نظرية المجموعات SET THEORY

تعريف 1: المجموعة هي تجمع من الأشياء المعرفة بدون ترتيب والتي تسمى بالعناصر او أعضاء تنتمي للمجموعة.

- تستخدم الاحرف الكبيرة ..... ,A,B,X,Y لتدل على المجموعة والحروف الصغيرة ...,x,y,a,b لتدل على عناصر المجموعة.
- انتماء عنصر (a) للمجموعة (A) يعبر عنه رياضياً $(a \in A)$

طرية التعبير عن المجموعة: هناك طريقتان للتعبير عن المجموعة:

1- الطريقة الجدولية tabulation method

في هذه الطريقة نستخدم الاقواس المعقوفة لتسمية المجموعات فمثلا مجموعة ألوان العلم العراقي يمكن التعبير عنها بالشكل {أبيض, أحمر, أخضر, أسود} ومجموعة الاعداد 3,4,7,9 يمكن التعبير عنها بالشكل { 3,4,7,9} والمجموعة {a,b} تحوي العناصر a,b.

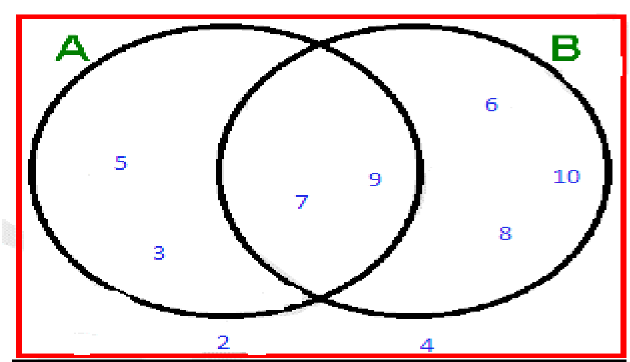
2- طريقة القاعدة Rule method

وتسمى احياناً طريقة الصفة المميزة, في هذه الطريقة تعين خاصية تمتلكها جميع الأشياء في المجموعة ولا يمتلكها سواها فيعبر عن المجموعة بذكر هذه الخاصية فمثلاً مجموعة جميع الاعداد الصحيحة التي مربعها اقل من 3 ممكن كتابتها بالصورة التالية:-

{x: $x^2<3$,عدد صحيح x}

3- مخططات فن venn diagram

في هذه الطريقة توضع العناصر داخل منحني مغلق يمثل المجموعة وتستخدم هذه الطريقة لأغراض توضيحية فقط.



ملاحظة: تسمى المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر مجموعة خالية (empty set) ويرمز لها بالرمز ø

مثال 1: $A = \{x \in N: 2 < x < 3\} = ø$

مجموعات هامة:

1- مجموعة الاعداد الطبيعية (Natural number) : ويرمز لها بالرمز N $N= \{1,2,3,\ldots\ldots.\}$
2- مجموعة الاعداد الصحيحة (Integers) : ويرمز لها بالرمز Z $Z=\{\ldots,-2, -1, 0, 1, 2,\ldots\}$
3- مجموعة الاعداد الحقيقية (Real number) ويرمز لها بالرمز R

المجموعات الجزئية subsets:

تعريف 2: لتكن A مجموعة ولتكن B مجموعة يقال ان A مجموعة جزئية من B اذا وفقط اذا كل عنصر في A يكون ايضاً عنصر في B ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subset B$. ويقال في هذه الحالة ان (A محتوى في B) او ان (B يحتوي A).

ملاحظة: اذا كانت A مجموعة غير جزئية من B فنرمز لذلك بالرمز $A \not\subset B$

مثال 2: اذا كانت $A= \{ x: -3< x <3 , x \in Z\}$

فأن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة Z أي ان $A \subset Z$

لاحظ ان A لا تكون جزء من مجموعة الاعداد الطبيعية N أي ان $A \not\subset N$.

مثال 3: اذا كانت $A= \{ 2,3,5,17,21\}$ و $B= \{ x: x^2 -4 =0 , x \in N\}$ هل ان $B \subset A$؟

الحل: نقوم باستخراج عناصر B من خلال حل المعادلة

$X^2- 4 =0$

$X^2= 4$

$X= 2 \quad (x \in N)$

$B= \{2\}$

Then $B \subset A$

تعريف 3: لتكن كل من A,B مجموعة يقال ان A مجموعة جزئية من فعلية من لا اذا وفقط اذا:

1- A مجموعة جزئية من B
2- يوجد عنصر واحد على الأقل في B غير موجود في A.

