استخدام المحاكاة للمقارنة بين طريقتي
((Box & Jenkins)) و((Ansely)) للتنبؤ
في نماذج ARMA(p,q)
للرتب الدنيا

رسالة مقدمة إلى
مجلس كلية التربية – الجامعة المستنصرية
وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات

من الطالبة
إسراء عامر فليح آل مبارك الحمداني

بإشراف

الدكتور	الدكتور
إياد عبد الكريم عباس	أكرم محمد العبود

ذي الحجة ١٤٢٦ | كانون الثاني ٢٠٠٦

بِسْـمِ اللهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

((وَاللهُ أَ َخْرَجَكُمْ ِمنْ بُطُون ِ أُمَّهَاتِكُمْ لاَ تَعْلَمُونَ شَيْئا

وَجَعَلَ لَكُمُ السَّمْعَ وَالاَ بْصَارَ وَالاَفْئِدَةَ لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُون))

صدق الله العظيم

((النحل / الآية /٧٨))

توصيــة الأستاذ المشــرف

نشهدُ إن إعداد هذه الرسالة قد جرى تحت إشرافنا في قسم الرياضيات –كلية التربية – الجامعة المستنصرية وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات

التوقيع :
المشرف : إياد عبد الكريم عباس العبود
التاريخ : / / ٢٠٠٦

التوقيع :
المشرف : أكرم محمد
التاريخ : / / ٢٠٠٦

توصية رئيس قسم الرياضيات

بناء على التوصيات المتوافرة ارشح هذه الرسالة إلى لجنة المناقشة لدراستها وبيان الرأي فيها .

التوقيـع :
الاسـم : د . نادر جورج منصور
رئيس قسم الرياضيات –كلية التربية

إقرار لجنة المناقشة

نحن أعضاء لجنة المناقشة الموقعين أدناه نشهد بأننا اطلعنا على هذه الرسالة المقدمة من قبل

الطالبة ((**إسراء عامر فليح الحمداني**))الموسومة ((**استخدام المحاكاة للمقارنة بين طريقتي Box & Jenkins و Ansely للتنبؤ في نماذج ARMA(p,q) للرتب الدنيا**)) وقد ناقشنا الطالبة في محتوياتها وفيما له علاقة بها ونعتقد بأنها جديرة بالقبول بتقدير (جيد حيداً) لنيل درجة ماجستير علوم في الرياضيات .

رئيس اللجنة

التوقيع :

الاسم : د. عبد المجيد حمزة ناصر

المرتبة العلمية : أستاذ

التاريخ : / / ٢٠٠٦

عضو الجنة

التوقيع :

الاسم : د. ضوية سلمان حسن

المرتبة العلمية : أستاذ

التاريخ : / / ٢٠٠٦

عضو اللجنة

التوقيع :

الاسم : د. ندى صباح كرم

المرتبة العلمية : مدرس

التاريخ : / / ٢٠٠٦

عضو اللجنة(المشرف)

التوقيع :

الاسم : د. إياد عبد الكريم عباس

المرتبة العلمية : مدرس

التاريخ : / / ٢٠٠٦

عضو اللجنة(المشرف)

التوقيع :

الاسم : أكرم محمد العبود

المرتبة العلمية : أستاذ مساعد

التاريخ **:** / / ٢٠٠٦

مصادقة عميد كلية التربية

أصادق على ما جاء في قرار اللجنة أعلاه

التوقيع :

الاسم : أ.م.د رشدي علي الجاف

عميد كلية التربية/الجامعة المستنصرية

التاريخ : / / ٢٠٠٦

الإهـداء

إلى النور الذي أنار طريقي ...

إلى البحر الذي سقاني من فيض علمه ...

والدي العزيز ... فخراً و اعتزازاً

إلى الشمس التي أحاطتني بدفئها ...

إلى القلب الذي غمرني بحبها ...

والدتي العزيزة ...حناناً و إكراماً

إلى سندي وعزوتي ...

إشراقــة الصباح ...

اخوتي الأعزاء ...تقديراً و وفاءاً

إلي ابتسامة الحياة ...

عطـر الورود ...

أخواتي العزيزات ...محبة و إخلاصاً

إلى كل من يسعده نجاحي ...

أهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا

إسراء

شكر وتقدير

بعد الشكر والامتنان إلى الله العلي القدير ، يطيب لي أن أتقدم بخالص شكري وتقديري إلى الأستاذين المشرفين كل من الدكتور إياد عبد الكريم والأستاذ الدكتور أكرم محمد العبود الذين تابعا قواعد هذا البحث بتوجيهاتهم العلمية السديدة بكل أمانة واخلاص عريقين بالشكل الذي ساعدني على إتمام الرسالة كما هي عليه الان .

شكري وتقديري إلى السادة أعضاء لجنة المناقشة الأستاذ الدكتور عبد المجيد حمزة ناصر والأستاذة الدكتورة ضوية سلمان حسن والدكتورة ندى صباح كرم لقبولهم مناقشة رسالتي في محتوياتها .

كما أتقدم بالشكر الجزيل الدكتور نادر جورج منصور رئيس قسم الرياضيات والى جميع أساتذة ومنتسبي القسم لما أبدوه من تسهيلات ومساعدات خلال فترة البحث .

شكري وتقديري إلى كافة طلبة الدراسات العليا قسم الرياضيات لما أبدوه من مساعدة خلال فترة الدراسة.

من الوفاء اقدم شكري وتقديري إلى والدي العزيز ووالدتي العزيزة واخوتي وأخواتي الأعزاء .

واخيراً أتقدم بالشكر والتقدير إلى كل من مد يد العون والمساعدة خلال فترة الدراسة . والله ولي التوفيق

إسراء عامر الحمداني

فهـــرس المحتويـــــات

قائمة المصطلحات والرموز

Z_t	السلسلة الزمنية
t :origin Time	الفترة الزمنية الأساسية
a_t	الخطأ العشوائي
σ_a^2	تباين الخطأ
γ_s : Auto covariance Function	دالة التباين المشترك الذاتي
Γ_n :Auto covariance Matrix	مصفوفة التباين المشترك الذاتي
$\gamma_{az}(s)$: Cross Covariance	التباين المشترك
ρ_s: Autocorrelation Function	دالة الارتباط الذاتي
$Ø_{ss}$: Partial Autocorrelation Function	دالة الارتباط الذاتي الجزئي
AR(p) :Autoregressive Model	أنموذج الانحدار الذاتي
MA(q:(Moving Average Model	أنموذج الوسط المتحرك

ARMA(p,q):Autoregressive-Moving Average Model	أنموذج(الانحدار الذاتي-الوسط المتحرك) المختلط
B : Back Shift Operater	عامل الارتداد الخلفي
$\emptyset_{1}$ ، $\emptyset_{2}$ ،.., ..., $\emptyset_{p}$	معلمات أ نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة p
θ_{1} , θ_{2} , ..., θ_{q}	معلمات أ نموذج الوسط المتحرك من الرتبة q
E :Conditional Expectation	التوقع الشرطي
Var : variance	التباين
L:Lead Time	الفترة المتنبأ بها
$\hat{Z}_t(L)$	التنبؤ عند الفترة L
$e_t(L)$: Forecast Error	خطأ التنبؤ
MSEF: Mean Square Error Forecasting	متوسط مربعات خطأ التنبؤ

المستخلص Abstract

في هذه الرسالة تمت دراسة مقارنة بين طريقتين وهما طريقة ((Box & Jenkins))وطريقة ((Ansely)) للتنبؤ لنماذج السلاسل الزمنية باستخدام المحاكاة العشوائية .

اعتبر نموذج ARMA(p,q)، p,q=١,٢ حيث كان التوزيع الأساسي هو التوزيع الطبيعي . تمت الصياغة الرياضية لاربع حالات من نموذج (ARMA(p,q ، p,q=١,٢ حيث تم اشتقاق التباين المشترك الذاتي ، الارتباط الذاتي ، خطأ التنبؤ لكل حالة ثم استخرج التوقع والتباين ومتوسط مربعات الخطأ لخطأ التنبؤ . هذه المقاييس نفذت عملياً باستخدام طرائق محاكاة مونت كارلو حيث تم إجراء أربعة تجارب لكل حالة وبتكرار ٥٠٠ .

الفصـــــل الأول

❖ المقدمـة

❖ هـدف البحـث

❖ الخلفيــة التاريخيــة

١ – المقدمة

تُعدُّ السلاسل الزمنية من اكثر الطرق الاحصائية استخداماً في المجالات التي يراد تحليل ظواهرها لمدة معينة من الزمن، وان انحدار السلاسل الزمنية وايجاد العلاقة بينها له أثرٌ كبير في توضيح وتشخيص المعلمات والمؤشرات في النماذج ، وقد اعتمدت دراسة السلاسل الزمنية في السنوات المبكرة من القرن العشرين علىأُنموذج الانحدار الذاتي الذي درسه ((Yule ١٩٢٧)) إذ استخدم تحليل الانحدار لتقدير قيم السلسلة في الزمن المعطى لدالة خطية للقيم الماضية . وقد عّبر عنه ((Wold)) بنظام الانحدار الذاتي الخطي وأُنموذج المتوسطات المتحركة الذي اقترحه Slutsky , ((Walker ١٩٣١)) واحد من اكثر المجموعات المهمه لنماذج المعلمات المحددة .[١٢]

لتوضيح هذه الرسالة من جميع جوانبها فقد قسمت الى اربعة فصول خصص الفصل الاول للمقدمة وهدف البحث فضلاً عن الخلفية التاريخية التي تضمنت استعراضاً مبسطاً لتاريخ السلاسل

الزمنية وأهم الدراسات المتعلقة بالنماذج المختلطة .

اما الفصل الثاني فسنتطرق فيه الى عرض كل الجوانب النظرية الخاصة في الرسالة فقد تم عرض اولاًالمفاهيم العامة المستخدمة التي تضمنت مفهوم السلسلة الزمنية فضلاً عن مفهوم التباين المشترك الذاتي والتباين المشترك والارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي .

وقد تم التركيز في هذا الفصل علىالأُنموذج المختلط Autoregressive-Moving ((Average Model)) ARMA(p,q) عندما تكون قيمة p=١,٢ و q=١,٢ أي ARMA(١,١)، ARMA(٢,١) ، ARMA(١,٢)، ARMA(٢,٢)، وتناول الجانب النظري معادلة الأُنموذج وايجاد التباين المشترك الذاتي والارتباط الذاتي.وتضمن التنبؤ للنماذج المختلطةARMA(p,q)عامة،وايجاد خطأ التنبؤ وتوقع وتباين خطأ التنبؤ ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ بحسب طرق((Box&Jenkins١٩٧٦))، ((Ansely ١٩٩٠)) ، ((Harvey ١٩٩٢)) ، ((Nazem ١٩٨٨)).

اما الفصل الثالث فسنتطرق فيه الى طرائق المحاكاة ومو نت كارلو ومولدات الارقام العشوائية والمولدات المتطابقة زيادة على اساليب معاينة التوزيع الطبيعي . و تضمن أيضاًالجانب التجريبي ،فقد تم القيام بأربع تجارب محاكاة بحجوم عينات مختلفة وبتكرار ٥٠٠ وبهدف تحقيق الغرض تم اعداد اربعة برامج محاكاة على الحاسبة الالكترو نية P٤ بلغة بيسك ، إذ تضمنت التجارب الأربعة على التوالي توليد سلاسل زمنية ARMA(١,١) ، ARMA(٢,١) ، ARMA(١,٢) ، ARMA(٢,٢) وتم احتساب التنبؤ بطريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لقيم θ، Ø مختلفة وحجوم عينات مختلفة وبتكرار ٥٠٠ واعطت كل تجربة ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L ، وبعد احتساب متوسط هذه القيم وايجاد الخطأ المطلق ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ، فوجدنا ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) افضل من القيم التنبؤية لطريقة ((Box & Jenkins)) .

اما الفصل الرابع فقد تضمن جملة من الاستنتاجات والتوصيات التي اوضحت ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) افضل من القيم التنؤية لطريقة ((Box & Jenkins)) لتجارب المحاكاة الاربعة .

٢ – هدف البحث

تهدف هذه الرسالة الى المقارنة بين طريقتي ((Box & Jenkins))و((Ansely)) باستخدام المحاكاة العشوائية ((Monte-carlo Simulation)) للتنبؤ لنماذج السلاسل الزمنية ARMA(p,q) حيث p=١,٢ ، q=١,٢ وما يسمى ذلك بنماذج ARMA للرتب الدنيا .

٣- الخلفية التاريخية

يرجع اصل الاهتمام بالسلاسل الزمنية الى عام ((١٨٠٧)) عندما ادعى احد الرياضيين الفرنسيين وهو ((Joseph Fourier)) أن أي سلسلة زمنية Z_t يمكن تبسيطها على شكل مجموع حدود تتضمن الجيب والجيب تمام ،وان يكون عدد هذه الحدود كبيراً بصورة كافية ، وتقديراً لجهود ((Fourier)) سميت السلسلة باسمه ((Fourier Series)) .[٨]

وبعد ظهور سلسلة ((Fourier)) تركز الاهتمام على بحوث تتعلق بالفترات غير الظاهرة ((Hidden Periodicities)) ، اماطريقة ايجاد طول الفترة غير الظاهرة فقد تضمنت اسلوباً يعتمد على اساس تقسيم البيانات الى مجموعات جزئية ، فعلى سبيل المثال في عام ((١٨٧٩)) اقترح ((Stokes)) الاعتماد على ((Fourier Series)) في تحليل البيانات؛ لايجاد الفترات غير الظاهرة ، وقد استخدمت ((Periodgram)) في اكتشاف هذه الفترات ايضاً وأول من استخدم هذا الاسلوب ((Schuster)) عام ((١٩٠٦)) ثم استخدمها ((

Beveridge)) عام ((١٩٢٢)) .[٨].

في عـام ((١٩٢٦)) بـّين ((Yule)) ان تبسـيط سلسـلة ((Fourier)) لايمكـن ان يعطي عمـلاً جيـداً في التنبـؤ او تقـدير الـدورات مـن خـلال السلسـلة نفسـها ؛ لان طـول واتسـاع السلسلة الحقيقية ليس ثابتاً .[٨]

وقـد بيّنـت المصـادر ان الباحـث ((Yule)) في عـام ((١٩٢٧)) اول مـن وضـع فكـرة الانحدار الذاتي ((Autoregressive))، اذ درس هذا الأُنموذج لغاية الرتبة الرابعة .[٨]

في عام ((١٩٣١)) درس الباحث ((Walker)) أُنموذج الانحدار الذاتي على نحو اوسع من ((Yule)) فقد درس حتى الرتبة (p) ورمزه (AR (p .

في عـام ((١٩٣٧)) درس الباحـث ((Slutsky)) أُ نـموذج الاوسـاط المتحركـة ((Moving Average Model)) من الرتبة(q) ورمزه MA(q).[٣]، [٨]

ويُعـدُّ ((Wold)) مكتشـف نمـاذج الانحـدار الـذاتي – الاوسـاط المتحركـة وتسـمّى ايضـاً بالنماذج المختلطة((Autoregressive – Moving Average Models)) وبعده بدأت العديــد مــن المســاهمات الــتي تركــزت باتجــاهين ، الاتجــاه الاول هــو اســتنباط طرق تقـدير كفـوءة لنمـاذج الانحـدار الـذاتي (AR (p والاوسـاط المتحركـة (MA (q والأُنمـوذج المختلط(ARMA(p,q . اما الاتجاه الثاني فقد كان منصباً على تعميم النتائج لتضم السلاسل الزمنية الموسمية .

امــا في جانــب التقــدير الــذي لم يعطــه ((Wold)) اهتمامــاً كبــيراً فــان ((Kolmogoroff)) اقترح في عام ((١٩٤١)) حلاً عاماً لمشكلة التمهيد والتنبؤ .

وفي عـام ((١٩٤٣)) وسع ((Mann & Wald)) طريقـة الامكـان الاعظـم في التقـدير المسـتخدمة في الانحـدار الاعتيـادي ((Regular Regression)) ؛لتضـم معلمـات أُنمـوذج الانحدار الذاتي (AR (p.[٨]

وفي عام ((١٩٥٣)) وسع ((Whittle)) فكرة نماذج ARMA لتشمل السلاسل الزمنية المتعددة ((Multiple Time Series)).[٨]

لقد تناول كثيرمن الباحثين المعنيين بموضوع السلاسل الزمنية دراسة وتطبيق النماذج المختلطة ومن هؤلاء الباحثين ((Box & Jenkins)) حيث درسا وبصورة موسعة وتفصيلية نماذج ((الانحدار الذاتي – الاوساط المتحركة)) وبدءاً في عام ((١٩٧٠)) وضع الأنموذج العام ((الانحدار الذاتي المتكامل مع الاوساط المتحركة)) ورمزه ((ARIMA)) وتطبيقه على السلاسل الزمنية المستقرة وغير المستقرة ، وكذلك اعطيا المعلومات الوافية لفهم هذه النماذج واستعمالها في البيانات المعطاة على شكل سلسلة زمنية لمتغير واحد Univariate Time Series)).((

ان طريقة ((Box & Jenkins)) في تحديد الأنموذج تتضمن ثلاث مراحل :

المرحلة الاولى: يتم فيها تحديد الأنموذج بصورة اولية من خلال فحص دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي .

اما المرحلة الثانية :فتتضمن تقدير معلمات الأنموذج واختبار مدى ملاءمته للبيانات وذلك من خلال فحص معاملات الارتباط الذاتي للبواقي فيما اذا كانت عشوائية ام لا فاذا كانت كذلك فان الأُنموذج التجريبي صحيح، ويمكن استخدامه للتنبؤ والسيطرة ،واذا لم تكن هذه المعاملات عشوائية فان أُنموذجاً تجريبياً آخر يجب تحديده وتكرر الخطوات السابقة الى ان يتم تحديد الأنموذج الملائم .

