^{N}(t_i)\right|^2$,при $t\in[t_i\,,t_{i+1}]$, $i=0,\dots,\ell-1$,

получаем следующую оценку

$$f_n(t)\le C_\gamma+\int_0^t L\big(f_n(s)\big)ds,$$

где $C_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$. Применяя теорему о непрерывной зависимости от начальных данных для интегрального уравнения

$$y(t)=C_\gamma+\int_0^t L\left(S_{h_1,\dots,h_m}y(s)\right)ds$$

(см., [61]) получим требуемое утверждение. ■

Предложение 2.4. *Пусть* $N\in\mathbb{N}$ *и* $\Pi=\{0=t_0<\cdots<t_\ell=T\}-$ *некоторое разбиение и* ν_n, $n\ge 0$ *борелевские вероятности на* $H^{\ell+1}$, *определяемые равенством*

$$\nu_n=\left(X_n^{\Pi}(t_0),\dots,X_n^{\Pi}(t_\ell)\right)(P),$$

то есть

$$\nu_n(\mathfrak{Q})=P\left\{\omega;\ \left(X_n^{\Pi}(t_0),\dots,X_n^{\Pi}(t_\ell)\right)\in\mathcal{D}\right\}$$

для любого борелевского множества $\mathcal{D}$ *в* $H^{\ell+1}$. *Тогда* $\nu_n \to \nu_0$ *слабо в* $H^{\ell+1}$ *при* $\mathrm{n} \to \infty$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции. По предположениям теоремы 2.3, имеем $\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_0) \to \mathrm{X}_0^\Pi(\mathrm{t}_0)$ слабо в H. Предположим, что для некоторого ι, $0 \leq \iota \leq \ell - 1$, слабая сходимость

$$\mu_\mathrm{n} \equiv u_\mathrm{n}(\mathrm{P}) \to \mu_0 \equiv u_0(\mathrm{P}) \text{в } \mathrm{H}^{\iota+1} \tag{2.22}$$

установлена, где

$$u_\mathrm{n} = \left(\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_0), \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_\iota)\right).$$

Зададим $\upsilon_n \colon \mathrm{H}^{\iota+1} \to \mathrm{H}^{\iota+2}$, следующим образом.

По набору $(\xi_0, \dots, \xi_\iota)$ определим на отрезке $[0, \mathrm{t}_{\iota+1}]$ функцию $\overline{\xi_\iota}(\mathrm{s}) = \xi_i$ при $\mathrm{s} \in [\mathrm{t_i}, \mathrm{t_{i+1}}]$. Тогда

$$\upsilon_n(\xi_0, \dots, \xi_\iota) = \left(\xi_0, \dots, \xi_\iota, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(\mathrm{t}_{\iota+1}-\mathrm{t}_\iota)}\xi_\iota + \int_{\mathrm{t}_\iota}^{\mathrm{t}_{\iota+1}} \mathrm{e}^{A(\mathrm{t}_{i+1}-\mathrm{s})}\, \mathrm{a_n}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\overline{\xi_\iota}(\mathrm{s})\right) ds\right),$$

и

$$\beta_n \colon \mathrm{H}^{\iota+1} \to \mathrm{L}^1(\Omega^\mathrm{n}, \mathrm{H}^{\iota+2}),$$

$$\beta_n(\xi_0, \dots, \xi_\iota) = \left(0, \dots, 0, \int_{\mathrm{t}_\iota}^{\mathrm{t}_{\iota+1}} \mathrm{e}^{A(\mathrm{t}_{\iota+1}-\mathrm{s})}\, \mathrm{b_n}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\overline{\xi_\iota}(\mathrm{s})\right) d\mathrm{W_s}\right).$$