الفترات Intervals:

ليكن كل من a, b عدداً حقيقياً:

1- المجموعة $\{x: a < x< b, x\in R\}$ تسمى فترة مفتوحة open interval ويرمز لها بالرمز (a, b).
2- المجموعة $\{ x: a\le x \le b , x \in R\}$ وتسمى فترة مغلقة closed interval ويرمز لها بالرمز [a , b].
3- المجموعة $\{ x: a < x \le b , x \in R\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليسار half open interval from left ويرمز لها بالرمز (a, b].
4- المجموعة $\{ x: a\le x< b , x \in R\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليمن half open interval from right ويرمز لها بالرمز [a, b)

تساوي المجموعات Equality of sets:

تعريف 4: ليكن كل من A, B مجموعة يقال ان A=B اذا وفقط اذا كان كل من A, B يرمز للمجموعة نفسها

ملاحظة : اذا كانت A=B فهذا يعني:

1- A,B رمزان لمجموعة واحدة
2- A, B تتكون بالضبط من نفس العناصر
3- $A\subset B, B\subset A$

مثال 4: لتكن $A=\{ x: x^2-1=0 , x\in R\}$ و لتكن $B=\{-1,1\}$ فأن A=B برهن ذلك.

البرهان: لاستخراج عناصر A نحل المعادلة

$X^2-1=0$

$X^2=1$

$X=\mp 1$

$A=\{1,-1\}$

Then $A=B$

واجب: لتكن $A=\{x: x^2-2x+1=0 , x\in R\}$ و $B=\{1,2\}$ هل ان $A=B$؟

جبر المجموعات:

اتحاد وتقاطع المجموعات Union and intersection of sets

تعريف 5: اذا كانت كل من A , B مجموعة فأن:

1- A اتحاد B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او الى B او كليهما ويرمز له بالرمز $A\cup B$.

$$\mathbf{A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}}$$

2- A تقاطع B هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ويرمز له بالرمز $A\cap B$.

$$\mathbf{A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}}$$

مثال5:

1- لتكن $A=\{0,2\}$ ولتكن $B=\{1,3\}$ فأن :

$A\cup B=\{0,1,2,3\}$

$A\cap B=\emptyset$

2- لتكن $A=\{x\in R: x\geq 5\}$ ولتكن $B=\{x\in R: x<6\}$ فأن

$A\cup B=R$

$A\cap B=[5,6)$

مبرهنة 1: لتكن كل من A و B مجموعة فأن $A \subset A \cup B$.

البرهان: لتكن $x \in A$

$x \in A \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \in A \cup B$

then $A \subset A \cup B$

مبرهنة 2: لتكن كل من A وB مجموعة فأن $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$.

البرهان: نبرهن ان $A \cap B \subset B$

لتكن $x \in A \cap B$

$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Longrightarrow x \in B$

Then $A \cap B \subset B$

وبنفس الطريقة نبرهن ان $A \cap B \subset A$

مبرهنة 3: لتكن كل من A,B,C مجموعة فأن

1- $A \cup A = A$ (قانون التحايد)
2- $A \cup B = B \cup A$ (قانون التبادل)
3- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (قانون التجميع)

البرهان:

1- واجب
2- نفرض ان $x \in A \cup B$
الان

$$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$$
$$\Longrightarrow x \in B \vee x \in A$$
$$\Longrightarrow x \in B \cup A$$

أي ان $A \cup B \subset B \cup A$
وبصورة مماثلة نفرض ان $y \in B \cup A$

$$y \in B \cup A \Rightarrow y \in B \vee x \in A$$
$$\Rightarrow y \in A \vee x \in B$$
$$\Rightarrow y \in A \cup B$$

أي ان $B \cup A \subset A \cup B$

وعليه فأن $A \cup B = B \cup A$

3- نفرض ان $x \in A \cup (B \cup C)$

$$x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$$
$$\Rightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C$$
$$\Rightarrow (\, x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$
$$\Rightarrow x \in A \cup B \;\; \vee x \in C$$
$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

أي ان $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

وبصورة مماثلة نفرض $y \in (A \cup B) \cup C$

$$y \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow y \in (A \cup B) \vee y \in C$$
$$\Rightarrow y \in A \vee y \in B \vee y \in C$$
$$\Rightarrow y \in A \vee (y \in B \vee y \in C)$$
$$\Rightarrow y \in A \;\; \vee y \in B \cup C$$
$$\Rightarrow y \in A \cup (B \cup C)$$

أي ان $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

وعلية فأن $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

مبرهنة 4: لتكن كل من A,B,C مجموعة فأن

1- A∩A=A (قانون التحايد)
2- A∩B= B∩A (قانون التبادل)
3- A∩(B∩C)=(A∩B) ∩C (قانون التجميع)

البرهان:

1- نفرض $x \in A \cap A$

$$x \in A \cap A \Rightarrow x \in A \wedge A$$

$$\Longrightarrow x \in A \wedge \ x \in A$$
$$\Longrightarrow x \in A$$
$$\therefore A \cap A \subset \mathrm{A}$$

وبنفس الطريقة نفرض $x \in A$

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \wedge A$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap A$$
$$\therefore A \subset \mathrm{A} \cap \mathrm{A}$$