المرحلة الثالثة: بعد التأكد من ملائمة الأنموذج لتمثيل السلسلة الزمنية يستخدم للتنبؤ بالقيم المستقبلية.[٦]، [٨]

اما فيما يخص التنبؤ فهناك بحوث عديدة درست هذا الجانب منها :

في عام ((١٩٦٧)) قام الباحثان ((Abdrabbo & Priestly)) بدراسة مشكلة التنبؤ لأنموذج الانحدار الذاتي غير المستقر من الرتبة (p) وبمعاملات معتمدة على الزمن.[٣]

وفي عام ((١٩٦٩)) قام الباحثان ((Orcutt & Winokur)) بدراسة اخطاء التنبؤات ((Prediction Errors)) وذلك عندما ١ ≤ | Ø | وبالاعتماد على اسلوب المحاكاة .[٣]

وتوصل الباحث ((Yamamoto)) في عام ((١٩٧٦)) إلى صيغة تقديرية لاحتساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ لاكثر من فترة واحدة لأنموذج الا نحدار الذاتي من الرتبة (p). [٦]

اما الباحثان ((Dent.W & Swanson.J)) ففي عام ((١٩٧٨)) توصلا إلى نماذج ((ARIMA)) الملائمة للتنبؤ في المجالات التي تكون فيها المعلومات نادرة ،واختبرت النماذج في خدمات النقل .[٨]

في عام ((١٩٨٠)) قام الباحثان ((Fuller & Hasza)) بدراسة خصائص التنبؤ عندما ١ ≤ | Ø |، ١ ≥ | Ø |.[١٨]

اما في عام ((١٩٨١)) قام الباحث ((سعدون محسن محمد)) بتطبيق نماذج ((ARIMA)) للتنبؤ بدرجات الحرارة لمدينة بغداد .[١١]

وفي عام ((١٩٨٢))قامت الباحثة ((النقاش))بتحليل السلاسل الزمنية للتنبؤ باستهلاك الطاقة الكهربائية لمدينة بغداد على اساس نماذج السلاسل الزمنية.[١٢]

في عام ((١٩٨٤)) قام الباحث ((كنعان عبد اللطيف عبد الرزاق)) بدراسة احصائية لبناء نماذج التنبؤ المركبة لصناعة الزيوت في العراق حيث اختار الباحث النماذج الملائمة باستخدام طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة التمهيد الاسي للتنبؤ باستهلاك الزيوت النباتية.[٧]

اما في عام ((١٩٨٥)) قام الباحث ((عباس فاضل عباس)) بدراسة التنبؤ بعدد الولادات في مدينة بغداد باستخدام نماذج ((ARIMA)) للرتب الدنيا.[٨]

وفي عام ((١٩٨٦)) قام الباحث ((نوزاد محمد احمد)) باستخدام السلاسل الزمنية للتنبؤ لانتاج لحم الدجاج في المنشأة العامة للدواجن الوسطى.[١]

وفي العام نفسهِ استخدم الباحث ((حمزة اسماعيل شاهين)) نماذج ((ARIMA)) في السيطرة على الخزين في المنشأة العامة لتجارة المواد الغذائية.[٦]

وفي عام ((١٩٨٧))قامت الباحثة((الجباري))باستخدام نماذج السلاسل الزمنية للتنبؤ بالاستهلاك الشهري للماء الصافي في مدينة بغداد.[٢]

اما ((الحديثي)) ففي عام ((١٩٩٣)) درس التنبؤ لانتاج محصول الذرة الصفراء في العراق باستخدام نماذج ARMA(p,q).[٣]

وفي عام ((١٩٩٨)) درس كل من ((Makridakis,Wheelwright& Hyndman)) التنبؤ من خلال طرقه وتطبيقه.[٢٣]

في عام ((١٩٩٩)) درس كل من ((Serena Ng & Timothy J.vogelsang)) ديناميكية وتنبؤ السلاسل الزمنية بوجود المركبات المحددة.[٢٧]

اما ((Ronald Bewley))ففي عام ((٢٠٠٠)) درس تنبؤ السلاسل الزمنية لنماذج ARMA(١,١) .[٢٥]

اما الباحث ((Selo Imrohoroglu)) ففي عام ((٢٠٠١)) درس مراحل بناء الأنموذج المختلط(ARMA(p,q بصورة عامة ووجد التنبؤ للنموذج ARMA(١,١) كحالة خاصة.[٢٦]

وقام كل من ((Khogali .A. Khogali ,Olorunsola.E.Olowofeso & John.O.Owino)) في عامي ((٢٠٠١-٢٠٠٢)) بدراسة تنبؤ النماذج المختلطة ARMA(p,q) .[٢١]

اما ((Peter J.Brockwell Richard.A.Davis)) فقد درس في عام ((٢٠٠٢)) تنبؤ السلاسل الزمنية .[٢٤]

وفي العام نفسهِ قام كل من ((Siem Jan Koopman & Marins Ooms)) بدراسة نماذج السلاسل الزمنية :تقدير و تنبؤ مع تطبيق .[٢٨]

اما في عام ((٢٠٠٣)) قام الباحث ((Prof.Baum)) بدراسة اقتصادية السلاسل الزمنية باستخدام النماذج المختلطة(ARMA(p,q.[١٥]

وفي العام نفسهِ قام الباحث ((الرحامنة)) بدراسة التنبؤ بكمية الطاقة الكهربائية المنتجة في الاردن باستخدام السلاسل الزمنية .[٥]

اما في المدة من ((٢٠٠٤ –١٩٩٤)) فقد درس ((Forum)) تحليل و تنبؤ السلاسل الزمنية.[١٧]

وفي المدة نفسها قام ((Hussein Arsham)) بدراسة صياغة قرار زمني للاقتصاد والمالية باستخدام السلاسل الزمنية.[١٩]

الفصـــل الثانـــي

الجانـــــب النظـــــري

١ – تمهيد

تناول هذا الفصل المفاهيم العامة للسلسلة الزمنية والتباين المشترك الذاتي والتباين المشترك والارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي ، وكذلك تضمن أُنموذج ((الانحدار الذاتي – الوسط المتحرك)) المختلط ، التباين والارتباط الذاتي للنماذج المختلطة ARMA(p,q) فضلاًعن استخدام النماذج المختلطة ARMA(p,q) في التنبؤ وفق طرق متبعة وهي ((Box & Jenkins ١٩٧٦))، ((Ansely ١٩٩٠)) ، ((Harvey ١٩٩٢)) ، ((Nazem ١٩٨٨)) .

٢ – مفاهيم عامة

٢ – ١ السلسلة الزمنية Time Series

هـي عبـارة عـن مجموعـة مـن المشـاهدات لظـاهرة معينـة مقاسـة في فـترة زمنيـة (t=٠,١,٢,...) .تسمّى السلسلة الزمنية بالمستمرة (Continous) اذا كانت مشاهدات هذه المجموعة مستمرة مع الوقت وتسمّى السلسلة بالمنفصلة (Discrete) اذا كانت تؤخذ في أوقات معينة ومحددة .[٤] ، [١٦] ، [٢٩]

ان المشاهدات في السلسلة الزمنية المنفصلة يعبر عنها بـ $[Z(t_١), Z(t_٢),...,Z(t_N)]$ عند الفترات الزمنية $t_١, t_٢, ..., t_N$ حيث N هي عدد القيم المتتالية ويمكن تمثيل السلسلة الزمنية بالشكل الآتي :

$$Z_t = F(t) + a_t \qquad t = ٠, \pm ١, \pm ٢, ... \qquad (٢.١)$$

حيث ان :

$F(t)$: يمثل الجزء المنتظم الذي يعبرعنه بدالة رياضية .

a_t : يمثل الجزء العشوائي وقد يسمّى بالضجيج الأبيض ((White noise)) .

٢-٢ التباين المشترك الذاتي ((Autocovariance))

التبـاين المشـترك الـذاتي يمكـن تعريفـه بأنـه: المقيـاس الـذي يقـيس التبـاين المشـترك ((Covariance)) بين القيمتين ((Z_t , Z_{t+s})) وان معادلته في حالة كون السلسلة مستقرة هي الآتي : [٤]، [٩]

$$\gamma_S = Cov(Z_t, Z_{t+S}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+S} - \mu) \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \ldots (2.2)$$

وان مصفوفة التبـاين المشـترك الـذاتي ((Autocovariance Matrix)) للسلسلة الزمنية المستقرة لـ ((n)) من المرات يكون :

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

التي تمتاز بكونها متماثلة، وان جميع عناصر القطرين الرئيسي والثانوي تكون ثوابت، وان (($\gamma_s = \gamma_{-s}$)) مما يدل على ان دالة التباين الذاتي ((Autocovariance Function))تكون متماثلة حول الصفر .

٣ – ٢ التباين المشترك ((Cross Covariance))

التباين المشترك معناه التباين المتبادل بين ((a_t و z_t)) عند مختلف الازاحات ((s)) ورمزه $\gamma_{az}(s)$.[٨] ، [٥] ، [٢٩]

أي: إن

$$\gamma_{az}(s) = E[a_t \; Z_{t-s}] \quad \ldots\ldots. \qquad (٢.٣)$$

وتكون $\gamma_{az}(s) = ٠$ اذا كان (s > ٠) اما اذا كان (s = ٠) فان $\gamma_{az}(s) = \sigma_a^2$ حيث σ_a^2 تمثل تباين الخطأ وفي حالة (s<٠) فان $\gamma_{az}(s) \neq ٠$.

٤ – ٢ الارتباط الذاتي ((Autocorrelation))

يعرف الارتباط الذاتي بأنه عبارة عن الارتباط بين المشاهدتين ((Z_t , Z_{t+s})) ومعادلته هي على النحو الآتي :[٤]، [١٦]، [٢٩]

$$\rho_s = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+S} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2]\,E[(Z_{t+S} - \mu)^2]}} \quad \ldots.(٢.٤)$$

واذا افترضنا ان السلسلة الزمنية مستقرة فان تباين مشاهدات هذه السلسلة عند الزمن ((t)) يكون مساوياً لـ تباينها عند الزمن ((t + s)) ؛لذا تصبح معادلة الارتباط الذاتي على النحو الآتي :

عندما $\mu=٠$ فان :

$$\rho_s = \frac{E\ (Z_t\ Z_{t+S})}{\sqrt{E\,[\,(Z_t)^2\,]\ E\,[\,(Z_t)^2\,]}}$$

$$\rho_s = \frac{E\ (Z_t\ Z_{t+S})}{E\ (Z_t)^2}$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_٠} \qquad \ldots\ldots\ (٢.٥)$$

إذ ان :

$$Var\ (Z_t) = E\ (Z_t)^2 = \gamma_٠$$

من معادلة ((٢.٥)) نلاحظ ان ١ $= \rho_٠$ كما نستنتج ان

$$\gamma_s = \gamma_٠\ \rho_s \quad \ldots\ldots(٢.٦)$$

وبذلك فاننا نستطيع تمثيل مصفوفة التباين الذاتي بالاعتماد على المعادلة (٢.٦) بوساطة معاملات الارتباطات الذاتية والتباين للسلسلة الزمنية إذ تكون :

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} ١ & \rho_١ & \rho_٢ & \cdots\cdots & \rho_{n-١} \\ \rho_١ & ١ & \rho_١ & \cdots\cdots & \rho_{n-٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-١} & \rho_{n-٢} & \rho_{n-٣} & \cdots\cdots & ١ \end{bmatrix} = \rho_n$$

وتتمتع المصفوفة ((ρ_n)) بنفس خواص مصفوفة التباين الذاتي ،و ان رسم قيم معاملات الارتباط الذاتي مقابل الفترة الفاصلة ((s)) وهذا ما يسمّى بدالة الارتباط الذاتي ((Autocorrelation Function)) ورمزه ((ACF)) . وبما ان (($\rho_s = \rho_{-s}$)) لذلك نستنتج ان دالة الارتباط الذاتي تكون متماثلة حول الصفر .[٤]، [١٦]، [٢٩]

٥ – ٢ الارتباط الذاتي الجزئي

((Partial Autocorrelation))

يعرف الارتباط الذاتي الجزئي للفترة الفاصلة ((s))بوصفه اساس الارتباط بين المشاهدتين ((Z_t, Z_{t+s})) عندما تكون تاثيرات سائر الفترات الفاصلة على ((Z)) ثابتة ، وان رسم قيم معاملات الارتباط الذاتي الجزئي ضمن الفترة الفاصلة ((s)) يكون ما يسمّى بدالة الارتباط الذاتي الجزئي ((Partial Autocorrelation Function)) ورمزه ((PACF)). [٣]، [٤]، [٢٩]

ويشار الى الارتباط الذاتي الجزئي بالرمز ((Ø_{ss}, s=١,٢,....)) التي تمثل مجموعة الارتباطات الذاتية الجزئية عند فترات فاصلة مختلفة وتعرف على النحو الآتي:[٧]، [١٦]

$$\text{Ø}_{ss} = \frac{|\rho_s{}^*|}{|\rho_s|} \quad \text{............... (٢.٧)}$$

إذ إن ((ρ_s)) تمثل مصفوفة الارتباط الذاتي ((s × s))

$$\rho_s = \begin{bmatrix} ١ & \rho_١ & \rho_٢ & \cdots & \rho_{s-١} \\ \rho_١ & ١ & \rho_١ & \cdots & \rho_{s-٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{s-١} & \rho_{s-٢} & \rho_{s-٣} & \cdots & ١ \end{bmatrix}$$

وان (($\rho_s{}^*$)) هي المصفوفة ((ρ_s)) بعد استبدال العمود الاخير بـ

$$\begin{bmatrix} \rho_{1} \\ \rho_{2} \\ \vdots \\ \rho_{s} \end{bmatrix}$$

وهكذا فان $\text{Ø}_{11} = \rho_{1}$

وان :

$$\text{Ø}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{1} \\ \rho_{1} & \rho_{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{1} \\ \rho_{1} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_{2} - \rho_{1}^{2}}{1 - \rho_{1}^{2}}$$

٣ – أُنموذج ((الانحدار الذاتي – الوسط المتحرك)) المختلط
Autoregressive - Moving Average Model

هناك الكثير من السلاسل الزمنية المستقرة لا يمكن تمثيلها بوصفها أُنموذج الانحدار الذاتي AR(p) او أُنموذج الوسط المتحرك MA(q) فقط ،لان هذه السلاسل غالباً ما تحوي خواص كلا الانموذجين لذلك يمكن تمثيلها في أُنموذج يعطي مواصفات هذين الانموذجين وهو ما يسمى بالأنموذج المختلط ((الانحدار الذاتي – الوسط المتحرك)) ورمزه ARMA(p,q) إذ p تمثل رتبة الانحدار الذاتي و q تمثل رتبة الوسط المتحرك. اما الزوج (p,q) فيمثل رتبة الانموذج المختلط المستقر .[١]

يعد الأنموذج المختلط من النماذج الاكثر شيوعاً وانتشاراً في المجالات التطبيقية ويمكن كتابة الصيغة الرياضية للانموذج بالشكل الآتي :[١٠]

$$Z_t = Ø_1 Z_{t-1} + \ldots + Ø_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \quad \ldots\ldots(2.8)$$

حيث ان :

$$a_t \sim N(0, \sigma a^2)$$

وباستخدام عامل الارتداد الخلفي(Back Shift Operator)فيمكننا كتابة الانموذج بالشكل الآتي :[١٠]

$$Ø(B) Z_t = \theta(B) a_t \quad \ldots\ldots(2.9)$$

حيث ان :

$$Ø(B) = 1 - Ø_1 B - Ø_2 B^2 - \ldots\ldots - Ø_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots\ldots - \theta_q B^q$$

اما بالنسبة لاستقرارية الأنموذج ARMA(p,q) فتتحقق عندما تقع جذور المعادلة $Ø(B) = 0$ خارج حدود الدائرة التي نصف قطرها واحد ومركزها نقطة الاصل . وبالمثل فان انعكاسية الأنموذج تتحقق عندما تقع جذور المعادلة $\theta(B) = 0$خارج حدود الدائرة التي نصف قطرها واحد ومركزها نقطة الاصل .[٣١]

بعد ضرب المعادلة (٢.٨) بـ Z_{t-s} واخذ التوقع للطرفين لنحصل على دالة الارتباط الذاتي ((ACF)) التي تساوي :[٣]

$$Z_t Z_{t-s} = Ø_1 Z_{t-1} Z_{t-s} + \ldots + Ø_p Z_{t-p} Z_{t-s} + a_t Z_{t-s} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-s} - \ldots - \theta_q a_{t-q} Z_{t-s}$$

$$E(Z_t Z_{t-s}) = Ø_1 E(Z_{t-1} Z_{t-s}) + \ldots + Ø_p E(Z_{t-p} Z_{t-s}) + E(a_t Z_{t-s}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-s}) - \ldots - \theta_q E(a_{t-q} Z_{t-s})$$

اذن فان :

$$\gamma_S = Ø_1 \gamma_{s-1} + \ldots + Ø_p \gamma_{s-p} + \gamma_{az(s)} - \theta_1 \gamma_{az(s-1)} - \ldots - \theta_q \gamma_{az(s-q)} \quad \ldots\ldots(2.10)$$

وعندما $s = 0$ في المعادلة (٢.١٠) فنحصل على تباين الانموذج الذي يساوي :

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + .. + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2 - \theta_1\gamma_{az}(-1) - \ldots - \theta_q\gamma_{az}(-q) \quad \ldots.(2.11)$$

وبما ان :

$$\gamma_s = \phi_1\gamma_{s-1} + \phi_2\gamma_{s-2} + \ldots.. + \phi_p\gamma_{s-p} \qquad s \geq q \qquad \ldots..(2.12)$$

وبقسمة المعادلة (٢.١٢) على γ_0 فنحصل على دالة الارتباط الذاتي ((ACF)) التي تساوي :

$$\rho_s = \phi_1\rho_{s-1} + \phi_2\rho_{s-2} + \ldots\ldots + \phi_p\rho_{s-p} \qquad s \geq q \qquad \ldots..(2.13)$$

٤ – التباين والارتباط الذاتي لنماذج ARMA (p,q)

تناول هذا الجزء دراسة النماذج المختلطة ARMA(١,١),ARMA(٢,١),ARMA(١,٢),ARMA(٢,٢) بوصفها النماذج الشائعة [٨] ، [١٣].

٤ – ١ الأنموذج ARMA (1,1)

الصيغة الرياضية العامة للأنموذج ARMA(١,١) تكون على النحو الآتي : إذ $q=1, p=1$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \qquad \ldots\ldots.(2.14)$$

بضرب طرفي المعادلة (٢.١٤) بـ Z_{t-s}

$$Z_t Z_{t-s} = Ø_١ Z_{t-١} Z_{t-s} + a_t Z_{t-s} - \theta_١ a_{t-١} Z_{t-s}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(Z_t Z_{t-s}) = Ø_١ E(Z_{t-١} Z_{t-s}) + E(a_t Z_{t-s}) - \theta_١ E(a_{t-١} Z_{t-s})$$

وبذلك نحصل على :

$$\gamma_s = Ø_١ \gamma_{s-١} + \gamma_{az(s)} - \theta_١ \gamma_{az(s-١)} \qquad \ldots\ldots..(٢.١٥)$$

بتعويض قيمة $s = ٠$ فنحصل على :

$$\gamma_٠ = Ø_١ \gamma_١ + \sigma_a^2 - \theta_١ \gamma_{az(-١)} \qquad \ldots\ldots..(٢.١٦)$$

إذ إن :

$$\gamma_{az(٠)} = \sigma_a^2$$

لايجاد قيمة $\gamma_{az(-١)}$ نفرض ان :

$$\gamma_{az(-١)} = E(a_{t-١} Z_t)$$

بما ان :

$$Z_t = Ø_١ Z_{t-١} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

بضرب الطرفين بـ $a_{t-١}$

$$a_{t-١} Z_t = Ø_١ a_{t-١} Z_{t-١} + a_{t-١} a_t - \theta_١ a_{t-١} a_{t-١}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(a_{t-١} Z_t) = Ø_١ E(a_{t-١} Z_{t-١}) + E(a_{t-١} a_t) - \theta_١ E(a_{t-١} a_{t-١})$$

إذ ان :

$$\gamma_{az(-١)} = Ø_١ \gamma_{az(٠)} - \theta_١ \sigma_a^2$$

إذ ان :

$$E(a_{t-١}\, a_t) = ٠$$

وبذلك فان :

$$\gamma_{az(-١)} = \varnothing_{١}\, \sigma a^2 - \theta_{١}\, \sigma a^2$$

$$= (\varnothing_{١} - \theta_{١})\, \sigma a^2$$

وعند تعويض $\gamma_{az(-١)}$ في معادلة (٢.١٦) نحصل على تباين السلسلة الذي يساوي :

$$\gamma_{٠} = \varnothing_{١}\gamma_{١} + \sigma a^2 - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, \sigma a^2 \quad .....(٢.١٧)$$

بتعويض قيمة s=١ في معادلة (٢.١٥) فنحصل على :

$$\gamma_{١} = \varnothing_{١}\gamma_{٠} - \theta_{١}\sigma a^2 \qquad ......(٢.١٨)$$

بتعويض قيمة $\gamma_{١}$ في معادلة (٢.١٧) فنحصل على :

$$\gamma_{٠} = \varnothing_{١}(\varnothing_{١}\gamma_{٠} - \theta_{١}\, \sigma a^2) + \sigma a^2 - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, \sigma a^2$$

$$\gamma_{٠} = \varnothing_{١}^{2}\gamma_{٠} - \varnothing_{١}\theta_{١}\sigma a^2 + \sigma a^2 - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, \sigma a^2$$

$$\gamma_{٠} - \varnothing_{١}^{2}\gamma_{٠} = -\varnothing_{١}\theta_{١}\, \sigma a^2 + \sigma a^2 - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, \sigma a^2$$

$$(١ - \varnothing_{١}^{2})\, \gamma_{٠} = (-\varnothing_{١}\theta_{١} + ١ - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١}))\, \sigma a^2$$

اذن سوف تكون قيمة $\gamma_{٠}$ بالشكل الآتي :

$$\gamma_{٠} = \frac{(-\varnothing_{١}\theta_{١} + ١ - \theta_{١}(\varnothing_{١} - \theta_{١}))\, \sigma a^2}{(١ - \varnothing_{١}^{2})}$$

$$\gamma_{٠} = \frac{(-\varnothing_{١}\theta_{١} + ١ - \varnothing_{١}\theta_{١} - \theta_{١}^{2})\, \sigma a^2}{(١ - \varnothing_{١}^{2})}$$

$$\gamma_{٠} = \frac{(١ + \theta_{١}^{2} - ٢\, \varnothing_{١}\, \theta_{١})\, \sigma a^{2}}{(١ - \varnothing_{١}^{2})} \quad .... (٢.١٩)$$

وان

$$\gamma_{١} = \frac{[\,(١ - \varnothing_{١}\, \theta_{١})\, (\varnothing_{١} - \theta_{١})\,]\, \sigma a^{2}}{(١ - \varnothing_{١}^{2})} \quad .... (٢.٢٠)$$

عندما ١< s فنحصل على :

$$\gamma_{s} = \varnothing_{١}\, \gamma_{s-١} \qquad s > ١ \qquad ..... (٢.٢١)$$

اما دالة الارتباط الذاتي فان بقسمة المعادلة (٢.٢١) على $\gamma_{٠}$ نحصل على :

$$\rho_{S} = \varnothing_{١}\, \rho_{s-١}$$

وبذلك فان :

$$\rho_{٠} = \frac{\gamma_{٠}}{\gamma_{٠}} = ١$$

حيث ان :

$$\rho_{١} = \frac{\gamma_{١}}{\gamma_{٠}} = \frac{(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, (١ - \varnothing_{١}\, \theta_{١})}{١ - \varnothing_{١}^{2} - ٢\, \varnothing_{١}\, \theta_{١}}$$

