

التحويلات الخطية:

تعريف: اذا كانت $T: V \rightarrow W$ دالة من فضاء متجهات V الى فضاء متجهات W يقال ل T بأنه تحويل خطي اذا كان لكل متجهين u, v من V فأن

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad -1$$

$$T(ku) = k.T(u) \quad -2 \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

مثال 1: ليكن $T: R^2 \rightarrow R^3$ دالة معرفة بالشكل $T(x, y) = (y, x + 2y, 2x - y)$ هل T يمثل تحويل خطي؟

الحل: ليكن $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$

$$1- u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$T(u + v) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2)$$

الطرف الايسر

$$T(u) + T(v) = (y_1, x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) + (y_2, x_2 + 2y_2, 2x_2 - y_2)$$

$$= (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2)$$

الطرف الايمن

∴ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

$$2- ku = (kx_1, ky_1)$$

$$T(ku) = (ky_1, kx_1 + 2ky_1, 2kx_1 - ky_1)$$

الطرف الايسر

$$k.T(u) = k(y_1, x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1)$$

$$= (ky_1, kx_1 + 2ky_1, 2kx_1 - ky_1)$$

الطرف الايمن

∴ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

∴ $T: R^2 \rightarrow R^3$ تحويلاً خطياً

مثال 2: هل التحويل $T: R^2 \rightarrow R^2$ المعرفة بالقاعدة $T(x, y) = (x, y + 1)$ يمثل تحويلاً خطياً؟

الحل: $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$

1- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$T(u + v) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1)$$

الطرف الايسر

$$\begin{aligned} T(u) + T(v) &= (x_1, y_1 + 1) + (x_2, y_2 + 1) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 2) \end{aligned}$$

الطرف الايمن

∴ الطرف الايسر ≠ الطرف الأيمن

∴ التحويل ليس تحويلاً خطياً

مثال 3: بين فيما اذا كان التحويل $T: R^2 \rightarrow R^2$ و المعرفة بالقاعدة $T(x, y) = (x, -y)$ تحويلاً خطياً ام لا؟

الحل: $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$

1- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$T(u + v) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$\begin{aligned} T(u) + T(v) &= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) \\ &= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) \end{aligned}$$

الطرف الايمن

∴ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

2- $ku = (kx_1, ky_1)$

$$T(ku) = (kx_1, -ky_1) \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$k.T(u) = k(x_1, -y_1) = (kx_1, -ky_1) \quad \text{الطرف الايمن}$$

∴ الطرف الايسر = الطرف الأيمن

∴ التحويل $T: R^2 \rightarrow R^2$ يمثل تحويلاً خطياً.

التحويل المصفوفي: لتكن A مصفوفة من السعة $m \times n$ اذا استخدمنا صيغة المصفوفة للمتجهات في فضاء

R^m, R^n . عندئذ يمكننا تعريف التحويل $T: R^n \rightarrow R^m$ بالشكل $T(x) = Ax$ حيث x مصفوفة من السعة

$n \times 1$ ان حاصل الضرب Ax مصفوفة سعة $m \times 1$ يمكن اثبات T تحويل خطي وذلك بفرض ان u, v

مصفوفتان سعة كل منهما $n \times 1$ و k عدد حقيقي

$$1- A(u + v) = Au + Av$$

$$2- A(ku) = k(Au)$$

مثال 4: ليكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ فان التحويل $T: R^2 \rightarrow R^3$ والمعرف بالقاعدة

$T(x) = Ax$ هل هذا التحويل يمثل تحويلاً خطياً؟

الحل:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$1- u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$A(u + v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$A(u) + A(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$2- ku = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}$$

$$A(ku) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 + ky_1 \\ 3kx_1 \end{bmatrix}$$

$$k(Au) = k \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 + ky_1 \\ 3kx_1 \end{bmatrix}$$

∴ التحويل يمثل تحويلاً خطياً

ملاحظات:

- 1- التحويل $T: V \rightarrow W$ بحيث $T(v) = 0 \quad \forall v \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الصفري.
- 2- التحويل $T: V \rightarrow W$ بحيث $T(v) = v \quad \forall v \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الذاتي.
- 3- التحويل $T: V \rightarrow W$ بحيث $T(v) = kv \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{R}$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التمدد إذا كان $(k > 1)$ و انكماش إذا كان $(0 < k < 1)$

مثال 5: لتكن v_1, v_2, v_3 متجهات في R^3 , $T: R^3 \rightarrow R^3$ تحويل خطي بحيث ان

$$T(v_1) = (1, -1, 2), T(v_2) = (0, 2, -1), T(v_3) = (-1, 2, 0)$$

$$T(v_1 - 3v_2 + 4v_3) \quad -1$$

$$T\left(\frac{-1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3\right) \quad -2$$