اذن A∩A=A

2- نفرض ان $x \in A \cap B$
الان

$$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$$
$$\Longrightarrow x \in B \wedge x \in A$$
$$\Longrightarrow x \in B \cap A$$

أي ان $A \cap B \subset B \cap A$
وبصورة مماثلة نفرض ان $y \in B \cup A$

$$y \in B \cap A \Longrightarrow y \in B \wedge x \in A$$
$$\Longrightarrow y \in A \wedge x \in B$$
$$\Longrightarrow y \in A \cap B$$

أي ان $B \cap A \subset A \cap B$

وعليه فأن $A \cap B = B \cap A$
3- نفرض ان $x \in A \cap (B \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$$
$$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$$
$$\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap B \ \wedge x \in C$$
$$\Longrightarrow x \in (A \cap B) \wedge C$$

أي ان $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$
وبصورة مماثلة نفرض $y \in (A \cap B) \cap C$

$$y \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow y \in (A \cap B) \wedge y \in C$$
$$\Longrightarrow y \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$$
$$\Longrightarrow y \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$

$\Longrightarrow y \in A \ \wedge y \in B \cap C$
$\Longrightarrow y \in A \cap (B \cap C)$

أي ان $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

وعلية فأن $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

المجموعتان المنفصلتان Disjoint sets

تعريف 6: يقال بأن المجموعتين A و B منفصلتان اذا وفقط اذا لا توجد عناصر مشتركه بينهما وبعبارة أخرى ان تقاطعهما مجموعة خالية. (A ∩ B= ø)

مثال6: لتكن A: مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية.

لتكن B: مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية.

اذن A, Bمجموعتان منفصلتان لان: A∩B= ø

ملاحظة: إذا لم تكن المجموعتان A,B منفصلتين فأنهما متصلتان (Joint)

متممة المجموعة complement of a set

تعريف 7: لتكن A مجموعة ما فأن المجموعة المتممة ل A هي المجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة U والتي لا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^c.

لاحظ ان $A^c \subset U$ حيث A^c= { x∈ U: x∉A}

مثال 7: لتكن X المجموعة الشاملة حيث: X= {1,2,3,4,5,6} ولتكن A⊂ X بحيث ان A= { 2,4,6} فأن متممة المجموعة A هي A^c= { x∈ X: x∉A} اذن A^c = { 1,3, 5}

مبرهنة 5: لتكن كل من A,B مجموعة فأذا كانت A⊂B فأن $B^c \subset A^c$

البرهان:

نفرض ان x∈ B^c

⟹x∉ B (حسب تعريف المتممة)

⟹ x ∉A

⟹ x ∈ A^c (تعريف المتممة)

$\therefore B^c \subset A^c$

مبرهنة 6: لتكن A مجموعة ما فأن $(A^C)^C = A$

البرهان: نبرهن أولاً ان $(A^C)^C \subset A$

نفرض ان $x \in (A^C)^C$

$\Longrightarrow x \notin A^C \Longrightarrow x \in A$ (حسب تعريف المتممة)

$\therefore (A^C)^C \subset A \ldots\ldots\ldots..(1)$

الان نبرهن $A \subset (A^C)^C$

نفرض ان $x \in A$

$\Longrightarrow x \notin A^C \Longrightarrow x \in (A^C)^C$ (حسب تعريف المتممة)

$\therefore A \subset (A^C)^C \ldots\ldots\ldots..(2)$

من (1) و (2) نحصل على $(A^C)^C = A$

<u>الفرق بين مجموعتين:Difference between two groups</u>

تعريف 8: لتكن كل من A,B مجموعة تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى A و لا تنتمي الى B بالفرق بين المجموعتين A,B ونرمز لها بالرمز $A - B$ وبعبارة أخرى:

$A - B = A \cap B^C$

$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

مثال 7: لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية ولتكن N_O مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية فأن $N - N_O = \{2,4,6, \ldots.\}$

مبرهنة 7: برهن على ان $A - B = B^C - A^C$

البرهان: نفرض ان $x \in A - B$

$x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Longrightarrow x \notin A^C \wedge x \in B^C$

$$\Longrightarrow x \in B^C \wedge x \notin A^C$$

$$\Longrightarrow x \in B^C - A^C$$

$\therefore A - B \subset B^C - A^C \quad \dots(1)$

وبصورة مماثلة نبرهن على ان $(2) \dots . \quad B^C - A^C \subset A - B$

من 1 و 2 نستنتج ان $A - B = B^C - A^C$

الفرق التناظري:

تعريف9: ليكن كل من A,B مجموعة اتحاد $A - B$ و $B - A$ يسمى الفرق التناظري بين A,B ويرمز له بالرمز $A\Delta B$ أي ان $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

مثال 8: لتكن $A = \{1,5,9,11\}, B = \{2,5,11,18\}$ فأن $A\Delta B = \{1,9,2,18\}$