قسم الرياضيات /الفصل الدراسي الثاني

المرحلة الثالثة / نظرية الحلقات

أ.م.د.حميد الزهيري

تعريف: لتكن $(R,+,.)$ حلقة ، و $S \subset R$ فيطلق على الثلاثي $(S,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$ اذا كانت $(S,+,.)$ حلقة بحد ذاتها.

مثال: بين فيما ان $(Z,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$ حيث ان R هي مجموعة الاعداد الحقيقية .

الحل :

$$Z \subset R$$

يجب ان نوضح ان $(Z,+,.)$ يمثل حلقة بحد ذاتها

١- $(Z,+)$ زمرة ابدالية واجب

١- . عملية تجميعية على Z

$$\forall a,b,c \in Z \rightarrow (a.b).c = a.(b.c)$$

٢- العملية . تتوزع على عملية + من اليسار واليمين

$$\forall a,b,c \in Z \rightarrow a.(b+c) = a.b + a.c$$

و $(a+b).c = a.c + b.c$

اذن الثلاثي $(Z,+,.)$ حلقة

من خلال التعريف (يكتب نص التعريف)

حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$

مثال: بين فيما ان $(Z,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Q,+,.)$

الحل :

$$Z \subset Q$$

يجب ان نوضح ان $(Z,+,.)$ يمثل حلقة بحد ذاتها

$(Z,+)$ زمرة ابدالية واجب

. عملية تجميعية على Z

$$\forall a,b,c \in Z \rightarrow (a.b).c = a.(b.c)$$

$(Z,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Q,+,.)$

مبرهنة :

لتكن $(R,+,.)$ حلقة ، و $S \subset R$ فيطلق على الثلاثي $(S,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$ تحققت الشروط الاتية.

$$\forall a,b \in S \rightarrow 1)\ \ a-b\ \in S \qquad 2)\ a.b\ \in S$$

مثال : بين فيما ان $(S,+_6,\cdot_6)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Z_6,+_6,\cdot_6)$ حيث ان $S=\{0,2,4\}$

الحل : $Z_6 = 0,1,2,..,5$

يجب ان نبرهن ان

$$\forall a,b \in S \rightarrow 1)\ \ a-b\ \in S \qquad 2)\ a.b\ \in S$$

$+_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

$\cdot_6$	0	2	4
0	0	0	0
2	0	4	2
4	0	2	4

اذن

$(S, +_6, .6)$حلقة جزئية من الحلقة $(Z_6, +_6, .6)$ حسب المبرهنة (تكتب نص المبرهنة)

ملاحظة : كل حلقة مثل $(R, +, .)$ تمتلك على الاقل حلقتين جزئيتين هما $(R, +, .)$, $(\{0\}, +, .)$ وتسمى الحلقات الجزئية التافهه

تعريف: لتكن $(S, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, .)$ يطلق على $(S, +, .)$ حلقة جزئية فعلية من الحلقة $(R, +, .)$ اذا كانت

$$S \neq \{0\} \neq R$$

بين فيما ان الثلاثي $(Z_{10}, +_{10}, .10)$ يمثل حلقة ابدالية ذات عنصر محايد

مثال : جد الحلقات الجزئية الفعلية للحلقة $(Z_{12}, +_{12}, .12)$

الحل : $Z_{12} = \{0,1,2,..,11\}$

$$S_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$$
$$S_2 = \{0,3,6,9\}$$
$$S_3 = \{0,4,8\}$$
$$S_4 = \{0,6\}$$

اذن الحلقات الجزئية الفعلية هي

1) $(S_1, +_{12}, \cdot_{12})$ 2) $(S_2, +_{12}, \cdot_{12})$

3) $(S_3, +_{12}, \cdot_{12})$ 4) $(S_4, +_{12}, \cdot_{12})$

مثال : جد الحلقات الجزئية الفعلية للحلقة $(Z_{14}, +_{14}, \cdot_{14})$

الحل : $Z_{14} = \{0,1,2,..,13\}$

$$S_1 = \{0,2,4,6,8,10,12\}$$
$$S_2 = \{0,7\}$$

اذن الحلقات الجزئية الفعلية هي

1) $(S_1, +_{14}, \cdot_{14})$ 2) $(S_2, +_{14}, \cdot_{14})$

مثال : جد الحلقات الجزئية الفعلية للحلقة $(Z_{30}, +_{30}, \cdot_{30})$

الحل : $Z_{30} = \{0,1,2,..,29\}$

$$S_1 = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28\}$$
$$S_2 = \{0,15\}$$
$$S_3 = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27\}$$
$$S_4 = \{0,10,20\}$$

$$S_5 = \{0,5,10,15,20,25\}$$
$$S_6 = \{0,6,12,18,24\}$$

اذن الحلقات الجزئية الفعلية هي

1) $(S_1, +_{30}, \cdot_{30})$ 2) $(S_2, +_{30}, \cdot_{30})$
2) $(S_3, +_{30}, \cdot_{30})$ 4) $(S_4, +_{30}, \cdot_{30})$
5) $(S_5, +_{30}, \cdot_{30})$ 6) $(S_6, +_{30}, \cdot_{30})$

مثال : جد الحلقات الجزئية الفعلية للحلقة $(Z_{48}, +_{48}, \cdot_{48})$ واجب

ملاحظات

من الممكن ان تكون الحلقة الجزئية هي حلقة جزئية ذات عنصر محايد

ج/١) من الممكن ان تمتلك الحلقة الجزئية عنصر محايد ويمكن ان يكون هو نفسه العنصر المحايد للحلقة الام

مثال:

ان $(Z, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, .)$
حيث ان R هي مجموعة الاعداد الحقيقية .
الحلقة $(R, +, .)$ حلقة ذات عنصر محايد وهو 1
$(Z, +, .)$ حلقة جزئية ذات عنصر محايد وهو 1

٢) من الممكن ان تمتلك الحلقة الجزئية عنصر محايد ويمكن ان لا يكون هو نفسه العنصر المحايد للحلقة الام
مثال / واجب

٣) ان لاتمتلك الحلقة الجزئية عنصر محايد

ان $(Z_e, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, .)$

$(Z, +, .)$ حلقة جزئية ذات عنصر محايد وهو 1
لكن $(Z_e, +, .)$ لاتمتلك عنصر محايد