اذن فان :

$$\rho_{s} = \left[\begin{array}{ll} ١ & s = ٠ \\ \dfrac{(\varnothing_{١} - \theta_{١})\, (١ - \varnothing_{١}\, \theta_{١})}{١ - \varnothing_{١}^{2} - ٢\, \varnothing_{١}\theta_{١}} & s = ١ \\ \varnothing_{١}\, \gamma_{s-١} & s > ١ \end{array} \right] \quad .. (٢.٢٢)$$

٢ – ٤ الأنموذج ARMA (٢,١)

الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (٢,١) تكون بالشكل االآتي: إذ p =٢ , q=١

$$Z_t = \emptyset_1 Z_{t-1} + \emptyset_2 Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \qquad .....(٢.٢٣)$$

بضرب طرفي المعادلة (٢.٢٣) بـ Z_{t-S}

$$Z_t Z_{t-s} = \emptyset_1 Z_{t-1} Z_{t-s} + \emptyset_2 Z_{t-2} Z_{t-s} + a_t Z_{t-s} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-s}$$

بأخذ التوقع للطرفين :

$$E(Z_t Z_{t-s}) = \emptyset_1 E(Z_{t-1} Z_{t-s}) + \emptyset_2 E(Z_{t-2} Z_{t-s}) + E(a_t Z_{t-s}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-s})$$

وبذلك فان :

$$\gamma_s = \emptyset_1 \gamma_{s-1} + \emptyset_2 \gamma_{s-2} + \gamma_{az(S)} - \theta_1 \gamma_{az(S-1)} \qquad .....(٢.٢٤)$$

وعليه فعند تعويض قيمة $s = ٠$ ينتج ان :

$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + \emptyset_2 \gamma_2 + \sigma_a^2 - \theta_1 \gamma_{az(-1)} \qquad .....(٢.٢٥)$$

ولاستخراج $\gamma_{az(-1)}$ نفرض ان

$$E(a_{t-1} Z_t) = \gamma_{az(-1)}$$

بضرب طرفي المعادلة (٢.٢٣) بـ a_{t-1}

$$a_{t-1} Z_t = \emptyset_1 a_{t-1} Z_{t-1} + \emptyset_2 a_{t-1} Z_{t-2} + a_{t-1} a_t - \theta_1 a_{t-1} a_{t-1}$$

بأخذ التوقع للطرفين :

$$E(a_{t-1} Z_t) = \emptyset_1 E(a_{t-1} Z_{t-1}) + \emptyset_2 E(a_{t-1} Z_{t-2}) + E(a_{t-1} a_t) - \theta_1 E(a_{t-1} a_{t-1})$$

اذن فان :

$$\gamma_{az(-1)} = \emptyset_1 \sigma_a^2 - \theta_1 \sigma_a^2$$

$$\gamma_{az(-١)} = (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2$$

بتعويض قيمة $\gamma_{az(-١)}$ في معادلة (٢.٢٥) نحصل على :

$$\gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{٢}\, \gamma_{٢} + \sigma_a^2 - \theta_{١}\, (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2 \qquad .....(٢.٢٦)$$

بتعويض قيمة s= ١ في معادلة (٢.٢٤) نحصل على :

$$\gamma_{١} = \text{Ø}_{١}\, \gamma_{٠} + \text{Ø}_{٢}\, \gamma_{١} - \theta_{١}\, \sigma_a^2 \qquad .....(٢.٢٧)$$

علماً بان :

$$\gamma_{az(١)} = ٠$$

$$\gamma_{az(٠)} = \sigma_a^2$$

وبتعويض قيمة s =٢ في معادلة (٢.٢٤) نحصل على :

$$\gamma_{٢} = \text{Ø}_{١}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{٢}\, \gamma_{٠} \qquad ......(٢.٢٨)$$

ومن ثم نعوض معادلة (٢.٢٨) في معادلة (٢.٢٦) ليكون لدينا :

$$\gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{٢}(\text{Ø}_{١}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{٢}\gamma_{٠}) + \sigma_a^2 - \theta_{١}\, (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2$$

$$\gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{١}\, \text{Ø}_{٢}\, \gamma_{١} + \text{Ø}_{٢}^2\, \gamma_{٠} + \sigma_a^2 - \theta_{١}\, (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2$$

$$\gamma_{٠} - \text{Ø}_{٢}^{2}\, \gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}(١ + \text{Ø}_{٢})\, \gamma_{١} + \sigma_a^2 - \theta_{١}\, (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2$$

$$(١ - \text{Ø}_{٢}^2)\, \gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}(١ + \text{Ø}_{٢})\, \gamma_{١} + \sigma_a^2 - \theta_{١}\, (\text{Ø}_{١} - \theta_{١})\, \sigma_a^2$$

$$(١ - \text{Ø}_{٢}^2)\, \gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}(١ + \text{Ø}_{٢})\, \gamma_{١} + \sigma_a^2 - \text{Ø}_{١}\, \theta_{١}\, \sigma_a^2 + \theta_{١}^{2}\, \sigma_a^2$$

$$(١ - \text{Ø}_{٢}^2)\, \gamma_{٠} = \text{Ø}_{١}(١ + \text{Ø}_{٢})\, \gamma_{١} + (١ - \text{Ø}_{١}\, \theta_{١} + \theta_{١}^{2})\, \sigma_a^2 \qquad ...(٢.٢٩)$$

وبحل المعادلتين (٢.٢٩) و(٢.٢٧) نحصل على :

$$(١-Ø_٢^2)\,\gamma_٠ = Ø_١(١+Ø_٢)\ \frac{Ø_١\,\gamma_٠ - \theta_١\,\sigma_a^2}{١-Ø_٢} + (١-Ø_١\,\theta_١ + \theta_١^{2})\,\sigma_a^2$$

وبتبسيط المعادلة نحصل على $\gamma_٠$ التي تساوي :

$$\gamma_٠ = \frac{(١-Ø_٢)\,(١-Ø_١\,\theta_١ + \theta_١^{2}) - Ø_١\,\theta_١(١+Ø_٢)\,\sigma_a^2}{(١+Ø_٢)\,[(١-Ø_٢)^2 - Ø_١^{2}]} \quad ..(٢.٣٠)$$

وبالتعويض عن قيمة $\gamma_٠$ في معادلة (٢.٢٧) نحصل على $\gamma_١$ التي تساوي :

$$\gamma_١ = \frac{-\theta_١\,(١-Ø_٢^{2}) + Ø_١\,(١-Ø_١\,\theta_١ + \theta_١^{2})\,\sigma_a^2}{(١+Ø_٢)\,[(١-Ø_٢)^2 - Ø_١^{2}]} \quad ..(٢.٣١)$$

اما عندما ٣ =s فنحصل على :

$$\gamma_٣ = Ø_١\,\gamma_٢ + Ø_٢\,\gamma_١$$

وبذلك نحصل على γ_s التي تمثل التباين الذاتي

$$\gamma_s = Ø_١\,\gamma_{s-١} + Ø_٢\,\gamma_{s-٢} \qquad s > ١ \qquad .....(٢.٣٢)$$

اما دالة الارتباط الذاتي للأنموذج (٢,١) ARMA فتكون على النحو الآتي:

$$\rho_S = \frac{\gamma_s}{\gamma_٠}$$

فعندما تكون قيمة ٠ = s فان :

$$\rho_٠ = \frac{\gamma_٠}{\gamma_٠} = ١$$

اما عندما تكون ١ = s فان :

$$\gamma_١ \qquad -\theta_١\,(١-Ø_١^{2}) + Ø_١\,(١-Ø_١\,\theta_١ - \theta_١^{2})\,\sigma_a^2$$

$$\rho_{١} = \quad \gamma_{٠} \quad = \quad (١- \varnothing_{٢})\,(١- \varnothing_{١}\,\theta_{١} - \theta_{١}^{2}) - \varnothing_{١}\,\theta_{١}(١ + \varnothing_{٢})$$

وبقسمة المعادلة (٢.٣٢) على $\gamma_{٠}$ نحصل على :

$$\rho_S = \varnothing_{١}\,\rho_{S-١} + \varnothing_{٢}\,\rho_{S-٢} \qquad s > ١ \qquad .....(٢.٣٣)$$

٣ – ٤ الأنموذج ARMA (١,٢)

الصيغة الرياضية العامة للأنموذج ARMA (١,٢) تكون بالشكل الآتي :

إذ $q=٢, p=١$

$$Z_t = \varnothing_{١}\, Z_{t-١} + a_t - \theta_{١}\, a_{t-١} - \theta_{٢}\, a_{t-٢} \qquad .....(٢.٣٤)$$

بضرب طرفي المعادلة (٢.٣٤) بـ Z_{t-s}

$$Z_t\, Z_{t-s} = \varnothing_{١}\, Z_{t-١}\, Z_{t-s} + a_t\, Z_{t-s} - \theta_{١}\, a_{t-١}\, Z_{t-s} - \theta_{٢}\, a_{t-٢}\, Z_{t-s}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(Z_t\, Z_{t-s}) = \varnothing_{١} E(Z_{t-١} Z_{t-s}) + E(a_t Z_{t-s}) - \theta_{١} E(a_{t-١} Z_{t-s}) - \theta_{٢} E(a_{t-٢}\, Z_{t-s})$$

وبذلك نحصل على :

$$\gamma_s = \varnothing_{١}\,\gamma_{s-١} + \gamma_{az\,(s)} - \theta_{١}\,\gamma_{az\,(s-١)} - \theta_{٢}\,\gamma_{az\,(s-٢)} \qquad .....(٢.٣٥)$$

بتعويض قيمة $s = ٠$ نحصل على $\gamma_{٠}$ التي تساوي :

$$\gamma_{٠} = \varnothing_{١}\,\gamma_{١} + \sigma_a^2 - \theta_{١}\,\gamma_{az\,(-١)} - \theta_{٢}\,\gamma_{az\,(-٢)} \qquad .....(٢.٣٦)$$

وباستخدام الاسلوب السابق نستخرج $\gamma_{az\,(-١)}$ والتي تساوي :

$$\gamma_{az\,(-١)} = (\varnothing_{١} - \theta_{١})\ \sigma_a^2$$

اما لاستخراج قيمة $\gamma_{az(-٢)}$ فنفرض ان :

$$\gamma_{az(-٢)} = E(a_{t-٢}\, Z_t)$$

بضرب طرفي المعادلة (٢.٣٤) بـ $a_{t-٢}$

$$a_{t-٢} Z_t = \varnothing_١\, a_{t-٢}\, Z_{t-١} + a_{t-٢}\, a_t - \theta_١\, a_{t-٢}\, a_{t-١} - \theta_٢\, a_{t-٢}\, a_{t-٢}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(a_{t-٢} Z_t) = \varnothing_١ E(a_{t-٢} Z_{t-١}) + E(a_{t-٢}\, a_t) - \theta_١ E(a_{t-٢}\, a_{t-١}) - \theta_٢ E(a_{t-٢}\, a_{t-٢})$$

وبذلك يكون :

$$\gamma_{az(-٢)} = \varnothing_١\, \gamma_{az(-١)} - \theta_٢\, \sigma_a^2$$
$$= \varnothing_١(\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2 - \theta_٢\, \sigma_a^2$$

حيث ان :

$$\gamma_{az}(-١) = (\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2$$

اذن فان :

$$\gamma_{az(-٢)} = (\varnothing_١ (\varnothing_١ - \theta_١) - \theta_٢)\, \sigma_a^2$$

بتعويض $\gamma_{az}(-١)$ و $\gamma_{az(-٢)}$ في معادلة (٢.٣٦) فنحصل على :

$$\gamma_٠ = \varnothing_١ \gamma_١ + \sigma_a^2 - \theta_١ (\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2 - \theta_٢ \left[\varnothing_١(\varnothing_١ - \theta_١) - \theta_٢\right] \sigma_a^2 \quad ..(٢.٣٧)$$

اماعندما $s = ١$ فان :

$$\gamma_١ = \varnothing_١\, \gamma_٠ - \theta_١\, \sigma_a^2 - \theta_٢\, \gamma_{az}(-١)$$

اذن فان :

$$\gamma_١ = \varnothing_١\, \gamma_٠ - \theta_١\, \sigma_a^2 - \theta_٢\, (\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2 \quad .....(٢.٣٨)$$

بحل المعادلتين (٢.٣٧) ،(٢.٣٨) نحصل على :

$$\gamma_٠ = \varnothing_١ \left(\varnothing_١\, \gamma_٠ - \theta_١ \sigma_a^2 - \theta_٢ (\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2\right) + \sigma_a^2$$
$$-\theta_١ (\varnothing_١ - \theta_١)\, \sigma_a^2 - \theta_٢ \left[\varnothing_١ (\varnothing_١ - \theta_١) - \theta_٢\right] \sigma_a^2$$

بعد التبسيط نجد ان $\gamma_٠$ تساوي :

$$\gamma_{٠} = \frac{[(١+\theta_{١}^{2}+\theta_{٢}^{2}) - ٢\,\varnothing_{١}\,(\theta_{١}+\varnothing_{١}\,\theta_{٢} - \theta_{١}\theta_{٢})\,]\,\sigma_a^2}{(١-\varnothing_{١}^{2})} \quad ..(٢.٣٩)$$

بما ان :

$$\gamma_{١} = \varnothing_{١}\,\gamma_{٠} - \theta_{١}\,\sigma_a^2 - \theta_{٢}\,(\varnothing_{١} - \theta_{١})\,\sigma_a^2$$

اذن فان :

$$\gamma_{١} = \frac{[\varnothing_{١}(١+\theta_{١}^{2}+\theta_{٢}^{2}) - (١+\varnothing_{١}^{2})(\theta_{١}+\varnothing_{١}\,\theta_{٢} - \theta_{١}\theta_{٢})]\,\sigma_a^2}{(١-\varnothing_{١}^{2})} \quad ...(٢.٤٠)$$

اما عندما تكون قيمة $s = ٢$ فان :

$$\gamma_{٢} = \varnothing_{١}\,\gamma_{١} - \theta_{٢}\,\sigma_a^2$$

وبالتعويض عن $\gamma_{١}$ فان :

$$\gamma_{٢} = \frac{[\varnothing_{١}^{2}(١+\theta_{١}^{2}+\theta_{٢}^{2}) - \varnothing_{١}(١+\varnothing_{١}^{2})(\theta_{١}+\varnothing_{١}\theta_{٢}-\theta_{١}\theta_{٢}) - \theta_{٢}(١-\varnothing_{١}^{2})]\sigma_a^2}{(١-\varnothing_{١}^{2})} \quad ...(٢.٤١)$$

اما اذا كانت $s = ٣$ فان :

$$\gamma_{٣} = \varnothing_{١}\,\gamma_{٢}$$

وبذلك سوف تكون γ_s تساوي :

$$\gamma_s = \varnothing_{١}\,\gamma_{s-١} \qquad s > ٢ \qquad .....(٢.٤٢)$$

اما دالة الارتباط الذاتي للأنموذج ARMA(١,٢) فسوف تكون بالصورة الآتية :

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_{٠}}$$

فعندما $s = ٠$ فان :

$$\rho_{٠} = \frac{\gamma_{٠}}{\gamma_{٠}} = ١$$

اما عندما $s = ١$ فان :

$$\gamma_{١}$$

$$\rho_1 = \gamma_0$$

اما عندما ٢ = s فان :

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0}$$

وبذلك سوف تكون ρ_s بقسمة معادلة (٢.٤٢) على γ_0 التي تساوي :

$$\rho_s = \emptyset_1 \rho_{s-1} \qquad s > 2 \qquad \ldots\ldots(2.43)$$

وبصورة عامة فان :

$$\rho_s = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} & s = 1 \\ \dfrac{\gamma_2}{\gamma_0} & s = 2 \\ \emptyset_1 \rho_{s-1} & s > 2 \end{cases} \qquad \ldots (2.44)$$

٤ – ٤ الأنموذج (٢,٢) ARMA

الصيغة الرياضية العامة للأنموذج (٢,٢) ARMA تكون :إذ ٢= q=٢,p

$$Z_t = \emptyset_1 Z_{t-1} + \emptyset_2 Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad \ldots\ldots(2.45)$$

بضرب المعادلة (٢.٤٥) بـ Z_{t-s}

$$Z_t Z_{t-s} = \emptyset_1 Z_{t-1} Z_{t-s} + \emptyset_2 Z_{t-2} Z_{t-s} + a_t Z_{t-s} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-s} - \theta_2 a_{t-2} Z_{t-s}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(Z_t Z_{t-s})=\varnothing_1 E(Z_{t-1}Z_{t-s})+\varnothing_2 E(Z_{t-2}Z_{t-s})+E(a_t Z_{t-s})-\theta_1 E(a_{t-1}Z_{t-s})-\theta_2 E(a_{t-2}Z_{t-s})$$

اذن فان :

$$\gamma_S=\varnothing_1\gamma_{S-1}+\varnothing_2\gamma_{S-2}+\gamma_{az\,(s)}-\theta_1\gamma_{az\,(s-1)}-\theta_2\gamma_{az\,(s-2)}\quad ......(٢.٤٦)$$

بتعويض قيمة ٠ = s فان :

$$\gamma_0=\varnothing_1\gamma_1+\varnothing_2\gamma_2+\sigma a^2-\theta_1\gamma_{az\,(-1)}-\theta_2\gamma_{az\,(-2)}\quad ......(٢.٤٧)$$

لاستخراج $\gamma_{az\,(-1)}$ نضرب المعادلة (٢.٤٥) بـ a_{t-1} ونأخذ التوقع للطرفين فنحصل على :

$$\gamma_{az}(-1)=(\varnothing_1-\theta_1)\,\sigma a^2$$

اما لاستخراج $\gamma_{az}\,(-2)$ فنضرب المعادلة (٢.٤٥) بـ a_{t-2} ونأخذ التوقع للطرفين فنحصل على :

$$\gamma_{az\,(-2)}=(\varnothing_1^2-\theta_1\varnothing_1+\varnothing_2-\theta_2)\,\sigma a^2$$

بالتعويض عن قيمة ١ = s في معادلة (٢.٤٦) فنحصل على :

$$\gamma_1=\varnothing_1\gamma_0+\varnothing_2\gamma_1-\theta_1\sigma a^2-\theta_2\gamma_{az}(-1)\quad ......(٢.٤٨)$$

اما عندما تكون ٢ = s فنحصل على :

$$\gamma_2=\varnothing_1\gamma_1+\varnothing_2\gamma_0-\theta_2\sigma a^2\quad ......(٢.٤٩)$$

بالتعويض عن $\gamma_{az}(-1)$ و $\gamma_{az}(-2)$ في معادلة (٢.٤٧) نحصل على

$$\gamma_0=\varnothing_1\gamma_1+\varnothing_2\gamma_2+\sigma a^2-\theta_1(\varnothing_1-\theta_1)\sigma a^2-\theta_2(\varnothing_1^2-\theta_1\varnothing_1+\varnothing_2-\theta_2)\sigma a^2\quad ...(٢.٥٠)$$

وان

$$\gamma_1=\varnothing_1\gamma_0+\varnothing_2\gamma_1-\theta_1\sigma a^2-\theta_2(\varnothing_1-\theta_1)\sigma a^2\quad .....(٢.٥١)$$

بتعويض معادلة (٢.٤٩) في معادلة (٢.٥٠) ينتج :

$$\gamma_0=\varnothing_1\gamma_1+\varnothing_2(\varnothing_1\gamma_1+\varnothing_2\gamma_0-\theta_2\sigma a^2)+\sigma a^2-\theta_1(\varnothing_1-\theta_1)\sigma a^2-\theta_2(\varnothing_1^2-\theta_1\varnothing_1+\varnothing_2-\theta_2)\sigma a^2$$

بالتبسيط نحصل على

$$\gamma_{٠} = \frac{Ø_{١}(١+Ø_{٢})\ \gamma_{١}+(١+\theta_{١}^{2}+\theta_{٢}^{2}-٢\ Ø_{٢}\ \theta_{٢})-(Ø_{١}^{2}\theta_{٢}-Ø_{١}\ \theta_{١}\theta_{٢}-Ø_{١}\theta_{١})\ \sigma a^{2}}{(١-Ø_{٢}^{2})}$$

بالتعويض عن $\gamma_{١}$ من معادلة (٢.٥١) نحصل على

$$\gamma_{٠} = \frac{(١-Ø_{٢})[١+\theta_{١}^{2}+\theta_{٢}^{2}-٢Ø_{٢}\theta_{٢}]-٢Ø_{١}[\theta_{١}+Ø_{١}\theta_{٢}-\theta_{١}\theta_{٢}]\sigma a^{2}}{(١-Ø_{٢})\ [(١-Ø_{٢})-Ø_{١}^{2}]} \quad ...(٢.٥٢)$$

