الفضاء التبولوجي (Topological Space)

المحاضرة الاولى / اعداد الاستاذ الدكتور محمد علي مراد

المصدر: مقدمة في التبولوجيا العامة ، د. سمير بشير

قبل البدء بتعريف التبولوجي والفضاء التبولوجي سنستذكر تعريف مجموعة القوى.

مجموعة القوى (Power Sets)

لتكن X مجموعة ما غير خالية ، تعرف مجموعة القوى على المجموعة X بأنها مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة X ويرمز لها بالرمز P(X) .

ملاحظة: اذا كان عدد عناصر المجموعة X يساوي n فيكون عدد عناصر المجموعة P(X) يساوي 2^n .

مثال: لتكن X={1,2} ، احسب P(X) .

الحل: نلاحظ عدد عناصر X يساوي 2 فأن عدد عناصر P(X) يساوي $2^2 = 4$
اذن $P(X) = \{X , Ø , \{1\} , \{2\} \}$

مثال: لتكن X={1,2,3} ، احسب P(X) .

الحل: نلاحظ عدد عناصر X يساوي 3 فأن عدد عناصر P(X) يساوي $2^3 = 8$
اذن $P(X) = \{X , Ø , \{1\} , \{2\} \{3\} ,\{1,2\} ,\{1,3\} ,\{2,3\} \}$

وهكذا لأي مجموعة نستطيع ان نجد مجموعة القوى.

تعريف الفضاء التبلوجي :Topological Space

لتكن X مجموعة ما غير خالية ، τ تجمع من المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط التالية:

1. τ تحتوي المجوعتين X و Ø .
2. اتحاد أي عدد من عناصر τ يكون عنصراً في τ.
3. تقاطع اي عنصرين من عناصر τ يكون عنصراً في τ.

يسمى τ تبولوجي على X. ويسمى الزوج المرتب $(X،\tau)$ فضاء تبولوجيا Topological Space.

ويسمى كل عنصر A من عناصر τ **مجموعة مفتوحة**(Open set).

<u>مثال1:</u>

لتكن X={a,b,c} و τ ={ X, Ø,{a},{b},{a,b}} ،

اولاً: هل τ تمثل تبولوجي على X؟

الحل : نعم تمثل وذلك لتحقيق شروط تعريف الفضاء التبولوجي الثلاثة حيث:

1. نلاحظ ان $X, Ø \in \tau$
2. اتحاد أي عدد من عناصر τ يكون عنصراً في τ.
3. تقاطع اي عنصرين من عناصر τ يكون عنصراً في τ.

ثانياً: هل المجموعة {c}, {a,c}, {a,b} مجموعات مفتوحة؟

الحل: {a,c},{c} ليس مجموعات مفتوحة لأنهما لا ينتميان الىτ ،

لكن المجموعة {a,b} مجموعة مفتوحة لأنها تنتمي الىτ .

مثال2:

بين اي من المجموعات التالية تشكل تبولوجي على المجموعة X= {1,2,3} .

τ_1 ={X, Ø ,{1},{2},{1,2}}

τ_2= {X, Ø}

τ_2=P(X)= {X Ø,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3}}

τ_4= { Ø ,{1} , {1,3}}

τ_5= {X,{1},{2},{1,2}}

τ_6= {X, Ø,{1},{2},{1,3}}

الحل :

1. واضح ان τ_1 ,τ_2 , τ_3 تشكل تبولوجي على X وذلك لتحقيق شروط التعريف الثلاثة.

ويسمى τ_2= {X, Ø} بالتبولوجي الغير متقطع *Indiscrete Topology*،

وτ_2= P(X) بالتبولوجي المتقطع *discrete Topology* .

ومن ثم فإن كل من (X, τ_1) , (X, τ_2) , (X, τ_3) تشكل فضاء تبولوجي.

2. τ_4لا تشكل تبولوجي على X وذلك لان $X \notin \tau_4$

أي أن τ_4 لا تحقق الشرط الاول من التعريف

3. أيضا نلاحظ أن τ_5 لا تشكل تبولوجي على X لأن $\emptyset \notin \tau_5$

أي أن τ_5 لا تحقق الشرط الاول من التعريف

4. τ_6 لا تشكل تبولوجي على X لأن $\{1\},\{2\} \in \tau_6$ لكن $\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\notin \tau_6$

أي ان τ_6 لا تحقق الشروط الثاني من التعريف .

ملاحظة: نستنتج من المثال2 انه نستطيع ان نجد اكثر من تبولوجي على المجموعة الواحدة.

مثال: جد جميع التبولوجيات الممكنة على المجموعة X={a,b} .

الحل: اولا نجد $P(X)= \{ X, \emptyset,\{a\},\{b\} \}$

وعلية

$\tau_1= \{X, \emptyset\}$ *Indiscrete Topology*

$\tau_2= \{X, \emptyset,\{a\},\{b\}\}$ *discrete Topology*

$\tau_3= \{X, \emptyset,\{a\}\}$

$\tau_4= \{X, \emptyset,\{b\}\}$

تمرين: جد ستة تبولوجيات على المجموعة X={1,2,3} .

مبرهنة: لتكن X مجموعة غير خالية ، فان تقاطع أي عدد من التبولوجيات على المجموعة X يكون أيضاً تبولوجي على X .

البرهان: لتكن $\tau_1, \tau_2, \tau_3,\dots$ أي عدد من التبولوجيات المعرفة على المجموعة X

لاثبات $\bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$ تشكل تبولوجي على المجموعة X يجب تحقيق شروط التعريف الثلاثة:

1. بما ان كل من $\tau_1, \tau_2, \tau_3,\dots$ تبولوجي ، علية $X, \emptyset \in \tau_i \ \ \forall\, i$

اذن $X, \emptyset \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$. تحقق الشرط الاول

2. لتكن $A_s \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$, $s\in S$

علية $A_s\in \tau_i \ \ \forall\, i$

اذن $\cup A_s\in \tau_i \ \ \forall\, i$ (لأنه كل من τ_i هو تبولوجي على X)

مما يودي الى $\cup A_s \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$. تحقق الشرط الثاني

3. ليكن $A_1, A_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$

علية $A_1, A_2 \in \tau_i \ \forall \ i$

اذن $A_1 \cap A_2 \in \tau_i \ \forall \ i$ (لأنه كل من τ_i هو تبولوجي على X)

مما يودي الى $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$. تحقق الشرط الثالث

وعلية $\bigcap_{i=1}^{\infty} \tau_i$ يمثل فظاء تبولوجي على المجموعة X .

ملاحظة: اتحاد التبولوجيات المعرفة على المجموعة X ليس بالضرورة ان يكون تبولوجي على X .

مثال: لتكن X={a,b,c} وكل من τ_1={ X, Ø,{a}} ، τ_2={ X, Ø,{b}} تبولوجي على المجموعة X فان

$\tau_1 \cup \tau_2$={ X, Ø,{a},{b}} لا تمثل تبولوجي على X وذلك لعدم تحقق الشرط الثاني من التعريف حيث {a},{b} $\in \tau_1 \cup \tau_2$ لكن {a}∪{b}={a,b}$\notin \tau_1 \cup \tau_2$.

تعلمنا مما سبق كيفية اثبات التبولوجي المعرف على مجموعة معرفة بذكر عناصرها (المجموعات المنتهية)، اما اذا كانت المجموعة معرفة بشكل صفتها المميزة فكيف يمكن تحقيق شروط الفضاء التبولوجي هذا ما سنتطرق اليه في الامثلة القادمة.