Очевидно,

$$\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_{\iota+1}) = \mathrm{e}^{A(\mathrm{t}_{\iota+1}-\mathrm{t}_\iota)}\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_\iota) + \int_{\mathrm{t}_\iota}^{\mathrm{t}_{\iota+1}} \mathrm{e}^{A(\mathrm{t}_{\iota+1}-\mathrm{s})}\, \mathrm{a_n}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_\iota)\right) ds +$$

$$+ \int_{\mathrm{t}_\iota}^{\mathrm{t}_{\iota+1}} \mathrm{e}^{A(\mathrm{t}_{\iota+1}-\mathrm{s})}\, \mathrm{b_n}\left(\mathrm{s}, \mathrm{S}_{\mathrm{h}_1,\dots,\mathrm{h}_m}\mathrm{X}_\mathrm{n}^\Pi(\mathrm{t}_\iota)\right) d\mathrm{W_s},$$

таким образом

$$\left(S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_0),\dots,S_{h_1,\dots,h_m}X_n^{\Pi}(t_{\iota+1})\right)=\upsilon_n(u_n)+\beta_n(u_n).$$

Возьмем произвольное $g\in BL(H^{\iota+2})$, где $BL(H^{\iota+2})-$ пространство всех ограниченных функций удовлетворяющих условию Липшица на $H^{\iota+2}$ (см. [38]) и положим

$\hbar_n(y)=E\,g(\upsilon_n(y)+\beta_n(y))\,,\ \ y\in H^{\iota+1}$.

Предложение 2.2 дает

$$E\,g\left(X_n^{\Pi}(t_0),\dots,X_n^{\Pi}(t_{\iota+1})\right)=E\hbar_n(u_n)=\int\limits_{H^{\iota+1}}\hbar_n(\xi)d\mu_n(\xi).$$

Из этого следует,

$$\left|E\,g\left(X_n^{\Pi}(t_0),\dots,X_n^{\Pi}(t_{\iota+1})\right)-E\,g\left(X_0^{\Pi}(t_0),\dots,X_0^{\Pi}(t_{\iota+1})\right)\right|\le$$

$$\le\int\limits_{H^{\iota+1}}|\hbar_n(\xi)-\hbar_0(\xi)|d\mu_n(\xi)\ +\left|\int\limits_{H^{\iota+1}}\hbar_0(\xi)d\mu_n(\xi)-\int\limits_{H^{\iota+1}}\hbar_0(\xi)d\mu_0(\xi)\right|\equiv$$

$$\equiv\mathfrak{M}_1(n)+\mathfrak{M}_2(n).$$

Заметим, что

$$|\hbar_n(\xi)-\hbar_n(\varsigma)|^2\le\|g\|_{BL}E|\upsilon_n(\xi)-\upsilon_n(\varsigma)+\beta_n(\xi)-\beta_n(\varsigma)|^2_{H^{\iota+2}}\le$$

$$\le CL\left(|\xi-\varsigma|^2_{H^{\iota+1}}\right)$$

для любых $\xi,\varsigma\in H^{\iota+1}$, по iii). Таким образом, $\mathfrak{M}_2(n)\to0$ как $n\to\infty$ по (2.22). Теперь заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\hbar_n(\xi)=\hbar_0(\xi)\qquad\text{для любых }\ \xi\in H^{\iota+1}.\tag{2.23}$$

Во-первых,

$$\upsilon_n(\xi)-\upsilon_0(\xi)=(0,\dots,0,\int\limits_{t_\iota}^{t_{\iota+1}}e^{A(t_{\iota+1}-s)}\left[a_n\left(s,S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right)-\right.$$

$$\left.-a_0\left(s,S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right)\right]ds)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad\text{в}\quad H^{\iota+1}$$

$$\upsilon_n(\xi) - \upsilon_0(\xi) =$$

$$= \left(0, \dots, 0, \int_{t_\iota}^{t_{\iota+1}} e^{A(t_{\iota+1}-s)}\left[a_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right) - a_0\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right)\right] ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{в} \quad H^{\iota+1},$$