بتبسيط المعادلتين (٢.٥١) ، (٢.٤٩) ينتج ان :

$$\gamma_{١} = \frac{Ø_{١}\ \gamma_{٠}-(Ø_{١}+Ø_{١}\ \theta_{٢}-\theta_{١}\ \theta_{٢})\ \sigma a^{2}}{(١-Ø_{٢})} \quad ...(٢.٥٣)$$

وعندما ٢ = s فان :

$$\gamma_{٢} = \frac{(Ø_{٢}+Ø_{١}^{2}-Ø_{٢}^{2})\gamma_{٠}-(\theta_{٢}+\theta_{١}Ø_{١}-Ø_{١}\theta_{٢}+Ø_{١}^{2}\theta_{٢}-Ø_{١}\theta_{١}\theta_{٢})\ \sigma a^{2}}{(١-Ø٢)} \quad ...(٢.٥٤)$$

اما عندما ٣ = s فان :

$$\gamma_{٣} = Ø_{١}\ \gamma_{٢} + Ø_{٢}\ \gamma_{١}$$

اذن فان :

$$\gamma_{s} = Ø_{١}\ \gamma_{s-١} + Ø_{٢}\ \gamma_{s-٢} \qquad s > ٢ \qquad ...\ (٢.٥٥)$$

اما دالة الارتباط الذاتي للأنموذج ARMA (٢,٢) فتكون :

$$\rho_{S} = \frac{\gamma_{S}}{\gamma_{٠}}$$

بالتعويض عن قيمة ٠ = s فان :

$$\rho_{٠} = \frac{\gamma_{٠}}{\gamma_{٠}} = ١$$

وعندما ١ = s فان :

$$\rho_{١} = \frac{\gamma_{١}}{\gamma_{٠}}$$

وعندما ٢ = s فان :

$$\rho_{٢} = \frac{\gamma_{٢}}{\gamma_{٠}}$$

وبقسمة المعادلة (٢.٥٥) على $\gamma_{٠}$ فنحصل على :

$$\rho_s = Ø_{١} \rho_{s-١} + Ø_{٢} \rho_{s-٢} \qquad s > ٢ \qquad .....(٢.٥٦)$$

وبصورة عامة فان :

$$\rho_s = \begin{bmatrix} ١ & s = ٠ \\ \frac{\gamma_{١}}{\gamma_{٠}} & s = ١ \\ \frac{\gamma_{٢}}{\gamma_{٠}} & s = ٢ \\ Ø_{١} \rho_{s-١} + Ø_{٢} \rho_{s-٢} & s > ٢ \end{bmatrix} \qquad ... (٢.٥٧)$$

٥ - التنبؤ ((Forecasting))

إن مراحل بناء الأنموذج المختلط ARMA(p,q) هي :

١- تشخيص الأنموذج Model Identification

٢- تقدير الأنموذج Model Estimation

٣- اختبار ملاءمة الأنموذج المشخص Model Diagnoastic Checking

٤- التنبؤ Forecasting

نلاحظ ان التنبؤ هو المرحلة الاخيرة من مراحل بناء الأنموذج المختلط (ARMA(p ,q ، تبدأ مرحلة التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة الزمنية باستخدام هذا الأنموذج ، فاذا عبرنا عن القيمة المستقبلية التي يراد التنبؤ بها ورمزه ((Z_{t+L})) والقيمة التنبؤية (($\hat{Z}_t(L)$)) .[٦]

فالتنبؤ للسلسلة الزمنية هو عبارة عن التوقع الشرطي ((Conditional Expectation)) في الفترة ((t + L)) عند الزمن ((t)) ويرمز له بالرمز الآتي : [١٣]

$$\hat{Z}_{t}(L) = E[\, Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-1} , \ldots \,] \qquad \ldots (2.58)$$

إذ ان :

$$Z_{t+L}=\varphi_1 Z_{t+L-1}+\varphi_2 Z_{t+L-2}+..+\varphi_{p+d} Z_{t+L-p-d}-\theta_1 a_{t+L-1}-..-\theta_q a_{t+L-q}+a_{t+L} \ldots (2.59)$$

وذلك ان :

L : الفترة المتنبأ بها Lead Time

$Z_t(L)$: قيمة التنبؤ عند الفترة L

t : الفترة الزمنية الاساسية ((Origin Time))

ولكي يكون التنبؤ امثل يجب ان نحصل على اقل متوسط مربعات اخطاء التنبؤ ((Mean Square Error Forecasting)) ورمزه ((MSEF)) والذي يساوي :[٣]

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2 \quad \ldots (٢.٦٠)$$

اما خطأ التنبؤ للفترة المتنبأ بها ((L)) فيكون :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L) \quad \ldots (٢.٦١)$$

إذ ان $e_t(L)$: خطأ قيمة التنبؤ $\hat{Z}_t(L)$ في الفترة المتنبأ بها

اما توقع خطأ التنبؤ عند الفترة ((L)) فان

$$E[e_t(L)] = ٠$$

وتباين خطأ التنبؤ يساوي :

$$Var[e_t(L)] = E[e_t(L)]^2$$

اما التوقعات الشرطية في المعادلة (٢.٥٩) فتحسب باستخدام العلاقات الآتية :[٧]

$$\left.\begin{array}{ll} E[Z_{t-j}] = Z_{t-j} & j = ٠,١,٢,\ldots \\ \hat{E}[Z_{t+j}] = \hat{Z}_t(j) & \ldots \\ E[a_{t-j}] = \hat{a}_{t-j} = Z_{t-j} - \hat{Z}_{t-j} & j = ٠,١,٢,\ldots \\ E[a_{t+j}] = ٠ & j = ١,٢,\ldots \end{array}\right\} \boxed{(٢.٦٢)}$$

لحساب التنبؤ $\hat{Z}_t(L)$ فاننا نأخذ التوقع الشرطي للمعادلة (٢.٥٩) عند الزمن (t)فنحصل على :[٧]

$$E(Z_{t+L}) = \hat{Z}_t(L) = \varphi_1 E(Z_{t+L-1}) + \varphi_2 E(Z_{t+L-2}) + \ldots + \varphi_{p+d} E(Z_{t+L-p-d}) - \theta_1 E(a_{t+L-1}) - \ldots - \theta_q E(a_{t+L-q}) + E(a_{t+L}) \quad \ldots\ldots (٢.٦٣)$$

إذ ان التوقعات الشرطية للمعادلة (٢.٦٣) تحسب من العلاقات في (٢.٦٢)

ان ما ذكر يمثل الحالة العامة لايجاد التنبؤات،ويمكن تطبيقها في حالة كون ملاءمةالانموذج ARMA(p,q) للبيانات وتكون المعادلة بالصورة الآتية :[٧]

$$Z_{t+L}=\emptyset_1 Z_{t+L-1}+\emptyset_2 Z_{t+L-2}+..+\emptyset_p Z_{t+L-p}-\theta_1 a_{t+L-1}-..-\theta_q a_{t+L-1}+a_{t+L} \quad ..(2.64)$$

والآن سوف نتطرق إلى نماذج ARMA(١,١)، ARMA(٢,١)، ARMA(١,٢)، ARMA(٢,٢)، من خلال ايجاد التنبؤ وخطأ التنبؤ ((Forecast Error)) وحساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ فضلاًعن ايجاد توقع وتباين الخطأ .

١ – ٥ الأنموذج (١,١) ARMA

في عام (١٩٧٦) ناقش ((**Box & Jenkins**)) قيمة التنبؤ عند الفترة (L) والزمن (t) إذ يمثل التنبؤ بـ (($\hat{Z}_t(L)$)) ويساوي :

$$\hat{Z}_{t}(L) = E[\, Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-1}, \ldots \,]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (١,١) ARMA تساوي :

$$Z_t = \emptyset_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فيكتب

$$Z_{t+L} = \emptyset_1 Z_{t+L-1} + a_{t+L} - \theta_1 a_{t+L-1} \quad \ldots (2.65)$$

عندما ((L=١)) فان

$$Z_{t+1} = \emptyset_1 Z_t + a_{t+1} - \theta_1 a_t$$

عندما ((L =٢))فان

$$Z_{t+2} = \emptyset_1 Z_{t+1} + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1}$$

وبما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_{t}(L) = E[\ Z_{t+L}\ /\ Z_{t}\ , Z_{t-١}\ , \ldots\ ]$$

عندما ((L=١))فان

$$\hat{Z}_{t}(١) = E[\ Z_{t+١}\ /\ Z_{t}\ , Z_{t-١}\ , \ldots\ ]$$

باستخدام الصيغ في (٢.٦٢) نحصل على :

$$\hat{Z}_{t}(١) = Ø_{١}\ Z_{t} - \theta_{١}\ a_{t}$$

اما عندما ((L=٢))فان

$$\hat{Z}_{t}(٢) = E[\ Z_{t+٢}\ /\ Z_{t}\ , Z_{t-١}\ , \ldots\ ]$$

$$\hat{Z}_{t}(٢) = Ø_{١}\ \hat{Z}_{t}(١)$$

اذن بصورة عامة فان :

$$\hat{Z}_{t}(L) = Ø_{١}\ \hat{Z}_{t}(L-١) \qquad L \geq ٢ \qquad \ldots..(٢.٦٦)$$

اما الصيغة العامة لخطأ التنبؤ((Forecast Error)) فتساوي :

$$e_{t}(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t}(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_{t}(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t}(١)$$

$$e_{t}(١) = a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_{t}(١)\ ] = ٠$$

$$Var[e_{t}(١)\ ] = E[e_{t}(١)\ ]^{2} = \sigma_{a}^{2}$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[\ Z_{t+L} - \hat{Z}_{t}(L)\ ]^{2}$$

عندما ((L=١)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - Z_t(١)]^2$$

$$MSEF = E[a_{t+١}]^2 = E[e_t(١)]^2$$

$$MSEF = Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

وفي عام (١٩٩٠) ناقش((**Ansely**)) حالة القيمة التنبؤية Z_{t+L} , $L \geq ١$ عند الفترة ((t)).

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج تكون

$$Z_t = \text{Ø}_١ Z_{t-١} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \text{Ø}_١ Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١}$$

عندما ((L = ١)) فان

$$Z_{t+١} = \text{Ø}_١ Z_t + a_{t+١} - \theta_١ a_t$$

اما عندما ((L=٢)) فان

$$Z_{t+٢} = \text{Ø}_١ Z_{t+١} + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١}$$

اما الصيغة العامة للتنبؤ فهي

$$\hat{Z}_{t+L} = \hat{\text{Ø}}_١ Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \hat{\theta}_١ a_{t+L-١} \quad \ldots (٢.٦٧)$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$\hat{Z}_{t+١} = \hat{\text{Ø}}_١ Z_t + a_{t+١} - \hat{\theta}_١ a_t$$

واذا كانت((L = ٢)) فان :

$$\hat{Z}_{t+٢} = \hat{\text{Ø}}_١ Z_{t+١} + a_{t+٢} - \hat{\theta}_١ a_{t+١}$$

اما خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فان الصيغة العامة للخطأ تساوي :

$$e_{t(L)} = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

عندما ((L=١))فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t+١}$$

$$= (\text{Ø}_١ - \hat{\text{Ø}}_١) Z_t - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(١)] = E[(\text{Ø}_١ - \text{Ø}_١)Z_t - (\theta_١ - \theta_١)a_t]$$
$$= (\text{Ø}_١ - \text{Ø}_١)Z_t - (\theta_١ - \hat{\theta}_١)a_t$$

$$Var[e_t(١)] = E[(\text{Ø}_١ - \text{Ø}_١)Z_t - (\theta_١ - \theta_١)a_t]^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - Z_{t+L}]^2$$

عندما ((L=١)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - Z_{t+١}]^2$$
$$= E[e_t(١)]^2$$
$$= Var[e_t(١)]$$
$$= Var[(\text{Ø}_١ - \text{Ø}_١)Z_t - (\theta_١ - \theta_١)a_t]$$
$$= (\theta_١ - \theta_١)^2 \sigma a^2$$

اما ((**Harvey**)) ففي عام (١٩٩٢) درس التنبؤ لنماذج ARMA إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z^{t}_{(t+L)} = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١}, \ldots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (١,١) ARMA يساوي :

$$Z_t = \text{Ø}_١ Z_{t-١} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \text{Ø}_١ Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١}$$

عندما ((L=١)) فان :

$$Z_{t+١} = \text{Ø}_١ Z_t + a_{t+١} - \theta_١ a_t$$

اما عندما ((L=٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = \text{Ø}_١ Z_{t+١} + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١}$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z^{t}_{(t+L)} = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١}, \ldots]$$

عندما (($L = 1$)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+1)} = E\left[\, Z_{t+1} \,/\, Z_t \,, Z_{t-1} \,, \dots \,\right] = \emptyset_1 Z_t - \theta_1 a_t$$

عندما (($L = 2$)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+2)} = E\left[\, Z_{t+2} \,/\, Z_t \,, Z_{t-1} \,, \dots \,\right]$$

$$= \emptyset_1 \; Z_{t\,(1)}$$

اذن بصورة عامة

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = \emptyset_1 \; \overset{t}{Z}_{(L-1)} \qquad L \geq 2 \qquad \dots\dots(٢.٦٨)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error))فيتم على النحو الآتي :

$$e_t\,(L) = Z_{t+L} - \overset{t}{Z}_{(t+L)}$$

عندما (($L=1$))فان :

$$e_t\,(1) = Z_{t+1} - \overset{t}{Z}_{(t+L)}$$

$$= a_{t+1}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E\left[e_t(1)\right] = 0$$

$$Var\left[e_t\,(1)\right] = E\left[e_t\,(1)\right]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E\left[\, Z_{t+1} - \overset{t}{Z}_{(t+L)} \right]^2$$

عندما (($L=1$)) فان :

$$MSEF = E\left[\, Z_{t+1} - \overset{t}{Z}_{(t+1)} \right]^2$$

$$MSEF = E\left[\, a_{t+1} \right]^2 = E\left[e_t\,(1)\right]^2$$

$$MSEF = Var\left[a_{t+1}\right] = \sigma_a^2$$

وفي عـام (١٩٨٨) نـاقش ((**Nazem**)) التنبـؤ للنمـاذج المختلطـة ARMA إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z_{t}(L) = E[\ Z_{t+L} / Z_{t}, Z_{t-١}, \ldots\ ]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (١,١) تساوي :

$$Z_{t} = \emptyset_{١} Z_{t-١} + a_{t} - \theta_{١} a_{t-١}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \emptyset_{١} Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \theta_{١} a_{t+L-١} + \delta$$

حيث δ ثابت

عندما (($L = ١$)) فان :

$$Z_{t+١} = \emptyset_{١} Z_{t} + a_{t+١} - \theta_{١} a_{t} + \delta$$

عندما (($L = ٢$)) فان :

$$Z_{t+٢} = \emptyset_{١} Z_{t+١} + a_{t+٢} - \theta_{١} a_{t+١} + \delta$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z_{t}(L) = E[\ Z_{t+L} / Z_{t}, Z_{t-١}, \ldots\ ]$$

عندما (($L=١$))فان :

$$Z_{t}(١) = \emptyset_{١} Z_{t} - \theta_{١} a_{t} + \delta$$

اما عندما (($L=٢$)) فان :

$$Z_{t}(٢) = \emptyset_{١} Z_{t}(١) + \delta$$

وبصورة عامة

$$Z_{t}(L) = \emptyset_{١} Z_{t}(L-١) + \delta \qquad L \geq ٢ \qquad \ldots (٢.٦٩)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي:

$$e_{t}(L) = Z_{t+L} - Z_{t}(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ

$$E[e_t(١)] = ٠$$
$$Var[e_t(١)] = E[e_t(١)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF)فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2$$

عندما((L=١)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)]^2$$
$$= E[e_t(١)]^2$$
$$= Var[e_t(١)]$$
$$= Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

٢ – ٥ الأنموذج ARMA (٢,١)

يمكن حساب التنبؤ وخطأ التنبؤ وتوقع وتباين الخطأفضلاًعن متوسط مربعات خطأ التنبؤ للأنموذج ARMA(٢,١) بحسب طريقة ((**Box & Jenkins**))

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (٢,١) تساوي :

$$Z_t = \emptyset_١ Z_{t-١} + \emptyset_٢ Z_{t-٢} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

اماالصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \emptyset_١ Z_{t+L-١} + \emptyset_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} + a_{t+١} - θ_١ a_t$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = Ø_١ Z_{t+١} + Ø_٢ Z_t + a_{t+٢} - θ_١ a_{t+١}$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_{t}(L) = E [Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \dots]$$

عندما ((L=١)) فان :

$$\hat{Z}_{t}(١) = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} – θ_١ a_t$$

عندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_{t}(٢) = Ø_١ \hat{Z}_{t}(١) + Ø_٢ Z_t$$

وبصورة عامة

$$\hat{Z}_{t}(L) = Ø_١ \hat{Z}_{t}(L-١) + Ø_٢ \hat{Z}_{t}(L-٢) \qquad L \geq ٣ \qquad \dots (٢.٧٠)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t (L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t}(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t (١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t}(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E [e_t (١)] = ٠$$

$$Var [e_t (١)] = E [e_t (١)]^2 = σ_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ(MSEF) فتتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E [Z_{t+L} - Z_t (L)]^2$$

عندما L=١ فان :

$$MSEF = E [Z_{t+١} – Z_t (١)]^2$$

$$= E[e_t(1)]^2$$
$$= Var[e_t(1)]$$
$$= Var[a_{t+1}] = \sigma a^2$$

اما بحسب طريقة ((**Ansely**)) فيمكن حساب التنبؤ على النحو الآتي :

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (٢,١) تساوي :

$$Z_t = \varnothing_1 Z_{t-1} + \varnothing_2 Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \varnothing_1 Z_{t+L-1} + \varnothing_2 Z_{t+L-2} + a_{t+L} - \theta_1 a_{t+L-1}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+1} = \varnothing_1 Z_t + \varnothing_2 Z_{t-1} + a_{t+1} - \theta_1 a_t$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+2} = \varnothing_1 Z_{t+1} + \varnothing_2 Z_t + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1}$$

اما الصيغة العامة للتنبؤ فهي

$$\hat{Z}_{t+L} = \hat{\varnothing}_1 Z_{t+L-1} + \hat{\varnothing}_2 Z_{t+L-2} + a_{t+L} - \hat{\theta}_1 a_{t+L-1}$$

عندما ((L=١)) فان :

$$\hat{Z}_{t+1} = \hat{\varnothing}_1 Z_t + \hat{\varnothing}_2 Z_{t-1} - \hat{\theta}_1 a_t + a_{t+1}$$

وعندما ((L=٢)) فان :

$$Z_{t+2} = \varnothing_1 Z_{t(1)} + \varnothing_2 Z_t$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيكون بالصيغة العامة للخطأ التي تساوي :

$$e_{t(L)} = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t(L)}$$

عندما L=١ فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t+١}$$

$$e_t(١) = (\varnothing_١ - \hat{\varnothing}_١) Z_t + (\varnothing_٢ - \hat{\varnothing}_٢) Z_{t-١} - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(١)] = E[(\varnothing_١ - \hat{\varnothing}_١) Z_t + (\varnothing_٢ - \hat{\varnothing}_٢) Z_{t-١} - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t]$$

$$= (\varnothing_١ - \hat{\varnothing}_١) Z_t + (\varnothing_٢ - \hat{\varnothing}_٢) Z_{t-١} - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t$$

$$Var[e_t(١)] = E[(\varnothing_١ - \hat{\varnothing}_١) Z_t + (\varnothing_٢ - \hat{\varnothing}_٢) Z_{t-١} - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t]^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L}]^2$$

عندما ((L=١))فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - \hat{Z}_{t+١}]^2$$

$$= E[e_t(١)]^2$$

$$= Var[e_t(١)]$$

$$= Var[(\varnothing_١ - \hat{\varnothing}_١) Z_t + (\varnothing_٢ - \hat{\varnothing}_٢) Z_{t-١} - (\theta_١ - \hat{\theta}_١) a_t]$$

$$= (\theta_١ - \hat{\theta}_١)^2 \sigma a^2$$

وقد درس ((**Harvey**))) التنبؤ لنماذج ARMA وقد كانت الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \ldots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (٢,١) ARMA تساوي :

$$Z_t = \varnothing_١ Z_{t-١} + \varnothing_٢ Z_{t-٢} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \varnothing_١ Z_{t+L-١} + \varnothing_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١}$$

عندما ((L=١))فان :

$$Z_{t+١} = Ø_١\ Z_t + Ø_٢\ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١\ a_t$$

اما عندما ((L=٢)) فان

$$Z_{t+٢} = Ø_١\ Z_{t+١} + Ø_٢\ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١\ a_{t+١}$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E\left[\ Z_{t+L}\ /\ Z_t\ , Z_{t-١}, \ldots\ \right]$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+١)} = E\left[\ Z_{t+١}\ /\ Z_t\ , Z_{t-١}, \ldots\ \right] = Ø_١ Z_t + Ø_٢\ Z_{t-١} - \theta_١ a_t$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+٢)} = E\left[\ Z_{t+٢}\ /\ Z_t\ , Z_{t-١}, \ldots\ \right]$$
$$= Ø_١\ \hat{Z}_{t\,(١)} + Ø_٢\ Z_t$$

اذن بصورة عامة

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = Ø_١\ \hat{Z}_{t\,(L-١)} + Ø_٢\ Z_t \qquad L \geq ٢ \qquad \ldots\ldots(٢.٧١)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error))فيتم على النحو الآتي:

$$e_t\,(L) = Z_{t+L} - \overset{t}{Z}_{(t+L)}$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t\,(١) = Z_{t+١} - \overset{t}{Z}_{(t+١)}$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E\left[e_t\,(١)\ \right] = ٠$$

$$Var\left[e_t\,(١)\ \right] = E\left[e_t\,(١)\ \right]^2 = \sigma a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2$$

عندما ((L=١))فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)]^2$$
$$= E[a_{t+١}]^2 = E[e_t(١)]^2$$
$$= Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

اما بحسب طريقة ((**Nazem**)) فيحسب التنبؤ للأنموذج(٢,١) ARMA إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_t(L) = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \ldots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (ARMA (٢,١ يساوي :

$$Z_t = Ø_١ Z_{t-١} + Ø_٢ Z_{t-٢} + a_t - \theta_١ a_{t-١}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = Ø_١ Z_{t+L-١} + Ø_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١} + \delta$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١ a_t + \delta$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = Ø_١ Z_{t+١} + Ø_٢ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١} + \delta$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z_t(L) = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \ldots]$$

عندما ((L=١)) فان :

$$\hat{Z}_t(١) = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} - θ_١ a_t + δ$$

اما عندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_t(٢) = Ø_١ \hat{Z}_t(١) + Ø_٢ Z_t + δ$$

وبصورة عامة

$$\hat{Z}_t(L) = \hat{Z}_t(L-١) + Ø_٢ \hat{Z}_t(L-٢) + δ \qquad L \geq ٢ \qquad ...(٢.٧٢)$$

اما حساب خطأ التنبؤ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ

$$E[e_t(١)] = ٠$$
$$Var[e_t(١)] = E[e_t(١)]^2 = σ_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ(MSEP) فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2$$

عندما ((L=١)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - \hat{Z}_t(t+١)]^2$$
$$= E[e_t(١)]^2$$
$$= Var[e_t(١)]$$
$$= Var[a_{t+١}] = σ_a^2$$

٣ – ٥ الأنموذج ARMA (١,٢)

يمكن حساب التنبؤ وخطأ التنبؤ وتوقع وتباين الخطأ فضلاً عن متوسط مربعات خطأ التنبؤ للأنموذج ARMA(١,٢) بحسب طريقة ((**Box & Jenkins**))

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (١,٢) تساوي :

$$Z_t = \text{Ø}_١ \ Z_{t-١} + a_t - \theta_١ a_{t-١} - \theta_٢ a_{t-٢}$$

اماالصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \text{Ø}_١ \ Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١} - \theta_٢ a_{t+L-٢}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = \text{Ø}_١ Z_t + a_{t+١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = \text{Ø}_١ Z_{t+١} + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١} - \theta_٢ a_t$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_{t}(L) = E [Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \ldots]$$

عندما ((L=١)) فان :

$$\hat{Z}_t(١) = \text{Ø}_١ Z_t - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_t(٢) = \text{Ø}_١ \ \hat{Z}_t(١) - \theta_٢ a_t$$

وبصورة عامة

$$\hat{Z}_t(L) = \hat{Z}_t(L-١) \qquad L \geq ٣ \qquad \ldots (٢.٧٣)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي:

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(1)] = 0$$

$$Var[e_t(1)] = E[e_t(1)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2$$

عندما ((L=1)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1)]^2$$
$$= E[e_t(1)]^2$$
$$= Var[e_t(1)]$$
$$= Var[a_{t+1}] = \sigma_a^2$$

اما بحسب طريقة ((**Ansely**)) فيمكن حساب التنبؤللأنموذج ARMA(1,2) على النحو الآتي :

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (1,2) تساوي :

$$Z_t = \emptyset_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \emptyset_1 Z_{t+L-1} + a_{t+L} - \theta_1 a_{t+L-1} - \theta_2 a_{t+L-1}$$

عندما ((L = 1)) فان :

$$Z_{t+1} = \emptyset_1 Z_t + a_{t+1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1}$$

عندما ((L = 2)) فان :

$$Z_{t+2} = \emptyset_1 Z_{t+1} + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} - \theta_2 a_t$$

اما الصيغة العامة للتنبؤ فهي

$$\hat{Z}_{t+L} = \hat{\emptyset}_1 Z_{t+L-1} + a_{t+L} - \hat{\theta}_1 a_{t+L-1} - \hat{\theta}_2 a_{t+L-2}$$

عندما ((L=1)) فان :

$$\hat{Z}_{t+1} = \hat{\emptyset}_1 Z_t + a_{t+1} - \hat{\theta}_1 a_t - \hat{\theta}_2 a_{t-1}$$

وعندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_{t+2} = \hat{\emptyset}_1 Z_{t+1} + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} - \theta_2 a_t$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي:

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L}$$

عندما L=١ فان :

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_{t+1}$$

$$= (\emptyset_1 - \hat{\emptyset}_1) Z_t - (\theta_1 - \hat{\theta}_1) a_t - (\theta_2 - \hat{\theta}_2) a_{t-1}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(1)] = E[(\emptyset_1 - \hat{\emptyset}_1) Z_t - (\theta_1 - \hat{\theta}_1) a_t - (\theta_2 - \hat{\theta}_2) a_{t-1}]$$

$$= (\emptyset_1 - \hat{\emptyset}_1) Z_t - (\theta_1 - \hat{\theta}_1) a_t - (\theta_2 - \hat{\theta}_2) a_{t-1}$$

$$Var[e_t(1)] = E[(\emptyset_1 - \hat{\emptyset}_1) Z_t - (\theta_1 - \hat{\theta}_1) a_t - (\theta_2 - \hat{\theta}_2) a_{t-1}]^2$$

اما بالنسبة لحساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L}]^2$$

عندما L=١ فان :

$$MSEF = E[Z_{t+1} - \hat{Z}_{t+1}]^2$$

$$= E[e_t(1)]^2$$

$$= Var[e_t(1)]$$

$$= Var[(\emptyset_1 - \hat{\emptyset}_1) Z_t - (\theta_1 - \hat{\theta}_1) a_t - (\theta_2 - \hat{\theta}_2) a_{t-1}]$$

$$= [(\theta_{١} - \theta_{١})^2 +(\theta_{٢} - \theta_{٢})^2] \sigma_a^2$$

اماحساب التنبؤ للأنموذج ARMA(١,٢) وفقاً لطريقة ((**Harvey**)) إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E [Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \dots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (ARMA (١,٢ تساوي :

$$Z_t = \varnothing_{١} Z_{t-١} + a_t - \theta_{١} a_{t-١} - \theta_{٢} a_{t-٢}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \varnothing_{١} Z_{t+L-١} + a_{t+L} - \theta_{١} a_{t+L-١} - \theta_{٢} a_{t+L-٢}$$

عندما L=١ فان :

$$Z_{t+١} = \varnothing_{١} Z_t + a_{t+١} - \theta_{١} a_t - \theta_{٢} a_{t-١}$$

اما عندما L=٢ فان

$$Z_{t+٢} = \varnothing_{١} Z_{t+١} + a_{t+٢} - \theta_{١} a_{t+١} - \theta_{٢} a_t$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E [Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \dots]$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+١)} = E [Z_{t+١} / Z_t , Z_{t-١} , \dots] = \varnothing_{١} Z_t - \theta_{١} a_t - \theta_{٢} a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

t

$$\hat{Z}_{t}(٢) = E[Z_{t+٢} / Z_t, Z_{t-١}, \ldots]$$

$$= \varnothing_١ \hat{Z}_t(١) - \theta_١ a_t$$

اذن بصورة عامة

$$\hat{Z}_{t}(L) = \varnothing_١ \hat{Z}_t(L-١) \qquad L \geq ٣ \qquad \ldots\ldots(٢.٧٤)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t}(L)$$

عندما L=١ فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t}(١)$$

$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(١)] = ٠$$

$$Var[e_t(١)] = E[e_t(١)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - Z_t(L)]^2$$

عندما ((L=١)) فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - Z_t(١)]^2$$

$$MSEF = E[a_{t+١}]^2 = E[e_t(١)]^2$$

$$MSEF = Var[a_{t+1}] = \sigma_a^2$$

اما بحسب طريقة ((**Nazem**)) فيحسب التنبؤ للأنموذج(١,٢) ARMA إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_t(L) = E[Z_{t+L} / Z_t, Z_{t-1}, \ldots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (١,٢) ARMA يساوي :

$$Z_t = \varnothing_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \varnothing_1 Z_{t+L-1} + a_{t+L} - \theta_1 a_{t+L-1} - \theta_2 a_{t+L-1} + \delta$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+1} = \varnothing_1 Z_t + a_{t+1} - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t+1} + \delta$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+2} = \varnothing_1 Z_{t+1} + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} - \theta_2 a_t + \delta$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_t(L) = E[Z_{t+L} / Z_t, Z_{t-1}, \ldots]$$

عندما ((L=١))فان :

$$\hat{Z}_t(1) = \varnothing_1 Z_t - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1} + \delta$$

اما عندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_t(2) = \varnothing_1 Z_t(1) - \theta_2 a_t + \delta$$

وبصورة عامة

$$Z_t(L) = Z_t(L-1) + \delta \qquad L \geq 3 \qquad \ldots (٢.٧٥)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ

$$E[e_t(١)] = ٠$$
$$Var[e_t(١)] = E[e_t(١)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ(MSEF) فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E[Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)]^2$$

عندما L=١ فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - Z_{t(١)}]^2$$
$$= E[e_t(١)]^2$$
$$= Var[e_t(١)]$$
$$= Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

٤– ٥ الأنموذج ARMA (٢,٢)

يمكن حساب التنبؤ وخطأ التنبؤ وتوقع وتباين الخطأفضلاً عن متوسط مربعات خطأ التنبؤ للأنموذج ARMA(٢,٢) بحسب طريقة ((**Box & Jenkins**))

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (٢,٢) تساوي :

$$Z_t = Ø_١ Z_{t-١} + Ø_٢ Z_{t-٢} + a_t - \theta_١ a_{t-١} - \theta_٢ a_{t-٢}$$

اماالصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = Ø_١ Z_{t+L-١} + Ø_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١} - \theta_٢ a_{t+L-٢}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = \varnothing_١ Z_{t+١} + \varnothing_٢ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١} - \theta_٢ a_t$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_{t}(L) = E [Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-١} , \ldots]$$

عندما ((L=١)) فان :

$$\hat{Z}_t(١) = \varnothing_١ Z_t + \varnothing_٢ Z_{t-١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L=٢)) فان :

$$\hat{Z}_t(٢) = \varnothing_١ \hat{Z}_t(١) + \varnothing_٢ Z_t - \theta_٢ a_t$$

وبصورة عامة

$$\hat{Z}_t(L) = \varnothing_١ \hat{Z}_t(L-١) + \varnothing_٢ \hat{Z}_t(L-٢) \qquad L \geq ٣ \qquad \ldots (٢.٧٦)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - Z_t(١)$$

$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E [e_t(١)] = ٠$$

$$Var [e_t(١)] = E [e_t(١)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ(MSEF) فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E [Z_{t+L} - Z_t(L)]^2$$

عندما $L=١$ فان :

$$MSEF = E[Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)]^2$$
$$= E[e_t(١)]^2 = Var[e_t(١)]$$
$$= Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

اما بحسب طريقة ((**Ansely**)) فيمكن حساب التنبؤللأنموذج ARMA(٢,٢) على النحو الآتي :

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج ARMA (٢,٢) تساوي :

$$Z_t = \emptyset_١ Z_{t-١} + \emptyset_٢ Z_{t-٢} + a_t - \theta_١ a_{t-١} - \theta_٢ a_{t-٢}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = \emptyset_١ Z_{t+L-١} + \emptyset_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١} - \theta_٢ a_{t+L-٢}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = \emptyset_١ Z_t + \emptyset_٢ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = \emptyset_١ Z_{t+١} + \emptyset_٢ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١} - \theta_٢ a_t$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_{t+L} = \hat{\emptyset}_١ Z_{t+L-١} + \hat{\emptyset}_٢ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ \hat{a}_{t+L-١} - \theta_٢ \hat{a}_{t+L-٢}$$

عندما ((L=١)) فان :

$$Z_{t+١} = \emptyset_١ Z_t + \hat{\emptyset}_٢ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١ \hat{a}_t - \theta_٢ \hat{a}_t$$

وعندما ((L=٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = \hat{\emptyset}_١ Z_{t+١} + \hat{\emptyset}_٢ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١ \hat{a}_{t+١} - \theta_٢ \hat{a}_t$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error))فيتم على النحو الآتي:

$$e_{t(L)} = Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L}$$

عندما $L=١$ فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_{t+١}$$

$$=(\text{Ø}_1-\text{Ø}_1)Z_t+(\text{Ø}_2-\text{Ø}_2)Z_{t-1}-(\theta_1-\theta_1)a_t-(\theta_2-\theta_2)a_{t-1}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(1)]=E[(\text{Ø}_1-\hat{\text{Ø}}_1)Z_t+(\text{Ø}_2-\hat{\text{Ø}}_2)Z_{t-1}-(\theta_1-\hat{\theta}_1)a_t-(\theta_1-\hat{\theta}_1)a_{t-1}]$$

$$=(\text{Ø}_1-\hat{\text{Ø}}_1)Z_t+(\text{Ø}_2-\hat{\text{Ø}}_2)Z_{t-1}-(\theta_1-\hat{\theta}_1)a_t-(\theta_1-\theta_1)\hat{a}_{t-1}$$

$$Var[e_t(1)]=E[(\text{Ø}_1-\hat{\text{Ø}}_1)Z_t+(\text{Ø}_2-\hat{\text{Ø}}_2)Z_{t-1}-(\theta_1-\hat{\theta}_1)a_t-(\theta_2-\hat{\theta}_2)a_{t-1}]^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = E[Z_{t+L}-\hat{Z}_{t+L}]^2$$

عندما $L=1$ فان :

$$MSEF = E[Z_{t+1}-\hat{Z}_{t+1}]^2$$

$$= E[e_t(1)]^2$$

$$= Var[e_t(1)]$$

$$=Var[(\text{Ø}_1-\hat{\text{Ø}}_1)Z_t+(\text{Ø}_2-\hat{\text{Ø}}_2)Z_{t-1}-(\theta_1-\theta_1)\hat{a}_t-(\theta_2-\theta_2)\hat{a}_{t-1}]$$

$$=[(\theta_1-\theta_1)^2+(\theta_2-\theta_2)^2]\sigma a^2$$

اماحساب التنبؤ للأنموذج ARMA(2,2) فيكون وفقاً لطريقة ((**Harvey**)) إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E[Z_{t+L} / Z_t , Z_{t-1}, \ldots]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (ARMA (2,2 يساوي :

$$Z_t = \text{Ø}_1 Z_{t-1} + \text{Ø}_2 Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

اما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = Ø_١\ Z_{t+L-١} + Ø_٢\ Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١ a_{t+L-١} - \theta_٢ a_{t+L-٢}$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$Z_{t+١} = Ø_١ Z_t + Ø_٢\ Z_{t-١} + a_{t+١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$Z_{t+٢} = Ø_١ Z_{t+١} + Ø_٢\ Z_t + a_{t+٢} - \theta_١ a_{t+١} - \theta_٢ a_t$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = E[\ Z_{t+L} / Z_t, Z_{t-١}, \ldots\ ]$$

عندما ((L = ١)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+١)} = E[\ Z_{t+١} / Z_t, Z_{t-١}, \ldots] = Ø_١ Z_t + Ø_٢\ Z_{t-١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١}$$

عندما ((L = ٢)) فان :

$$\overset{t}{Z}_{(t+٢)} = E[\ Z_{t+٢} / Z_t, Z_{t-١}, \ldots\ ]$$
$$= Ø_١\ \hat{Z}_{t}(١) + Ø_٢\ Z_t - \theta_١ a_t$$

اذن بصورة عامة

$$\overset{t}{Z}_{(t+L)} = Ø_١\ \hat{Z}_t(L-١) + Ø_٢\ \hat{Z}_t(L-٢) \qquad L \geq ٣ \qquad \ldots\ldots(٢.٧٧)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \overset{t}{Z}_{(t+L)}$$

عندما L=١ فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \overset{t}{Z}_{(t+١)}$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ :

$$E[e_t(١)\ ] = ٠$$

$$Var\,[e_t(١)\,] \;=\; E\,[e_t\,(١)\;]^2 = \sigma_a{}^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ (MSEF) فيتم على النحو الآتي إذ ان الصيغة العامة تساوي :

$$MSEF = \;E\,[\;Z_{t+L} - Z_t\,(L)\;]^2$$

عندما $L=١$ فان :

$$MSEF = \;E\,[\;Z_{t+١} - \hat{Z}_t\,(١)\;]^2$$

$$= \;E\,[\;a_{t+١}\,]^2 = E\,[e_t\,(١)\;]^2$$

$$= Var\,[a_{t+١}\,] \wedge$$

$$= \sigma_a{}^2$$

اما بحسب طريقة ((**Nazem**)) فيحسب التنبؤ للأنموذج(٢,٢) ARMA إذ ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$Z_{t\,(L)} \;=\; E\,[\;Z_{t+L} \;/\; Z_t\;, Z_{t-١}\,, \ldots\;]$$

بما ان الصيغة الرياضية للأنموذج (٢,٢) ARMA يساوي :

$$Z_t = Ø_١\;Z_{t-١} + Ø_٢\;Z_{t-٢} \;+ a_t - \theta_١\,a_{t-١} \;- \theta_٢\,a_{t-٢}$$

ا

ما الصيغة العامة للأنموذج بدلالة القيم المستقبلية فتكتب

$$Z_{t+L} = Ø_١\,Z_{t+L-١} + Ø_٢\;Z_{t+L-٢} + a_{t+L} - \theta_١\,a_{t+L-١} - \theta_٢\,a_{t+L-١} \;+\; \delta$$

عندما (($L = ١$)) فان :

$$Z_{t+١} \;= Ø_١\,Z_t \,+ Ø_٢\;Z_{t-١} \;+ a_{t+١} \,- \theta_١\,a_t - \theta_٢\,a_{t+١} + \;\delta$$

عندما (($L = ٢$)) فان :

$$Z_{t+٢} \;=\; Ø_١\,Z_{t+١} + Ø_٢\;Z_t + a_{t+٢} \,- \theta_١\,a_{t+١} - \theta_٢\,a_t \;+\; \delta$$

بما ان الصيغة العامة للتنبؤ تساوي :

$$\hat{Z}_t(L) = E[\,Z_{t+L} / Z_t, Z_{t-١}, \ldots\,]$$

عندما L=١ فان :

$$\hat{Z}_t(١) = Ø_١ Z_t + Ø_٢ Z_{t-١} - \theta_١ a_t - \theta_٢ a_{t-١} + \delta$$

اما عندما L=٢ فان :

$$\hat{Z}_t(٢) = Ø_١ \hat{Z}_t(١) + Ø_٢ Z_t - \theta_٢ a_t + \delta$$

وبصورة عامة

$$\hat{Z}_t(L) = Ø_١ \hat{Z}_t(L-١) + Ø_٢ \hat{Z}_t(L-٢) + \delta \qquad L \geq ٣ \qquad \ldots (٢.٧٨)$$

اما حساب خطأ التنبؤ ((Forecast Error)) فيتم على النحو الآتي :

$$e_t(L) = Z_{t+L} - \hat{Z}_t(L)$$

عندما ((L=١)) فان :

$$e_t(١) = Z_{t+١} - \hat{Z}_t(١)$$
$$= a_{t+١}$$

اما توقع وتباين خطأ التنبؤ

$$E[e_t(١)] = ٠$$

$$Var[e_t(١)] = E[e_t(١)]^2 = \sigma_a^2$$

اما حساب متوسط مربعات خطأ التنبؤ(MSEF) فيتم على النحو الآتي :

$$MSEF = E[\,Z_{t+L} - Z_t(L)\,]^2$$

عندما ((L=١)) فان :

$$MSEF = E[\,Z_{t+١} - Z_t(١)\,]^2$$

$$= E[\hat{e}_t(١)]^2$$

$$= Var[e_t(١)]$$

$$= Var[a_{t+١}] = \sigma_a^2$$

الفصـــل الثالـــث

طرائــق المحاكـاة ومونت كار لو

ا- تمهيد

بعد بناء الأنموذج الرياضي لمسألة تحت الافتراض سيكون الخطوة القادمة و هي : ايجاد الحل لهذا الانموذج . الحل اما تحليلي او عددي ،الحل التحليلي نحصل عليه عادة مباشرة من التمثيل الرياضي لصيغة المعادلة اما الحل العددي عامة فهو حل تقريبي نحصل عليه كنتيجة تعويض قيم عددية للمتغيرات والثوابت الموجودة في الانموذج . العديد من الطرق العددية تكرارية أي: إن كل خطوة متعاقبة في الحل نستخدم نتائج الخطوة السابقة مثل :طريقة نيوتن ـرافسن ((Newton - Raphson)) لتقريب الجذور في المعادلات غير الخطية . يوجد نوعان من الطرق العددية هما : المحاكاة ومونت كارلو مصممة لحل المسائل الحسابية والعشوائية .