по (2.10). Далее,

$$\int_{t_\iota}^{t_{\iota+1}} e^{A(t_{\iota+1}-s)} b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right) dW_s,$$

является центрированной гауссовской случайной величиной в H с оператором ковариации

$$\int_{t_\iota}^{t_{i+1}} e^{A(t_{\iota+1}-s)} b_n\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right) Q b_n^*\left(s, S_{h_1,\dots,h_m}\overline{\xi_\iota}(s)\right) e^{A^*(t_{\iota+1}-s)} ds,$$

Таким образом $\beta_n(\xi) \to \beta(\xi)$ слабо в $H^{\iota+2}$в силу (2.7) и предложения 2.1. Следовательно, $\upsilon_n(\xi)+\beta_n(\xi) \to \upsilon_0(\xi) + \beta_0(\xi)$ слабо в $H^{\iota+2}$ для любых $\xi \in H^{\iota+1}$. Из определения $\hbar_n$ и слабой сходимости получаем (2.23).

Пусть дано произвольное $\delta > 0$, тогда существует компактное множество $K \subseteq H^{\iota+1}$ такое, что

$$\inf_{n\geq 0} \mu_n(K) \geq 1 - \delta. \tag{2.24}$$

Поскольку меры $\{\mu_n\}$ слабо сходятся, то в силу компактности K, (2.16) функции $\hbar_n$ сходятся к $\hbar_0$ равномерно на K, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |\hbar_n(\xi) - \hbar_0(\xi)| d\mu_n(\xi) = 0.$$

Наконец, из (2.24), и $\mathfrak{M}_1(n) \to 0$, а также предложения 2.4 имеем.

$$\int_{H^{\iota+1}/K} |\hbar_n(\xi) - \hbar_0(\xi)| d\mu_n(\xi) \leq \sup_{n\geq 0} \sup_{H^{\iota+1}} |\hbar_n|^\delta \blacksquare$$

Следствие 2.2. *Пусть заданы* $N \in \mathbb{N}$ *и разбиение* $\Lambda = \{0 = s_0 < \cdots < s_q = T\}$ *отрезка* $[0, T]$. *Тогда* $\left(X_n^N(s_0), \dots, X_n^N(s_q)\right)(P) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(X_0^N(s_0), \dots, X_0^N(s_q)\right)(P)$ слабо в H^{q+1}.

То есть X_n^N сходятся к X_0^N в смысле конечномерных распределений.

Доказательство теоремы 2.3. Возьмем произвольное $\gamma \geq 0$. Заметим, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{n\geq 0} P\left\{w;\ \sup_{0\leq t\leq T}\left|X_n(t) - X_n^N(t)\right| > 0\right\} \leq \gamma. \quad (2.25)$$

В силу [58] и непрерывности траекторий, имеем

$$P\left(\{\varphi_0 \in \mathbf{B}(0, N)\} \cap \left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_n(t) - X_n^N(t)\right| > 0\right\}\right) = 0,$$

поэтому, справедливо (2.25). Используя следствие 2.2, мы находим разбиение $\{0 = t_0 < \cdots < t_\ell = T\}$ отрезка $[0, T]$ такое, что

$$\sup_{n\geq 0} E\left(\max_{i=0,\dots,\ell-1}\ \sup_{t_i\leq t\leq t_{i+1}}\left|X_n^N(t) - X_n^N(t_i)\right|\right)^2 \leq \gamma^2. \quad (2.26)$$

Пусть $f \in BL(\mathcal{C}([0, T], H))$- ограниченная функция, удовлетворяющяя условию Липшица. Обозначим через $\mathbb{P}$ пространство всех функций $\Psi: [0, T] \to H$, которые непрерывны справа и имеют пределы слева на $[0, T]$ и непрерывны на $(0, T)\setminus\{t_1, \dots, t_{\ell-1}\}$; наделим $\mathbb{P}$ нормой супремума. Тогда существует Липшицева функция $f^\natural \in BL(\mathbb{P})$ такая что, $f^\natural = f$ на $\mathcal{C}([0, T], H)$ и $\|f^\natural\|_{BL} = \|f\|_{BL}$ (см. [38], теорема 6.1.1 и предложение 11.2.2). Определим

$$f^\natural: H^{\ell+1} \to \mathbb{R}, \qquad y = (y_0, \dots, y_\ell) \mapsto f^\natural(\tilde{y}),$$

где $\tilde{y} \in \mathbb{P}$ определяется по $\tilde{y}(t) = y_i,\ t_i \leq t < t_{i+1}$ тогда $f^\natural \in BL(H^{\ell+1})$ и $\|f^\natural\|_{BL} \leq \|f\|_{BL}$.

Далее, положим $\widetilde{X}_n(t) = X_n^N(t_i), t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0, \dots, \ell - 1$; очевидно, $\widetilde{X}_n$ - стохастический процесс с путями в $\mathbb{P}$. Следовательно,

$$\left|E(f(X_n)) - E(f(X_0))\right| \le E\left|\left(f(X_n)\right) - \left(f(X_n^N)\right)\right| +$$

$$+ E\left|\left(f(X_n^N)\right) - \left(f^\natural(\tilde{X}_n)\right)\right| + \left|E\left(f^\natural(\widetilde{X}_n)\right) - E\left(f^\natural(\widetilde{X}_0)\right)\right| +$$

$$+E\left|\left(f^\natural(\widetilde{X}_0)\right) - \left(f(X_0^N)\right)\right| + E\left|\left(f(X_0^N)\right) - \left(f(X_0)\right)\right| \equiv$$

$$\equiv \mathbf{z}_1(n) + \mathbf{z}_2(n) + \mathbf{z}_3(n) + \mathbf{z}_2(0) + \mathbf{z}_1(0).$$

Полагая $\mathcal{V}(n) = \left\{\sup_{0 \le t \le T}\left|X_n(t) - X_n^N(t)\right| > 0\right\}$, получаем

$$\mathbf{z}_1(n) = E\,\mathfrak{X}_{\mathcal{V}(n)}\left|\left(f(X_n)\right) - \left(f(X_n^N)\right)\right| \le$$

$$\le \|f\|_{BL} P_n(\mathcal{V}(n)) \le \|f\|_{BL}\gamma$$

для любого $n \ge 0$ по (2.18). Кроме того,

$$\mathbf{z}_2(n) = E\left|\left(f^\natural(X_n^N)\right) - \left(f^\natural(\widetilde{X}_n)\right)\right| \le$$

$$\le \left\|f^\natural\right\|_{BL} E \sup_{0 \le t \le T}\left|\left(X_n^N(t)\right) - \left(\widetilde{X}_n(t)\right)\right| \le \|f\|_{BL}\gamma$$

для всех $n \ge 0$ по (2.26) .

Окончательно

$$\mathbf{z}_3(n) = \left|E\left(f^\natural(X_n^N(t_0), \dots, X_n^N(t_\ell)\right) - E\left(f^\natural(X_0^N(t_0), \dots, X_0^N(t_\ell)\right)\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

поэтому учитывая произвольность $\gamma > 0$ и $f \in BL(\mathcal{C}([0, T], H))$ мы установили, что

$$\left|E(f(X_n)) - E(f(X_0))\right| \le (\|f\|_{BL} + 1)\gamma$$

для всех достаточно больших n. То есть

$$X_{\alpha_n}(\cdot, \varphi) \to X_0(\cdot, \varphi) \text{слабо в} \mathcal{C}([0, T], H) \tag{2.27}$$

для любой последовательности $\alpha_n \searrow 0$.