٢- المحاكاة ((Simulation))

تعرف المحاكاة " بالاطار العام " بأنها تقنية عددية في تصميم التجارب على الحاسوب حيث يتطلب وجود أُنموذج رياضي أو منطقي يصف سلوك نظام لفترة زمنية طويلة .مثل: محاكاة طيران طائرة نفاذة ، ومحاكاة نظام الاتصالات ،و محاكاة رياح الانفاق ،و محاكاة معركة حربية (للتعرف على قدرة الاسلحة الهجومية والدفاعية) ، ومحاكاة عمليات الصيانة (للتعرف على العدد الافضل لطاقم التصليح) .

و احياناً ينظر الى المحاكاة بأنها " طريقة آخر المطاف " تُستخدم بعد ان يفشل أي شيء آخر .بناء البرامج الجاهزة ((Software)) والتطور التكنولوجي جعل المحاكاة الاوسع استخداماً وجعلها مقبولة لدى المصممين في تحليل الانظمة وبحوث العمليات .

اما المحاكاة " بالاطار الضيق " فتعرف بعرض تجارب المعاينة بوجود أُنموذج يمثل نظام وهذا يشمل معاينة المتغيرات العشوائية من توزيع احتمالي في تحليل مسائل تحليل التجارب الاحصائية .

٣ – محاكاة مونت كارلو ((Monte-Carlo Simulation))

المحاكاة العشوائية تسمّى أيضاً بمحاكاة مونت كارلو؛ لان المعاينة من توزيع احتمالي معين يتطلب استخدام ارقام عشوائية . تاريخياً اعتبرت محاكاة مونت كارلو بوصفها تقنية تستخدم الارقام الزائفة لحل أُنموذج وهذه الارقام عادة هي متغيرات عشوائية مستقلة وذات توزيع متجانس في الفترة [٠,١] .

في مراكز الحاسبات توجد شفرات حسابية تظهر الارقام من صفر الى تسعة باحتمالات متساوية تقريباً ، هذه الشفرات تسمّى مولدات الارقام العشوائية .

في بداية القرن العشرين استخدمت طرق مونت كارلو في فحص معادلة بولتزمان ((Boltzmann))،في العام (١٩٠٨) استخدم الاحصائي المشهور غوست ((Gusset)) طرق مونت كارلو في تخمين معامل الارتباط في توزيع(t) ((Student)) . احدى المسائل التي ارتبطت بطرق مونت كارلو هي ابرة بوفن ((Buffon)) الشهيرة التي وجد ان احتمال ابرة طولها (L)ترمى عشوائياً وتستقر في شق على الارض ذي عرض (D) (D>L) هو ((P = ٢L/πD)) حيث قدر هذا الاحتمال كنسبة عدد المرات التي تستقر بها الابرة في الشق الى العدد الكلي لمرات الرمي .

كلمة مونت كارلو نسبت الى العالمين فون نيومان والم ((Von Newmann & Ulam)) خلال الحرب العالمية الثانية كشفرة لعمل سري في مدينة لوس الماس مقترح من كازينوهات القمار في مدينة مونت كارلو عاصمة موناكو . وبعدها استخدمت طرائق مونت كارلو في مسائل لها علاقة بالقنبلة الذرية إذ كان العمل يتطلب محاكاة السلوك العشوائي للنيترون وانتشاره وقد تم اختبار هذا السلوك من خلال انتشار النيترون في نوع من الاقمشة النسائية .

بعدها استخدمت طرائق مونت كارلو في حساب التكاملات المتعددة وحلول المعادلات التفاضلية والتكاملية والمسائل العشوائية والحسابية وتخمين المعلمات في مسائل الخطوط والشبكات ومسائل توليد المتغيرات العشوائية من التوزيعات الاحتمالية وتحليل المسائل المعقدة .

٤- مولدات الارقام العشوائية

((Random Number Generator))

في الاونة الاخيرة اقترحت واختبرت واستخدمت تقنيات عديدة لتوليد الارقام العشوائية بوساطة الحاسوب بطرائق المحاكاة ومونت كارلو . وبعض التقنيات اعتمدت على ظواهر عشوائية وبعضها اساليب عكسية حسابية .

في البداية استخدمت طرقا يدوية لتوليد سلسلة من الارقام مثل :رمي قطعة نقود وقذف نرد و تمشيط ورق اللعب وتدوير عجلة الروليت ، ولكن هذه الطرق بطيئة للاستخدام العام وتفتقر الى

قابلية التجديد . وبعد فترة وبمساعدة الحاسوب اصبح بالامكان الحصول على ارقام عشوائية .

ففي العام (١٩٥١) قدّم فون نيومان ((Von Newmann)) طريقة متوسط المربعات باستخدام العمليات الحسابية للحاسوب و كانت الفكرة ان ياخذ مربع العدد العشوائي السابق ويسحب الارقام الوسطية منه . مثلاً اذا اردنا ان نولد اعداد ذات اربعة ارقام :

١-اختيار عدد ذي اربعة ارقام وليكن ((٥٢٣٢)) .

٢- نربع العدد فنحصل على ((٢٧٣٧٣٨٢٤)) .

٣- العدد ذو الارقام الاربعة التالي ستكون من الارقام الوسطية في الخطوة (٢) وهو العدد ((٣٧٣٨)) .

٤- كرر العملية .

اثبت ان طريقة فون نيومان بطيئة وغير صالحة للتحليل الاحصائي فضلاًعن ان السلسلة العددية تميل الى الدورية وتتوقف عندما يكون الصفر اول الارقام الوسطية .

في العام (١٩٥٥) ابتكرت شركة (RAND) طريقة نشر جدول يضم ملايين الارقام العشوائية في ذاكرة الحاسبات ومن منافع هذه الطريقة ان لها قابلية التجديد .اما مساوىء الطريقة فانها تفتقر الى السرعة ومخاطر استنفاذ الجدول .

بصورة عامة نقول: إن الطريقة لتوليد الارقام العشوائية جيدة اذا كانت الارقام العشوائية مستقلة ومتجانسة التوزيع ولها قابلية التجديد فضلاً عن كونها سريعة وتحتل اقل ما يمكن من المساحة في ذاكرة الحاسوب .اما طرائق التطابق ((Congruential Methods)) لتوليد الارقام العشوائية الزائفة فمصممة خصيصاً لتحقيق قدر الامكان هذه المتطلبات .

٥ – المولدات المتطابقة ((Congruential Generators))

الطريقة الاوسع استخداماً لتوليد الارقام العشوائية الزائفة هي الطريقة التي تعطي سلسلة غير عشوائية من الارقام بحسب معادلة عكسية تعتمد على حساب معامل البواقي لعدد صحيح في تحويل خطي ، إذ يلاحظ ان كل حد من السلسلة معطى مسبقاً قبل توليد السلسلة .

وعلى الرغم من ان هذه العملية حسابية تماماً استطاع كنيث ((Knuth)) [٢٠]في العام (١٩٦٩)ان يبين ان الارقام المولدة لهذه السلسلة هي متجانسة التوزيع ومستقلة احصائياً . اماطرائق التطابق فتعتمد على مفهوم علاقة التطابق وبالصيغة الآتية : [٢٢]

$$X_{i+١} = (a\, x_i + c) (\bmod\ m) \quad , \ i= ١,٢,\ldots,m \qquad \ldots.(٣.١)$$

إذ يـــــدعى (a) بالمضـــــاعف ((Multiplier)) و(c) بالاضـــــافة ((Increment))
و(m)بالمعامـل ((Modulus)) وان كـلاً مـن (a,c,m) هـي اعـداد صـحيحة غـير سـالبة ، (mod m) يعني ان المعادلة (٣.١) يمكن ان تكتب بالصورة الآتية :

$$X_{i+١} = a\, x_i + c - m \left[\frac{axi+c}{m} \right] \ldots..(٣.٢)$$

إذ [Z]هو اكبر عدد صحيح في Z .

فاذا علم ($x_١$) مع تثبيت قيم (a,c,m) فان المعادلة (٣.٢) تعطي علاقة التطابق للسلسلة ($x_١$) لجميع قيم (i). وان السلسلة (x_i) سوف تعيد نفسها (m) من الخطوات على الاغلب وبعدها ستكون دورية ، والارقام العشوائية من الفترة (٠,١) نحصل عليها من العلاقة الآتية :

$$U_i = \frac{x_i}{m} \ \ldots..(٣.٣)$$

فمثلا" ليكن (($x_١ = a = c = ٣$)) و (($m = ٥$)) فان السلسلة الناتجة من الصيغة العكسية :

$$X_{i+١} = (٣\, x_i + ٣) (\bmod\ ٥)$$

هي : $x_i = ٣ , ٢ , ٤ , ٠ , ٣$

ويلاحظ من العلاقة (٣.٣) ان (($x_i < m$)) لجميع قيم ((i)) هذه المتباينة تعني ان دورية المولد لا تتعدى ((m)) أي ان السلسلة ((x_i)) تضم على الاغلب ((m)) من الارقام المختلفة . وعليه يجب ان نختار ((m))كبيرة قدر الامكان ؛لضمان الحصول على دورية ذات سلسلة كبيرة من الارقام المختلفة .

ذكر في الموسوعة العلمية ان الحصول على نتائج احصائية جيدة من الحاسوب هو اختبار :

$$m = ٢^{٣٥}, \ c = ١ \ , a = ٢^{٧} + ١$$

٦ – معاينة التوزيع الطبيعي

((Sampling From Normal Distribution))

يقال للمتغير العشوائي X بانه يتوزع طبيعياً والذي يرمز له بالرمز $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ اذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

عندما تكون $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ نقول ان X له التوزيع الطبيعي القياسي أي ان $X \sim N(0, 1)$. والعلاقة بين $N(\mu, \sigma^2)$ و $N(0, 1)$ هي :

إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فان $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

أيضاً متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط ٠ وتباين ١ أي ان $Y \sim N(0, 1)$

توجد في الموسوعة العلمية اكثر من (١٢) طريقة مشهورة لتوليد عينات من المتغيرات العشوائية تتبع التوزيع الطبيعي . سوف نستعرض بعض الاساليب منها :

١– اسلوب بكس – ملر ((١٩٥٨ Box-Muller)) .[١٤]

٢– اسلو ب طريقة القبول – الرفض ((Acceplance – Rejection Method)) .

٣- اسلوب نظرية الغاية المركزية ((Central Limit Theorem)) .

٤- اسلوب توشر ((١٩٦٣ Tocher)) .

وقد استخدم اسلوب بكس – ملر وتطبيقه في الرسالة وتم توضيح هذا الاسلوب مع الاشتقاق وكتابة الخوارزمية في الملحق ((Appendix)).

٧- الجانب التجريبي

تضمن الجانب التجريبي القيام باربع تجارب محاكاة بحجوم عينات مختلفة وبتكرار ٥٠٠ ، وقمت بعمل برامج محاكاة على الحاسبة الالكترونية P ٤ بلغة بيسك .

و استخدمت اسلوب المحاكاة للمقارنة بين طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لان سائر الطرق متطابقة مع طريقة ((Box & Jenkins)) .

١ – ٧ التجربة الاولى

وصف التجربة

تضمنت التجربة الاولى توليد سلسلة زمنية (١,١)ARMA بحيث ان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي (٠,١)N للمعادلة (٢.١٤)،وطبقاً لصيغة بكس–ملر ((Box-Muller)) الموضحة في الملحق تم احتساب التنبؤ بطريقة ((Box &Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لازواج ا لقيم (θ١ ,Ø١) المختلفة التي تقع ضمن منطقة الاستقرارية والانعكاسية(-٠.٧,-٠.٩) ، (-٠.٨,-٠.٦)،(-٠.٥,٠.٥) ، (-٠.٣,٠.٦) ، (٠.٤,٠.٧) ، (-٠.٧,-٠.٢) ، (٠.٨,٠.٥) وحجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة ((n=١٠,٢٥,٥٠,١٠٠,١٥٠)) وكررت التجربة (٥٠٠) مرة (R=٥٠٠) ، و اعطى كل زوج من الازواج (Ø١, θ١) تحت n معينة و (R=٥٠٠) ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L ((L=١,٢,٣,٤,٥,٦,٧,٨,٩))، وتم احتساب متوسط هذه القيم وباستخدام المعادلتين (٢.٦٠)و(٢.٦١)تم احتساب الخطأ المطلق ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ وكما موضح في الجدول (١) .

نتائج التجربة

من ملاحظة الجدول (١) وملاحظتنا الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ للقيم التنبؤية بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) وجدنا ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) كانت افضل من طريقة ((Box & Jenkins)) و لقيم الازواج ($Ø_1$, $θ_1$) جميعاً وحجوم العينات n .

جدول (1)

يبين متوسط القيم التنبؤية للانموذج ARMA(1,1) تحت Ø، θ ، n محددة وبتكرار ٥٠٠

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E
10	Ø١= -٠.٩ θ١ = -٠.٧	1.16632	0.07356	1.09276	0.85860	0.74015	0.74386	0.00371	0.05601
	Ø١= -٠.٦ θ١ = -٠.٨	1.40317	0.00478	1.39839	1.33530	0.75952	0.83848	0.07896	0.00004
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٥	1.65796	1.20478	0.45318	1.95869	0.10080	0.42284	0.32204	0.19637
	Ø١= -٠.٣ θ١ =٠.٦	٠.٠٣٨٤٠	0.34982	0.31142	1.58193	1.42710	1.44891	0.02181	0.12342
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.00116	0.07396	0.07280	0.67542	0.77825	0.77744	0.00081	٠.٠٠٩٣٦
	Ø١= ٠.٧ θ١ = -٠.٢	1.55146	1.07195	0.47951	0.72265	0.11179	0.37937	0.26758	0.09995
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٥	5.03561	0.59446	4.44115	0.51282	0.00077	0.01925	0.01848	0.00058
٢٥	Ø١= -٠.٩ θ١ = -٠.٧	١.٦٧٧٤١	0.06845	1.60896	2.10853	1.20241	1.15493	0.04748	0.00842
	Ø١= -٠.٦ θ١ = -٠.٨	1.74539	0.00365	1.74174	2.57239	1.05722	1.45676	0.39954	0.00002
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٥	4.60819	2.03143	2.57676	7.91162	0.24569	1.22446	0.97877	2.83244
	Ø١= -٠.٣ θ١= ٠.٦	3.61015	1.90328	1.70687	8.55272	0.07685	1.11923	1.04238	2.63509
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.00002	0.15725	0.15723	5.74526	1.32430	1.39414	0.06984	0.06371

	Ø١= ٠.٧ θ١ = -٠.٢	0.08768	1.15148	1.06380	13.5818	2.92069	3.16808	0.24739	1.88260
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٥	١.٠١٠٥٤	1.43948	0.42894	1.19936	0.00394	0.09901	0.09507	0.00584

تابع للجدول (1)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul..var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul..var	Absolute Error	M.S.E.
٥٠	Ø١= -٠.٩ θ١ = -٠.٧	١.٤١٥٤٨	0.07176	1.34372	4.50636	1.18513	1.58690	0.40177	0.00529
	Ø١= -٠.٦ θ١ = -٠.٨	1.05952	0.01652	1.04300	1.37398	1.05867	1.28549	0.22682	0.00005
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٥	0.14490	1.59306	1.44816	21.25041	2.98336	3.96773	0.98437	2.22100
	Ø١= -٠.٣ θ١ =٠.٦	٠.٠٤٢٥٦	1.44533	1.40277	8.55272	2.42566	3.57572	1.15006	2.63509
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٧	1.02435	1.79940	0.77505	2.92470	0.00028	0.14777	0.14749	0.02000
	Ø١= ٠.٧ θ١ = -٠.٢	7.41636	1.36470	6.05166	2.00225	0.17634	0.55017	0.37383	0.45535
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٥	1.63288	1.14720	0.48568	1.56262	0.00475	0.06378	0.05903	0.00173
١٠٠	Ø١= -٠.٩ θ١ = -٠.٧	0.94240	0.06047	0.88193	٢.٢٢٥٦٩	0.96200	1.40656	0.44456	0.00582
	Ø١= -٠.٦ θ١ = -٠.٨	1.05952	0.01652	1.04300	1.83950	0.93845	1.66772	0.72927	0.00023
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٥	0.10301	0.98580	0.88279	9.62864	2.32672	1.56440	0.76232	0.55755
	Ø١= -٠.٣ θ١= ٠.٦	0.02998	0.83110	0.800112	1.38091	1.96852	1.33973	0.56879	0.40535
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.92558	1.27875	0.35317	1.14485	0.00036	0.09136	0.09100	0.00470

	Ø١= ٠.٧ θ١ = -٠.٢	0.12421	3.84165	3.71744	37.23673	6.16413	4.83374	1.33039	14.4317
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٥	١.٤٢٤٤٤	2.09913	0.67469	5.71956	٠.٠٠١٦٢	٠.٢٠٠٦٩	0.19907	0.04956

تابع للجدول (1)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
١٥٠	Ø١= -٠.٩ θ١ = -٠.٧	١.٧٨٤٦٥	٠.٧٨٩٠٣	٠.٩٩٥٦٢	١.٧٨٤١١	١.٥٩٩١١	٠.٠٤٥٣٥	١.٥٥٣٧٦	٠.٠٠٠٥٩٠
	Ø١= -٠.٦ θ١ = -٠.٨	٠.٩٥٩٤١	٠.٠١٧٦٠	٠.٩٤١٨١	١.٧٨٤١١	١.٠٤٦٨٦	٠.٨٩٣٥٦	٠.١٥٣٣٠	٠.٠٠٠٥٩٠
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٥	٤.٣٢٥٧٧	٠.٨٨٠١٥	٣.٤٤٥٦٢	٠.٧٥٨١٥	٠.١٨٥٥٢	٠.٦٧٦٠١	٠.٤٩٠٤٩	٠.٦٣٨١٦
	Ø١= -٠.٣ θ١ =٠.٦	٣.٢٧٦٩٤	٠.٨٥٩٢٠	٢.٤١٧٧٤	٠.٥٩١٤٩	٠.٠٤٦٦١	٠.٥٣١٩٧	٠.٤٨٥٣٦	٠.١٧٤٥٧
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٧	١.٢٦٥٤٦	٠.٨٠٩٥٠	٠.٤٥٥٩٦	٠.٥٩٨٤٤	٠.٠٠٠٣٢	٠.٠٨٣٩٤	٠.٠٨٣٦٢	٠.٠٠٤٩٣
	Ø١= ٠.٧ θ١ = -٠.٢	٥.١٧٨٣٣	٠.٩٨١٤٦	٤.١٩٦٨٧	١.٤٠٢١٦	٠.١٠٢٢٥	٠.٧٠٣٤٨	٠.٦٠١٢٣	٠.٤٣١٦٥
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٥	١.٤٥٢٧٢	٠.٦٤١٦٨	٠.٨١١٠٤	٠.٨٩٩٦٧	٠.٠٠٠٤٢	٠.٠٦٠٤٩	٠.٠٦٠٠٧	٠.٠٠٦٦٩

٢-٧ التجربة الثانية

وصف التجربة

تضمنت التجربة الثانيةتوليد سلسلة زمنية ARMA(٢,١) بحيث ان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي N(٠,١) للمعادلة (٢.٢٣)، وطبقاً لصيغة بكس – ملر ((Box-Muller)) تم احتساب التنبؤ بطريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لازواج القيم (Ø١, Ø٢, θ١) المختلفة التي تقع ضمن منطقة الاستقرارية والانعكاسية (٠.٢,٠.١-,٠.٥-) ، (٠.٨,٠.٦-,٠.٦) ، (٠.٥,٠.٣-,٠.٥-) ، (٠.٦,٠.١,٠.٣-)، (٠.٧,٠.٤-,٠.٤) ، (٠.٢ ,٠.٥-,٠.٧)، (٠.٥,٠.٩-,٠.٨)حجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة وكررت التجربة (٥٠٠) مرة ، إذ اعطى كل زوج من الازواج (Ø١, Ø٢, θ١) تحت n معينة و (R=٥٠٠) ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L وتم احتساب متوسط هذه القيم والخطأ المطلق ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ وكما موضح في الجدول (٢) .