В силу метризуемости слабой сходимости, (2.27) равносильно утверждению теоремы 2.3. ■

Список литературы

[1] Азарина С.В. Механические системы со случайными возмущениями на нелинейных конфигурационных пространствах/ Азарина С.В., Гликлих Ю.Е., Обуховский А.В.// Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика.- 2008. - No 1. - С. 206-221.

[2] Алиев Р.Г. О разрешимости начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом с неограниченными операторными коэффициентами/ Алиев Р.Г.// Изв. вузов. Матем.- 1994.- № 10.- С. 3–11.

[3] Алиев Р.Г. Существование, единственность и асимптотическое поведение решений уравнения с линейным отклонением аргумента в гильбертовом пространстве/ Алиев Р.Г.// Изв. вузов. Матем.- 1981.- № 12.- С. 4–7.

[4] Алиев Р.Г. О разрешимости уравнения с периодическими коэффициентами и отклонениями аргумента в гильбертовом пространстве/ Алиев Р.Г.// Изв. вузов. Матем.- 1984, № 5.- С. 3–8.

[5] Аль Зухаири Х. К. Об интегральном операторе для дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве со случайнми возмущенниями и запаздыванием/ Аль Зухаири Х. К. // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весен. Мат. Шк. " Понтрягинские чтения XXIII"(дополнительный выпуск). — Воронеж, 2012. —С.14-15.

[6] Аль Зухаири Х. К. О тереме существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Аль Зухаири Х. К. // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весен. Мат. Шк. " Понтрягинские чтения XXIV". — Воронеж, 2013. —С.208-210.

[7] Аль Зухаири Х. К. К теореме о непрерывной зависимости решений в принципе усреднения для дифференциальных уравнений со случайными возмущениями/ Аль Зухаири Х. К. // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весен. Мат. Шк. " Понтрягинские чтения XXV"(дополнительный выпуск). — Воронеж, 2014. —С.5-6.

[8] Аль Зухаири Х.К. О стохастических дифференциальных уравнениях с запаздыванием в бесконечномерном гильбертовом пространстве/Аль Зухаири Х. К. // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. – 2014. – №3, – С. 190–199.

[9] Аль Зухаири Х. К. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Аль Зухаири Х. К. // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. – 2014. – №3, – С. 182–189.

[10] Аль Зухаири Х. К. О слабой сходимости решений в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве/ Аль Зухаири Х. К. // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. – 2015. – №1, – С. 160–170.

[11] Ахмеров Р.Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Ахмеров Р.Р. и др. - Новосибирск:Наука.- 1986.- 266 с.

[12] Белопольская Я.И. Уравнения Итои дифференциальная геометрия / Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л. // УМН.- 1982.- том 37.-выпуск 3(225).- С. 95–142.
[13] Беллман Р. Дифференциально–разностные уравнения/ Беллман Р., Кук К.- М.: Мир.- 1967.- С. 548с.

[14] Бутов А.А Элементы стохастического исчисления / Бутов А.А.- Методическое пособие.- УлГУ.-1996.-24С.

[15] Гольденштейн Л.С. Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи их q-нормой / Гольденштейн Л.С. , Гохберг И.Ц. , Маркус А.С. // Учен. Зап. Кишиневск. Ун-тв. Сер. Физ. Матем. Наук.-1957.- Т.29.-С. 29-36.

[16] Демидович Б.П.Лекции по математической теории устойчивости/ Демидович Б.П.- Физико-математической литературы.-Москва.-1967.- 471с.

[17] Данфорд Н.Линейные операторы/ Данфорд Н. , Шварц Дж.Т.- Том 1.- Общая теория.- М. ИЛ.- 1962.- 896с.

[18] Зверкин А. М. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом/ Зверкин А. М., Каменский Г. А. , Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э. // *УМН*.- 17:2(104).-1962.- С. 77–164 .

[19]Каменский М.И. К теореме Пеано в бесконечномерных пространствах/Каменский М.И.// Матем. Заметки.- 1972, т. 11, №. 5, С. 569–576.

[20] Каменский М.И. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / Каменский М.И., Макаренков О. Ю., Нистри П. // Доклады Академии наук. - 2003. - Т. 388.- С. 439-442.

[21] Каменский М.И. О бифуркации периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием / Каменский М.И., Макаренков О. Ю., Нистри П. // Автоматика и телемеханика. - 2008. - №. 12. - С. 41-46 .

[22] Красносельский М. А. Односторонняя оценки, в условиях существования решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах / Красносельский М.А. , Кибенко А. В. , Мамедов Я. Д .// Азербайджанский государственный Университет. Ученые Зап. Сер. Физ. – Мат. и Хим. Науки. - 1961.- №.3.-С. 13–19.

[23] Красносельский М. А. О принципе усреднения в нелинейной механике/ Красносельский М. А. , Крейн С. Г. // УМН.- 1955.- 10:3(65).- С. 147–152.

[24] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом/ Мышкис А.Д. .- Наука.- 1972.-352с.

[25] Попов В. А. Теория вероятностей. Часть 2. Случайные величины: Учебное пособие / Попов В. А. — Казань: Казанский университет, 2013. — 45 с.

[26] Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей /Прохоров Ю. В. // Теория вероятностей и её применение. - 1956. - т.1.-в. 2.- С. 176-238.

[27] Родкина А.Е. О дифференцировании оператора сдвига по траекториям уравнения нейтрального типа/ Родкина А.Е., Садовский Б.Н. // Труды матем. факультета ВГУ.- вып.12. – Воронеж. – 1974. – С. 31-37.

[28] Родкина А.Е. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом/Родкина А.Е. // Тезисы докл. XXI школы-коллоквиума по теории вероятностей и. матем. стат. Бакуриани. Тбилиси: Иищшёреба .- 1987.- С40.

[29] Родкина А.Е.О принципе усреднения для стохастических функционально-дифференциальных уравнений/ Родкина А.Е.// Дифференциальные уравнения. - 1988.-XXIV.- С.1543-1551.

[30] Родкина А.Е. О принципе усреднения для систем стохастических уравнений с быстрым и медленным временем/ Родкина А.Е.// Функциональнодифферендаальные уравнения. -Сб.- научних трудов.- Пермь: Из-во Пермского политехи.-ин-та. -1989.- С.84- 91.

[31] Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы / Садовский Б.Н.// УМН.-1972.-Т.27.- №. 1.-С.81-146.

[32] Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов / Скороход А. В. – Киев, издательство киевского госуниверситета. - 1961. – 216 с.

[33] Скороход, А. В.Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / Скороход А. В. – Киев : Наук. думка, 1987 . – 325 с.

[34] Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболичес ких и эллиптических дифференциальных уравнений и процессов с малой диффузией / Хасьминский Р. З. // Теория вероятностей и ее приложения. - 1963. - № 8. - С. 3–25.

[35] Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито / Хасьминский Р. З. // Кибернетика. - 1968. - № 4. - С. 260–279.

[36] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом/ Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.- М.: Наука.-1971.-296с.

[37] Da Prato G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / Da Prato G., Zabczyk J.- Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.- 1992. - № 44: Cambridge University Press.- 454 p.

[38] Dudley R. M. Real analysis and probability / Dudley R.M. — Wadsworth & Brook – Cole,Pacific Grove, 1989. — 380 p.

[39] Fleming W. H. Distributed parameter stochastic systems in population biology/ Fleming W. H. , Bensoussan A. , Lions J.L.// Lecture Notes in Economy and Mathematical Systems.- 1975.- № 7.- p. 179-199.

[40] Frisch U. Wave propagation in random media / Frisch U., Bharucha-Reid A.T.// Probabilistic Methods in Applied Mathematics.- Academic Press, San Diego.- 1968.- p. 75–198.