نتائج التجربة

من ملاحظة الجدول (٢) وملاحظتنا الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ للقيم التنبؤية

بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) وجدنا ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) كانت افضل من طريقة((Box & Jenkins)) لقيم الازواج (Ø١, Ø٢, θ١)جميعاً وحجوم العينات n.

جـــدول (2)

يبين متوسط القيم التنبؤية للانموذج(ARMA(2,1 تحت Ø ، θ ، n محددة وبتكرار ٥٠٠

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
10	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٢	٠.٠١٣٠٣	٠.٨٣٠٤٢	0.81739	1.01481	0.25553	0.54695	0.29142	0.26638
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = ٠.٨	٢.٣٦٧٦٤	٠.٨٣٨٨١	1.52883	1.25736	٠.٠٦٤٩١	١.٤٠٤٧٠	1.33979	0.55915
	Ø١= -٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٥	0.00328	1.08302	1.07974	1.48150	٠.٥١٧٩٨	٠.٤٢١٣٢	0.09666	0.14495
	Ø١= -٠.٣ Ø٢=٠.١ θ١=٠.٦	٠.٤٣٩٦٠	٠.٣١٧٠٨	0.12252	1.57002	0.01392	1.09328	1.07936	0.11136
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.01866	1.01588	0.99722	0.81549	1.39389	0.58657	0.80732	0.28111
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١ = ٠.٢	٠.٠٣٧٣٧	١.٤١٨٢٤	1.38087	2.77963	0.72911	1.06855	0.33944	1.01133
	Ø١= ٠.٨ Ø٢=-٠.٩ θ١ = ٠.٥	0.00016	2.22224	2.22208	٢.٦٠٩٩٧	٢.٧٠٥٤٢	0.78542	1.92000	0.48718

تابع للجدول (٢)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
25	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٢	٠.٠٢٥٤٩	١.٥١٥٨٨	1.49039	٦.٥٠٤٥٧	٠.٤٤٤٧٨	١.٥٢٨٨٨	1.08410	1.67175
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = ٠.٨	٠.٠٧٤٤١	٢.٥٠٤٣٢	2.42991	١٠.١٤٢٠٥	٢.٣٣٣٥٥	١.٥٤٦٣٦	٠.٧٨٧١٩	٢.٧٧٨٠٥
	Ø١= -٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٥	0.00380	2.63645	2.63265	14.88188	1.00634	1.40669	0.40035	4.23331
	Ø١= -٠.٣ Ø٢=٠.١ θ١=٠.٦	0.03200	1.90290	1.87090	6.67015	0.66233	0.78733	0.12500	1.24156
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.03394	1.95862	1.92468	8.12166	1.53716	1.23408	0.30308	2.30056
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١ = ٠.٢	٠.٠٥٩٢٦	٢.٦٣٤٧٥	2.57549	12.89479	٠.٨٣٧٩٥	٢.٩٣٤٦٣	2.09668	4.67685
	Ø١= ٠.٨ Ø٢=-٠.٩ θ١ = ٠.٥	٠.٠٠٠٣٢	٣.٨٩٦٨٤	٣.٨٩٦٥٢	١٦.٣٠٧٠٤	٢.٢٨٨٩٥	١.٣٦٩٠٨	٠.٩١٩٨٧	٢.٨١٧٤٠

تابع للجدول (2)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
50	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٢	٠.٠٤٩٧٢	١.١٥٥٥٠	1.10578	6.79717	٠.٩٧٤١٧	١.٦١٧٧٥	0.64358	١.٤٧٤٣٩
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = ٠.٨	٠.٠٧٧١٦	١.٧٩٤٧١	1.71755	٢.٠٩٢٣٦	٢.٢٨٢٠٦	١.٣٠٠٥٠	0.98156	1.10037
	Ø١= -٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٥	0.00164	4.34216	4.34052	17.04417	0.80515	1.03753	0.23238	1.88035
	Ø١= -٠.٣ Ø٢=٠.١ θ١=٠.٦	0.03012	3.56589	3.53577	15.37739	0.52815	0.68065	0.15250	0.48250
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.03561	1.52523	1.48962	2.24285	1.40593	1.52523	0.11930	1.07307
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١ = ٠.٢	٠.٠٨٢٠٣	١.١٠٨٧٠	1.02667	5.19388	١.٠١٥٢٨	١.٦٨٦٩٦	0.67168	1.56415

	Ø١= ٠.٨ Ø٢=-٠.٩ θ١ = ٠.٥	٤.٧٨١٥٨	١.٤١٨٨٠	3.36278	١٣.٥٨٨٥٦	٠.٠٠٤٦٤	٣.٢٠٩٢٤	٣.٢٠٤٦٠	١.٠١٦٠٨

تابع للجدول (2)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
100	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٢	٠.٠٤١٣٣	١.٨١٩٠٣	1.77770	40.65982	٠.٨١٧٦٢	٣.٥٩٧٩٣	2.78031	٢.٨٦٤٨١
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = ٠.٨	٠.٠٧٠٢٨	١.٨٥٤٩٦	١.٧٨٤٦٨	٦.٠٧٧٨٤	٢.١٥١٧٩	٠.٥٦٣٠٣	١.٥٨٨٧٦	٠.١٦٨٣٧
	Ø١= -٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٥	0.00097	1.70488	1.70391	4.10032	0.95044	0.98037	0.02993	0.64512
	Ø١= -٠.٣ Ø٢=٠.١ θ١=٠.٦	0.28098	1.75853	1.47755	1.85004	0.48696	0.51661	0.02965	0.12460
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٤ θ١ = ٠.٧	0.04134	1.54342	1.50208	3.00143	1.51805	0.61510	0.90295	0.16396

	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١ = ٠.٢	٠.٨٤٥٩٠	٣.٧٦١٢١	2.91531	43.09243	٠.٠٧٣٥٢	٢.٢٣٥٥٧	2.16205	5.91218
	Ø١= ٠.٨ Ø٢=-٠.٩ θ١ = ٠.٥	٣.٣٩٣٧٦	٠.٨١٢٢٧	٢.٥٨١٤٩	٧.٩٨١٨٦	٠.٠٠٤٦٦	١.٨٥٨٨٥	١.٨٥٤١٩	٠.٤٩٢٩٠

تابع للجدول (٢)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul..var	Absolute Error	M.S.E.
١٥٠	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٢	٠.٠٤٢١٩	٠.٧٧٩٨٠	٠.٧٣٧٦١	١.٤٣٨٧٧	٠.٨٤٥٠٨	٠.٩٥٢٨٨	٠.١٠٧٨٠	٠.٧٦٧٦٠
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = ٠.٨	٣.١٩٩١٧	١.٦٦٦١٥	١.٥٣٣٠٢	٢.٧٦٤٣٤	٠.١٠٩٤٥	١.٤٥٣٢٠	١.٣٤٣٧٥	٢.٦٥١٥١
	Ø١= -٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٥	٠.٠٠٠٧٦	٢.٠٨٩٧٦	٢.٠٨٩٠٠	٩.٢٩٥٨٢	١.١١٢٢٧	٢.٤٣٧٣٠	١.٣٢٥٠٣	٢.٥٥٨٧
	Ø١= -٠.٣ Ø٢=٠.١ θ١=٠.٦	٠.٠٤٣٥٦	٠.٨٢٤٣١	٠.٧٨٠٧٥	٠.٦٢٨٠١	٠.٥٩٥٦٣	٠.٦٢٨٧٩	٠.٠٣٣١٦	٠.٢١٦٥

	$Ø_{١}$= ٠.٤ $Ø_{٢}$=-٠.٤ $\theta_{١}$ = ٠.٧	٠.٠٠٥٥٨٩	١.٦٧٤٨٠	١.٦١٨٩١	١.٣٩٩١٢	١.٩٦٨٧٤	١.٥٨١٠٤	٠.٣٨٧٧٠	١.١٠٠٤
	$Ø_{١}$= ٠.٧ $Ø_{٢}$= -٠.٥ $\theta_{١}$ = ٠.٢	٠.٠٢٧٣٨	١.٧٧٥٥١	١.٧٤٨١٣	٢.٦٨٠٨٧	٠.٤١٨٥٨	٠.٠١٠٩٧	٠.٤٢٩٥٥	٠.٠٠٠١٥
	$Ø_{١}$= ٠.٨ $Ø_{٢}$=-٠.٩ $\theta_{١}$ = ٠.٥	٠.٠٣٣١٦	١.١٦٤٨٣	١.١٣١٦٧	٠.٨٦٨٦٨	٠.٥٢٥٦٢	٠.٠١٥٧٥	٠.٥٠٩٨٧	٠.٠٠٠١٧

٣-٧ التجربة الثالثة

وصف التجربة

تضمنت التجربة الثالثة توليد سلسلة زمنية ARMA(١,٢) بحيث ان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي N(٠,١) للمعادلة (٢.٣٤)، وطبقاً لصيغة بكس – ملر ((Box-Muller)) تم احتساب التنبؤ بطريقة ((Box&Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لازواج القيم ($\theta_{١}$, $Ø_{١}$ $\theta_{٢}$,)المختلفة التي تقع ضمن منطقة الاستقرارية والانعكاسية (٠.٨, ٠.١, -٠.٩) ، (-٠.٦, ٠.١, ٠.٢) ، (٠.٩, ٠.٠٥, -٠.٥) ، (٠.٩٥, ٠.٠٢, -٠.٣) ، (٠.٦٥, ٠.٢٥, ٠.٤) ، (٠.٩, -٠.٠٥, ٠.٧) ، (-٠.١, ٠.٨, ٠.٨)حجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرةوكررت التجربة

(٥٠٠) مرة ، وقد اعطى كل زوج من الازواج (Ø١ , θ١, θ٢)تحت n معينة و (R=٥٠٠) ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L وتم احتساب متوسط هذه القيم والخطأ المطلق ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ وكما موضح في الجدول (٣) .

نتائج التجربة

من ملاحظة الجدول (٣) وملاحظتنا الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ للقيم التنبؤية بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) وجدنا ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) كانت افضل من طريقة((Box & Jenkins)) لقيم الازواج (Ø١ , θ١, θ٢) جميعاًوحجوم العينات n.

جدول (3)

يبين متوسط القيم التنبؤية للانموذج ARMA(1,2) تحت Ø ، θ وn محددة وبتكرار ٥٠٠

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
	Ø١= -٠.٩ θ١ = ٠.١ θ٢ =٠.٨	0.06236	1.30880	1.24644	1.94286	0.34322	0.03755	0.30567	0.00206
	Ø١= ٠.٦ θ١ = -٠.١ θ٢ = ٠.٢	٠.٠٤٠٧٦	١.٨٧٣٠٢	1.83226	1.88887	٠.١٠٨٤٥	٠.٠٣٩٨٤	٠.٠٦٨٦١	0.00162
10	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.03914	1.22718	1.18804	0.79069	0.33427	0.01892	0.31535	0.00045

	Ø١= -٠.٣ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.03182	1.37276	1.34094	1.26195	0.40237	0.01729	0.38508	0.00039
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.00155	1.77668	1.77513	3.40255	0.66225	0.01824	0.64401	٠.٠٠٠٣٧
	Ø١= ٠.٧ θ١=-٠.٠٥ θ٢ =٠.٩	0.01794	2.73868	2.72074	3.57545	1.23062	0.02490	1.20572	0.00089
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٨ θ٢ = -٠.١	0.00383	0.79914	0.79531	٠.٩١٧٣	0.28731	0.06941	0.21790	0.00417

تابع للجدول (3)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
25	Ø١= -٠.٩ θ١ = ٠.١ θ٢ =٠.٨	0.13918	2.22500	2.08582	8.05446	0.53767	0.03408	0.50359	0.00106
	Ø١= ٠.٦ θ١ = -٠.١ θ٢ = ٠.٢	٠.٠٦٢١٥	٣.٦٥٠٥٢	3.58837	22.47757	٠.١٧١٥٦	٠.٠٢٥٠٠	0.14656	0.00045
	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.08351	2.62994	2.54643	18.93032	0.52645	0.02221	0.50424	0.00108

	Ø١= -٠.٣ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.05936	2.98638	2.92702	22.76295	0.54220	0.02160	0.52060	0.00147
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.00066	3.22469	3.22403	8.54517	0.72659	0.01862	0.70797	0.00058
	Ø١= ٠.٧ θ١=-٠.٠٥ θ٢ =٠.٩	0.02448	4.40398	4.37950	11.68425	1.43189	0.02267	1.40922	0.00030
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٨ θ٢ = -٠.١	0.00485	1.47493	1.47008	١.٣٦٩٤٨	0.44640	1.10615	0.65925	١.٠٨٤٤٣

تابع للجدول (3)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
	Ø١= -٠.٩ θ١ = ٠.١ θ٢ =٠.٨	0.10041	3.25963	3.15922	10.86449	0.34162	0.01680	0.32482	0.00044
	Ø١= ٠.٦ θ١ = -٠.١ θ٢ = ٠.٢	٠.٠٩١٧٣	٢.٢٥٠٢٩	٢.١٥٨٥٦	٤.٢٧٠٦٦	٠.٢٤٧٣٥	٠.٠٠٥١٣	٠.٢٤٢٢٢	0.00001
50	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.05684	2.38436	2.32752	6.81562	0.33274	0.01138	0.32136	0.00025

	Ø١= -٠.٣ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.04059	1.92517	1.88458	4.61887	0.34974	0.01136	0.33838	0.00028
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.00052	1.48649	1.48597	1.84354	0.53848	0.06059	0.47789	0.00332
	Ø١= ٠.٧ θ١=-٠.٠٥ θ٢ =٠.٩	0.02504	1.95287	1.92783	2.33170	1.43469	0.00762	1.42707	0.00003
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٨ θ٢ = -٠.١	٠.٠٠٣٥٢	١.٢٢٥١٨	1.22166	2.33170	٠.٣٧٨٠٣	٠.٠٤٨٦٥	0.32938	0.00003

تابع للجدول (3)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
	Ø١= -٠.٩ θ١ = ٠.١ θ٢ = ٠.٨	0.08936	2.04820	1.95884	2.26049	0.28764	0.00857	0.27907	0.00013
	Ø١= ٠.٦ θ١ = -٠.١ θ٢ = ٠.٢	٠.٠٧٧٢٨	٧.٩٢٤٥٢	٧.٨٤٧٢٤	88.98220	٠.٢٢٢٠٣	٠.٠٠٩٢٤	٠.٢١٢٧٩	0.00029

100	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.06244	2.29925	2.23681	7.49953	0.36217	0.01139	0.35078	0.00014
	Ø١= -٠.٣ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.04794	2.53677	2.48883	11.51859	0.41451	0.01237	0.40214	0.00018
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.00070	2.67467	2.67397	19.98790	0.53991	0.01112	0.52880	0.00025
	Ø١= ٠.٧ θ١=-٠.٠٥ θ٢ =٠.٩	0.02421	3.36792	3.34371	18.47498	1.37198	0.01461	1.35737	0.00062
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٨ θ٢ = -٠.١	0.00243	1.16483	1.16240	١٤.٥٣٤٦ ٢	0.01574	0.03709	0.02135	0.00543

تابع للجدول (3)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
	Ø١= -٠.٩ θ١ = ٠.١ θ٢ =٠.٨	0.15698	1.63386	1.47688	2.43498	0.50065	0.01714	0.48351	0.00044
	Ø١= ٠.٦ θ١ = -٠.١ θ٢ = ٠.٢	٠.٠٧٦٤٤	١.٤٨٠١٩	1.40375	2.60449	٠.٢١٨٤٣	٠.٠٠٧٣١	٠.٢١١١٢	0.00007

150	Ø١= -٠.٥ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.07710	1.75713	1.68003	0.75416	0.44892	0.02372	0.42520	0.00042
	Ø١= -٠.٣ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.05751	1.87555	1.81804	3.11945	0.50105	0.02496	0.47609	0.00028
	Ø١= ٠.٤ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.00115	1.66784	1.66669	٥.٥٥٠٤٠	0.67234	0.01387	0.65847	٠.٠٠٠١٨
	Ø١= ٠.٧ θ١=-٠.٠٥ θ٢ =٠.٩	0.02881	2.14671	2.11790	9.06686	1.61403	0.01653	1.59750	0.00089
	Ø١= ٠.٨ θ١ = ٠.٨ θ٢ = -٠.١	0.00283	0.71284	0.71001	0.99100	0.26786	0.04458	0.22328	0.00093

٤- ٧ التجربة الرابعة

وصف التجربة

تضمنت التجربة الرابعة توليد سلسلة زمنية ARMA(٢,٢) بحيث ان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي N(٠,١) للمعادلة (٢.٤٥)، وطبقاً لصيغة بكس– ملر((Box-Muller)) تم احتساب التنبؤ بطريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) لازواج القيم (θ٢ ,θ١ ,Ø٢, Ø١) المختلفة التي تقع ضمن منطقة الاستقرارية والانعكاسية (-٠.٥، (٠.١،٠.٥،٠.٢) ، (٠.٦،-٠.٦،-٠.٢،٠.٨) ، (٠.٥،-٠.٣،٠.٠٥،٠.٩) ، (٠.٩٥، ٠.٠٠٢، ٠.٠١، ٠.٣) ، (٠.٦٥، ٠.٢٥، -٠.٢، -٠.٤) ، (٠.٩، ٠.٢، -٠.٥، -٠.٧) ، (٠.١-، ٠.٥، ٠.٩، ٠.٥ -)حجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة وكررت التجربة (٥٠٠) مرة ، وقد اعطى كل زوج من الازواج (θ٢ ,θ١ ,Ø٢ ,Ø١) تحت n معينة و(R=٥٠٠) ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L، وتم احتساب متوسط هذه القيم والخطأ المطلق ومتوسط مربعات خطأ التنبؤ وكما موضح في الجدول (٤) .

نتائج التجربة

من ملاحظة الجدول(٤) وملاحظتنا الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ للقيم التنبؤية حسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) وجدنا ان القيم التنبؤية لطريقة ((Ansely)) كانت افضل من طريقة((Box & Jenkins)) لقيم الازواج (θ٢ ,θ١ ,Ø٢, Ø١) جميعاًوحجوم العينات n.

جـــدول (4)

يبين متوسط القيم التنبؤية للانموذج ARMA(2,2)تحت Ø ، θ ، n محددة وبتكرار ٥٠٠

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٥ θ٢ =٠.٢	٠.٠٠٨٢٦	٠.٩٧٣٩٨	0.96572	1.15718	٠.٦٨٠٥٦	٠.٢٥٣٧٧	0.42679	0.10475

10	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = -٠.٢ θ٢ = ٠.٨	٠.٠١٠٠٨	٢.٨١٠٥١	2.80043	8.05954	٢.٣٥٧٩٣	١.٠٠٤١٧	١.٣٥٣٧٦	0.97927
	Ø١= ٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	٣.٢٤١٤٦	٠.٦٩٦٦١	2.54485	5.45407	٠.٠٠٢٠٣	٢.١١٣٧٤	2.11171	0.29468
	Ø١= ٠.٣ Ø٢= ٠.١ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	٢.١٥٣٦١	٠.٤٨٢٤٨	1.67113	2.08593	٠.٠٠٥٠٨	١.٤٣١٨٠	1.42672	0.42109
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٢ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	٠.٠٠٧٠٥	١.٤٨٨٣٤	1.48129	2.75629	١.٧٢٥٣٠	٠.٤٧١١٥	1.25415	0.14997
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١=-٠.٢ θ٢ =٠.٩	٠.٠٥٣٨٠	٣.٣٧٨٣٨	3.32458	12.14080	٤.٥٧٧٨٥	١.٦٥٠٦٦	٢.٩٢٧١٩	3.04578
	Ø١= -٠.٥ Ø٢= ٠.٩ θ١ = ٠.٥ θ٢ = -٠.١	٠.٢٢٤٢٧	٠.٧٧٥٤٦	0.55119	٠.٣٢١٦٣	٠.٠٦٣٥٨	٠.٢٥٧٩٩	٠.١٩٤٤١	٠.٠٤٠٧٠

تابع للجدول (4)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.