[41] Fujisaki M. Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem/ Fujisaki, M., Kallianpur, G. and Kunita, H.// Osaka J. Math.-1972.- Vol.9.- № 16.- p. 19-40.

[42] Henrik Madsen Ito integral/ Henrik Madsen.-2006.- p.44.

[43] Jakubowski A. Existence de solutions d'inclusions d'evolution stochastiques/ Jakubowski A., Kamenskii M. I.Raynaud de Fitte P. //Acad. Sci. Paris.- Ser. I 340.- 2005.- P.229-234.

[44] Jakubowski A. Existence of weak solutions to stochastic evolution inclusions/ Jakubowski A., Kamenskii M. I. Raynaud de Fitte P. // Stochastic Analysis and Applications .- Vo. 23.- №. 4.- 2005.- P.723-749.

[45] Kamenskii M. I. Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients/ Kamenskii M. I., Omar M., Raynaud de Fitte P. // J.M.A.A.-Vo. 427.-Issue 1.-2015.- P. 336–364.

[46] Lakshmikantham V. Differential and Integral Inequalities. I./Lakshmikantham V.- Academic Press.- New York.- 1969.-319p.

[47] Lakshmikantham V. Differential and Integral Inequalities. II./Lakshmikantham V.- Academic Press.- New York.- 1969.- 390p.

[48] Lakshmikantham V.Differential Equations in Abstract Spaces/Lakshmikantham V.-Academic Press.- New York.- 1972.-218p.

[49] Luca Lorenzi Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion Problems / Luca Lorenzi, Alessandra Lunardi, Giorgio Metafune, Diego Pallara// Internet Seminar 2004–2005 .- 127p.

[50] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications/ Mao X. – Dep. of Statistics and Modelling Science.- University of Strathclyde.- Glasgow.-1997.- 220p.

[51] Mohammed, S. E. A. Stochastic functional differential equations/Mohammed, S. E. A.- Research Notes in Mathematics.- 99. Pitman (Advanced Publishing Program).- Boston.- Mass.-London.- 1984. -245 p.

[52] Nicolas G. Strongly continuous semigroups Theory and applications / Nicolas G.- 2011.- 20p.

[53] Petryshyn W. V. Note on the structure of fixed point sets of 1-set-contractions/Petryshyn W. V.// Proc. Amer. Math. Soc.- 1972.-Vo. 31 - №. 1.- P.-C. 189-194.

[54] Rodkina A. E. On existence and uniqueness of solution of stochastic differential equations with heredity / Rodkina A. E.// Stochastics. — 1984. — № 12. — P. 187–200.

[55] Rozovsky B.L. Stochastic evolution equations/Rozovsky B.L.- Linear theory and applications to non-linear filtering .-1990.-315p.

[56] Onno van Gaans Probability measures on metric spaces/ Onno van Gaans/ Notes of the seminar "Stochastic Evolution Equations".-2003.- 29p.

[57] Seidler J. An averaging principle for stochastic evolution equations. I./ Seidler J. , VrkočI.// Časopis pro pěstování matematiky.- 1990.- Vol. № 3.- C. 240—263.

[58] Seidler J. Maximal inequality revisited I / J. Seidler, G. Da Prato, J. Zabczyk // Math. Bohem. — 1993. — № 118. — P. 67–106.

[59] Sheree L. Levarge semigroups of linear operators/ Sheree L. Levarge .-2003.- 17p.

[60] Szufla S. Some remarks on ordinary differential equations in Banach spaces/Szufla S.// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. -1968.-Vo.16 - №. 1.- P 795-800.

[61] VrkočI. Extension of the averaging method to stochastic equations/VrkočI. // Czechoslovak Mathematical Journal.-1966.- Vol. 16 .- №. 4, p.518—544.

[62] Vrkoč I. Weak averaging of stochastic evolution equations/ Vrkoč I. // Mathematica Bohemica .- 1995 .- №. 1.- P. 91-111.