25	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٥ θ٢ =٠.٢	٠.٠٠٤١٣	١.٧٠٧٢٢	1.70309	6.55669	٠.٥٨٨٠٥	٠.٦٧٨٩٤	٠.٠٩٠٨٩	0.75443
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = -٠.٢ θ٢ = ٠.٨	٠.٠١١٨٦	٦.٢٢٨٠١	6.21615	28.24817	٢.٦٣٦٠٣	٢.٨٢٣٨٨	٠.١٨٧٨٥	8.72677
	Ø١= ٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	٠.٠٠١٨٥	٥.١٩٦٩٦	5.19511	18.77905	٣.٦٦٨٤٨	٢.٠٩٥٥٠	١.٥٧٢٩٨	3.92864
	Ø١= ٠.٣ Ø٢= ٠.١ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	٠.٠٠٢٢٦	٢.٩٠٠٠٩	2.89783	13.28279	٢.٢٨٩٣٣	١.٣٥٧٣٢	٠.٩٣٢٠١	1.16861
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٢ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	٠.٠٠٦٢٥	٣.٠٠٤٢٢	2.99797	14.24912	١.٧٨٤٠٠	١.٢٣٦١٦	٠.٥٤٧٨٤	٤.٢٥٠٠٥
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١=-٠.٢ θ٢ =٠.٩	٢.١٣٨٨٨	١٧.1338 ٤	14.99497	٣٦٤.٦٦٥ ٥	٤.١٦٥٥٧	14.33725	10.17168	١١٠.٥٣٩ ٧
	Ø١= -٠.٥ Ø٢= ٠.٩ θ١ = ٠.٥ θ٢ = -٠.١	2105.398	22534.84	٣20429.4	٥٥١٦٨	646.4831	8961.819	8315.336	48774

تابع للجدول (4)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
50	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٥ θ٢ =٠.٢	0.38902	6.43348	6.04446	104.6953	1.27153	1.92571	0.65418	5.2786
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = -٠.٢ θ٢ = ٠.٨	٠.٠١٣٧٩	٢.٩٤٤٩٤	2.93115	7.22847	٢.٦٩٦٨١	١.٥٣٩٢٥	١.١٥٧٥٦	2.18946
	Ø١= ٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	٠.٠٠١٤٧	١.٧١٨٢٣	1.71676	2.19742	٢.٧٤٨٢٧	١.٠٥٣٧٤	١.٦٩٤٥٣	1.36754
	Ø١= ٠.٣ Ø٢= ٠.١ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	0.05918	2.31209	2.25291	6.62079	0.57478	1.04529	0.47051	1.1124
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٢ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	٠.٠٠٧٨٠	١.٣٧٤٩٧	1.36717	1.67983	١.١٤١٧٣	٠.٧٨٧٦٥	0.35408	0.62269
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١=-٠.٢ θ٢ =٠.٩	٤٢.١٦٦	٢٥٨.٥٧٥	216.409	٣٠٣٣٣.٢ ٣	90.375	218.564	128.189	27134.99
	Ø١= -٠.٥ Ø٢= ٠.٩ θ١ = ٠.٥ θ٢ = -٠.١	12409.34	41528.34	29119	٨٣٣٦٥	٥٩٠٩٨.٦	٣١٢٤٦.٣	27852.3	50018

تابع للجدول (4)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
100	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٥ θ٢ =٠.٢	0.83678	12.09554	11.25876	176.3555	2.66585	8.05466	5.38881	45.0228
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = -٠.٢ θ٢ = ٠.٨	56343.03	20627.55	35725.48	47733	5586.50	34771.16	29194.6	20986
	Ø١= ٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	0.20323	2.63647	2.43324	7.98399	0.90445	1.25827	0.35382	1.67765
	Ø١= ٠.٣ Ø٢= ٠.١ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	٠.٠٠٣٣٨	٢.٦٩١٢٦	2.68788	17.26161	١.٦٤٩٧٥	٠.٧٣٧٠٧	0.91268	0.25221
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٢ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.03961	2.81259	2.77298	6.67978	2.39056	0.79366	1.59690	٠.١١٥٢٦
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١=-٠.٢ θ٢ =٠.٩	32563.40	42604.22	10040.82	٧٠٥٣٢	23503.99	30317.11	6813.12	62650
	Ø١= -٠.٥ Ø٢= ٠.٩ θ١ = ٠.٥ θ٢ = -٠.١	٠.٣٣٦٦٧	٠.٠٤٧١٢	0.28955	٠.٠٠٠٩٠	٠.٠٥٥٧٥	٠.٠٤١٨٠	٠.٠١٣٩٥	0.00071

تابع للجدول (4)

n	Parameter	Box-Jenkins Method				Ansely Method			
		Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.	Average Theor.var	Average Simul.var	Absolute Error	M.S.E.
150	Ø١= ٠.٥ Ø٢= -٠.١ θ١ = ٠.٥ θ٢ =٠.٢	٠.٠٠٧٢٦	١.١٩٠٦٨	1.18342	١.٤٢٢٩٢	٠.٢٠٦٤٣	٠.٣٥٠٨٩	٠.١٤٤٤٦	0.17421
	Ø١= ٠.٦ Ø٢= - ٠.٦ θ١ = -٠.٢ θ٢ = ٠.٨	٩٨٧٤٥.١	٣٢١٦٤.٣	66580.8	٦٨٠٩٦	3876.99	30935.87	27058.88	55234
	Ø١= ٠.٥ Ø٢=-٠.٣ θ١ = ٠.٠٥ θ٢ = ٠.٩	١.٠٦٩٣٢	٤.٦٣١٨٧	3.56255	17.51213	0.24298	3.02638	2.78340	6.65360
	Ø١= ٠.٣ Ø٢= ٠.١ θ ١=٠.٠٢ θ٢=٠.٩٥	٠.٠٠٤٠٢	٢.٠٤٣٤٧	2.03945	3.02093	٢.٠٦٢٠٦	١.١٥٦٩٨	٠.٩٠٥٠٨	1.43785
	Ø١= ٠.٤ Ø٢=-٠.٢ θ١ = ٠.٢٥ θ٢ = ٠.٦٥	0.06755	2.59658	2.52903	9.90543	1.17543	1.83012	0.65469	5.03139
	Ø١= ٠.٧ Ø٢= -٠.٥ θ١=-٠.٢ θ٢ =٠.٩	١١٥٧٩٦٥	39532.74	11184٣	11631	19497.54	58302.77	38805.23	10848
	Ø١= -٠.٥ Ø٢= ٠.٩ θ١ = ٠.٥ θ٢ = -٠.١	٠.٠٠٢٥٦	٠.٠٣٩٩٥	0.03739	٠.٠٠٠٦٨	٠.٠٢٤٢٥	٠.٠٤٥٧٣	0.02148	٠.٠٠٠٦٤

الفصـــل الرابـــع

الاستنتاجــات و التوصيــات

أولاً : الاستنتاجــات Conclusions

اظهرت تجارب المحاكاة الاربعة ما يأتي :

١- اوضـــحت نتـــائج المحاكـــاة للتجربـــة الاولى ولجميـــع قـــيم الازواج ($\emptyset_1,\theta_1$)المختلفةوحجـوم عينـات صـغيرة ومتوسـطةوكبيرة وبتكرارالتجـربة ٥٠٠ مـرة بـان السلسلة الزمنية ARMA(١,١) اعطـت ٩ قـيم تنبؤيـة بحسـب قـيم L، وتم احتسـاب متوسط هذه القيم وايجاد الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ للقيم التنبؤية بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely)) ، فوجدنا بان القيم التنبؤية لطريقة ((

((Ansely)) افضـل مـن القـيم التنبؤيـة لطريقـة ((Box & Jenkins)) .

2 – امـا التجربـة الثانيـة فاوضـحت نتـائج المحاكـاة ولجميـع قـيم الازواج (θ١ ,Ø٢ ,Ø١) المختلفةوحجـوم عيـنات صـغيرة ومتوسـطةوكبيرة وبتكرارالتجـربة ٥٠٠ مـرة بـان السلسـلة الزمنيـة (ARMA(٢,١ اعطـت ٩ قيم تنبؤية بحسب قيم L، وتم احتسـاب متوسـط القـيم التنبؤية وايجاد الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ لهذه القيم بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقــة((Ansely)) ، فوجــدنا ان القــيم التنبؤيــة لطريقــة((Ansely))افضل من القيم التنبؤية لطريقة ((Box&Jenkins)) .

٣- اوضـحت نتـائج المحاكـاة للتجربة الثالثةولجميع قـيم الازواج(θ٢ ,θ١ ,Ø١) المختلفـة وحجـوم عينـات صـغيرة ومتوسـطة وكبـيرة وبتكـرار التجربـة ٥٠٠ مـرة بـأن السلسـلة الزمنيـة (ARMA(١,٢ اعطت ٩ قيم تنبؤية بحسب قيـم L ، وتم احتسـاب متوسـط القـيم التنبؤية وايجاد الخطأ المطلق ومتوسط مربعات الخطأ لهذه القيم بحسب طريقة ((Box & Jenkins)) وطريقـة ((Ansely))،فوجـدنا ان القـيم التنبؤيـة لطريقـة ((Ansely)) افضل من القيم التنبؤية لطريقة ((Box & Jenkins)) .

٤ – امــا التجربــة الرابعــة مــن تجــارب المحاكــاة فقــد اوضــحت ولجميــع قــيم الازواج (θ٢ ,θ١ ,Ø٢ ,Ø١) وحجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة وبتكرار التجربة ٥٠٠ مرة بان السلسلة الزمنية (ARMA(٢,٢ اعطت٩قيم تنبؤية بحسب قيم L، وتم احتسـاب متوسـط القـيم التنبؤيـة وايجـاد الخطأ المطلق ومتوسـط مربعـات الخطأ لهـذه القيـم بحسـب طريقـة ((Box & Jenkins)) وطريقة ((Ansely))، فوجدنا ان القيم التنبؤية لطريقـة ((Ansely)) افضـل مـن القـيم التنبؤيـة لطريقـة ((Box & Jenkins)) .

ثانياً : التـوصيـــات Recommendations

1- نوصــي باعتمــاد نــماذج **ARMA(p,q)** عنـد التنبــؤ في النمــاذج المختلطــة للسلاسل الزمنية لانها تعطي نتائج دقيقة في هذا الصدد .

2- نوصي باستخدام طريقة ((**Ansely**)) لانها كانت الافضل من طريقة ((**Box & Jenkins**)) و إن تجارب المحاكاة التي قمنا بها اثبتت كفاءة هذه الطريقة .

الملـــحق
Appendix

<u>اسلوب ((Box & Muller ١٩٥٨))</u>

If U_1 & U_2 are independent random variables from U (٠ , ١), then the random variables:

$$X_1 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2)$$

$$X_2 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)$$

are independent random variables from N (٠ , ١),

Proof :

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} 1 & 0 < u_i < 1 \\ 0 & \text{e.w} \end{cases}$$

The functions : $x_1 = (-2 \ln u_1)^{1/2} \cos(2\pi u_2)$

$x_2 = (-2 \ln u_1)^{1/2} \sin(2\pi u_2)$

Define one – to – one transformation that maps the space:

A= { $(u_1, u_2) : 0 < u_i < 1 , \ i = 1,2$ } on to the space :

B= { $(x_1, x_2) : -\infty < x < \infty , \ i = 1,2$ } with inverse transform

$$x_1^2 + x_2^2 = (-2 \ln u_1) \cos^2(2\pi u_2) + (-2 \ln u_1) \sin^2(2\pi u_2)$$

$$= (-2 \ln u_1)[\cos^2(2\pi u_2) + \sin^2(2\pi u_2)]$$

$$= -2 \ln u_1$$

$$\Rightarrow \ln u_1 = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow u_1 = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

$$\frac{x2}{x1} = \tan(2\pi u_2) \Rightarrow (2\pi u_2) = \tan^{-1}\left(\frac{x2}{x1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x2}{x1}\right)$$

$$J = \frac{\partial (u_١ , u_٢)}{\partial (x_١ , x_٢)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_١}{\partial x_١} & \frac{\partial u_١}{\partial x_٢} \\ \frac{\partial u_٢}{\partial x_١} & \frac{\partial u_٢}{\partial x_٢} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x_١ \, e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)} & -x_٢ \, e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)} \\ \frac{١}{٢\pi} \frac{\left(-\frac{x_٢}{x_١^2}\right)}{١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2} & \frac{١}{٢\pi} \frac{\left(\frac{١}{x_١}\right)}{١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٢\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)}}{١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2} - \frac{١}{٢\pi} \frac{\left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)}}{١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2}$$

$$= \frac{-١}{٢\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)}}{١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2} \left[١ + \left(\frac{x_٢}{x_١}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{-١}{٢\pi} \, e^{-\frac{1}{2}(x_١^2 + x_٢^2)}$$

Then the joint p.d.f of x١ & x٢ is :

$$f(x١,x٢) = g\left[e^{-\frac{1}{2}(x_{١}^{2}+x_{٢}^{2})} \; , \; \frac{1}{2\pi} \tan^{-١}\left(\frac{x2}{x1}\right) \right] |J|$$

$$= ١ . \left| -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_{١}^{2}+x_{٢}^{2})} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_{١}^{2}+x_{٢}^{2})} \quad , \; -\infty < x_i < \infty \; , \; i = ١,٢$$

Which is the joint p.d.f of two independent random variables from N(٠,١) .

N١ – Algorithm

١ - Generated $U_{١}$ & $U_{٢}$ from U(٠,١) .

٢ - Set $x١ = (-٢ \ln U_{١})^{½} \cos(٢ \pi U_{٢})$.

$x٢ = (-٢ \ln U_{١})^{½} \sin(٢ \pi U_{٢})$.

٣ - Deliver x١ & x٢ as a random variables generated from N(٠,١) .

Notes : To generate **n** independent random variables from N(٠,١).

١ - If n is even , apply N١-Algorithm ($\frac{n}{2}$) .

٢ - If n is odd , apply N١-Algorithm $\frac{n+1}{2}$ and discard $x_{n+١}$.

٣ - If independent random variable from N(μ , σ^2) are required , we use the relation .
If $x \sim N(٠,١)$ then the random variable $Y= \sigma x +\mu \sim N(\mu,\sigma^2)$.

المصـــــــــادر

References

١ – احمد ، نوزاد محمد (١٩٨٦)
((تحديد نماذج التنبؤ والسيطرة لانتاج لحم الدجاج في حقول المنشأة العامة للدواجن الوسطى باستخدام السلاسل الزمنية))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٢– الجباري ، نضال حسين (١٩٨٧)
((استخدام نماذج السلاسل الزمنية الملائمة للتنبؤ بالاستهلاك الشهري للماء الصافي لمدينة بغداد))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٣– الحديثي ، عصام مولود عبد اللطيف عياش (١٩٩٣)
((التنبؤ لانتاج محصول الذرة الصفراء في القطر العراقي))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٤– الراوي ، بيداء اسماعيل عبد الوهاب (١٩٩٣)
((تشخيص نماذج السلاسل الزمنية لتحليل درجات الحرارة لمدينة بغداد للفترة ١٩٨٠– ١٩٩١))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٥– الرحامنة ، اديب احمد علي (٢٠٠٣)
((التنبؤ بكمية الطاقة الكهربائية المنتجة في الاردن باستخدام نماذج الانحدار المقيدة واسا ليب السلاسل الزمنية))
رسالة دكتوراه ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – الجامعة المستنصرية .

٦- شاهين ، حمزة اسماعيل (١٩٨٦)
((النماذج المختلطة ARIMA واستخدامها في السيطرة على الخزين في المنشأ ة العامة لتجارة المواد الغذائية))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٧- عبد الرزاق ، كنعان عبد اللطيف (١٩٨٤)
((دراسة احصائية لبناء نماذج التنبؤ المركبة لصناعة الزيوت النباتية قي العراق))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٨- عباس ، عباس فاضل (١٩٨٥)
((استخدام النموذج المختلط ARIMA للتنبؤ بالولادات في مدينة بغداد))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

٩- عبد الرسول ، محمود جواد (١٩٨١)
((دراسة احصائية تطبيقية للمقارنة بين النماذج الاسية ونماذج بوكس جينكز في التوقعات المستقبلية مع تطبيق عملي))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

١٠- العيسى ، دينا احمد ابراهيم (١٩٩٥)
((دراسة مقارنة لبعض نماذج السلاسل الزمنية مع تطبيق على درجات الحرارة لمدينة بغداد))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

١١- محمد ، سعدون محسن (١٩٨١)
((دراسة نماذج الانحدار الذاتي والاوساط المتحركة غير المستقرة ARIMA مع تطبيق للتنبؤ بدرجات الحرارة لمدينة بغداد))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .

١٢- النقاش ، افتخار عبد الحميد (١٩٨٢)
((تحليل السلاسل الزمنية للتنبؤ باستهلاك الطاقة الكهربائية لمدينة بغداد))
رسالة ماجستير ، قسم الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد

١٣- Box , G.E.P And Jenkins , G .M (١٩٧٦)
((Time Series Analysis Forecasting And Control))
Sanfrancisco , Holden – Day , U.S.A .

١٤-Box .G.E and Muller . M .E . (١٩٥٨)
((Anote on the generation of random normal variables))
Ann ,Math . stat .,٢٩,٦١٠-٦١١ .

١٥- Baum (٢٠٠٣)
((EC ٨٢١ Time Series Econometrics)) ,
Section ٣ " ARMA Model "
Department of Economics .

١٦- Chatfield , C . (١٩٨٧)
((The Analysis of Time Series))
Chapman & Hall , Third Edition .

١٧- Forum (١٩٩٤ – ٢٠٠٤)
((Time Series Analysis & Forecasting ; AutoBox))
Mathematics Library .

١٨- Fuller ,W .A & Hasza ,D.P (١٩٨٠)
((Perdictor for the first – order Autoregressive Process))
Journal of Econometrics ,vol ١٣١ , No(٢) . pp (١٣٩-١٥٨)

١٩- Hussien Arsham (١٩٩٤ – ٢٠٠٤)
((Time – Critical Decision Making for Economics & Finance))

٢٠- Knuth .D.E. (١٩٦٩)
((The art of compulier programming siminumerical alogorithm)) vol .٢ , Addison wesely .

٢١- Khogali . A . Khogali , Olorunsola . E .Olowofeso & Jhon .O.Owino (٢٠٠١ –٢٠٠٢)
((Duality , Forecasting & Selection of Autoregrresive – Moving Average Models))
Lecturer at the university of nairobi ,Kenya , Mathematics Department .

٢٢- Lehmer . D .H . (١٩٥١)
((Mathematical models in large – scale computing units))
Ann . comp . Lab .Harved univ . U.S.A.

٢٣- Makridakis , Wheel Wright & Hyndman (١٩٩٨)
((Forecasting : Methods & Application))
Third Edition , Wiley , Newyork .

٢٤- Peter . J . Brockwell Richard .A .Davis (٢٠٠٢)
((Introduction to Time Series & Forecasting))

٢٥- Ronald Bewely (٢٠٠٠)
((Time Series Forecasting))
The University of Newsouth Wales . UNSW

٢٦- Selo Imrohorogh (٢٠٠١)
((ARMA (p , q) Models))
Marshall School of Business , Department of Financec and Business Economics .

٢٧- Serena . Ng & Timothy . J . Vogelsang (١٩٩٩)
((Forecasting Dynamic Time Series in the presence of

Determinstic Components))

٢٨- Seim Jan Koopman & Marins Ooms (٢٠٠٢)
((Periodic Unobserved Compont Time Series Models :
Estimation & Forecasting with Application))
Free University Amsterdam , Department of Econometrics .
De Boelelaan ١١٠٥,NL – ١٠٨١ HV Amsterdam

٢٩- Wei , W . W . S (١٩٩٠)
((Time Series Analysis)) , Addison- Wesley Publishing .
C.Inc , U.S.A.

الملخص بالإنجليزية

Abstract

In this theises the study is made for comparison between two methods of Forecasting models of time series namely ((Box & Jenkins)) and ((Ansely)) by using Monte-Carlo Simulation.

The ARMA (p,q) is considered with values of p,q=١,٢ where the normal distribution is used as an underlying distribution .

The formulation of the four ARMA (p, q), p, q=١,٢ models is made and the theoritical derivation is developed for finding Autocovariance, the Autocorrelation and Forecasting Errors and their expectation, variance, and the mean square errors. These measurements are assesed practically by using Monte – Carlo Simulation where four experiment are considered and the run size ٥٠٠ is used.

Using Simulation For Comparison Between ((Box & Jenkins)) and ((Ansely)) Methods for Forecasting the Low order of ARMA(p,q) model

A thesis

Submitted to the council of the College of Education, AL- Mustansiriya University in partial Fulfillment of the Requirement for the master of science in Mathematics

By

Israa Amir Flayh Al – Hamdani

Supervised by

Dr.Akram Mohammed Al–Abood Dr.Ayad Abdul Kareem Abbas