الحل:

$$\begin{aligned} 1- T(v_1 - 3v_2 + 4v_3) &= T(v_1) - 3T(v_2) + 4T(v_3) \\ &= (1, -1, 2) - (0, 6, -3) + (-4, 8, 0) \\ &= (-3, 1, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- T\left(\frac{-1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3\right) &= \frac{-1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3) \\ &= \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) + \left(0, 1, \frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right) \end{aligned}$$

مبرهنة: اذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فان

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ لكل $\vec{v} \in V$.
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$ لكل $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

البرهان: ليكن \vec{v} أي متجه في V

1. بما ان $0\vec{v} = \vec{0}$ ان $T(0\vec{v}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$ ان $T(0\vec{v}) = 0T(\vec{v}) = \vec{0}$
2. $T(-\vec{v}) = T(-1 \cdot \vec{v}) = -T(\vec{v})$
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v} + (-1) \cdot \vec{w}) = T(\vec{v}) + (-1) \cdot T(\vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$

نظرية:- ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات V الى W ولتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

أساس للفضاء V . اذا كان v متجهاً في V فان $T(v)$ سيحدد بصورة كاملة بواسطة

$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$

البرهان:

بما ان v متجهاً في V و S أساس ل V فتستطيع ان تكتب

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

وبأجراء التحويل

$$T(v) = T(k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n)$$

بما ان التحويل هو تحويل خطي يعني انه يحقق الشرطين وبذلك يكون

$$T(v) = T(k_1v_1) + T(k_2v_2) + \dots + T(k_nv_n)$$

$$T(v) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \dots + k_nT(v_n)$$

وهذا يعني $T(v)$ حدد بواسطة $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$

واجبات:

1- قرر فيما اذا كان التحويل $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ والمعرف بالقاعدة $T(x, y) = (y, x - 1)$ تحويلاً خطياً ام لا؟

2- قرر فيما اذا كان التحويل $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ و المعرف بالقاعدة $T \begin{bmatrix} x & -y \\ z & w \end{bmatrix} = (x - y, 0, z + w)$

تحويلاً خطياً ام لا؟

3- اثبت ان التحويل $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ و المعرف بالقاعدة $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (2b - c)x$ تحويلاً

خطياً.

نواة ومدى التحويل الخطي:

تعريف: ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فإن مجموعة جميع المتجهات في V التي صورة كل منها بواسطة T تساوي صفر تسمى نواة T وتكتب $\ker(T)$. اما مجموعة جميع المتجهات في W والتي عبارة عن صورة لعلى الأقل متجه واحد في V بواسطة T تسمى مدى T وتكتب $\text{ran}(T)$.

يمكن تعريف كل من $\ker(T)$ و $\text{ran}(T)$ جبرياً على النحو التالي

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

$$\text{ran}(T) = \{w \in W : \exists v \in V, T(v) = w\}$$

مثال 6: ليكن $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ والمعرف بالصيغة $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ تحويلاً خطياً جد

$$\ker(T), \text{ran}(T)$$

الحل: واضح ان المتجهات التي يكون مركباتها باتجاه x, y تساوي صفر تكون صورتها بواسطة T هي المتجه الصفري لذا فإن

$$\ker(T) = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

اما صورة T فتكون من جميع المتجهات في المستوى xy

$$\text{ran}(T) = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

نظرية: ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فإن $\ker(T)$ فضاء جزئي من V و $\text{ran}(T)$ فضاء جزئي من W .

البرهان:

$\ker(T)$ فضاء جزئي من V : لكي يكون $\ker(T)$ فضاء جزئي من V يجب علينا اثبات انها مغلقة بتأثير عملية و الضرب بعدد نفرض $u, v \in \ker(T)$

$$1- T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

∴ مغلقة بتأثير عملية الجمع

$$\begin{aligned} 2- T(kv) &= kT(v) \\ &= k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

∴ مغلقة بتأثير عملية الضرب بعدد

∴ $\ker(T)$ فضاء جزئي من V

نفرض ان $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ المطلوب اثبات $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T), k(w_1) \in \text{Im}(T)$ أي يجب إيجاد متجهين (a, b) في V بحيث $T(a) = w_1 + w_2, T(b) = k(w_1)$ بما ان $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ فإن يوجد متجهات في V بحيث $T(a_1) = w_1, T(a_2) = w_2$ نفرض:

$$a_1 + a_2 = a$$

$$ka_1 = b$$

$$\begin{aligned} T(a) &= T(a_1 + a_2) \\ &= T(a_1) + T(a_2) \\ &= w_1 + w_2 \end{aligned}$$

$$T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1$$

∴ $\text{Im}(T)$ فضاء جزئي من W

مثال 7: اذا كان $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو عملية الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ بين أي المتجهات التالية تقع في

نواة T $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و أي من المتجهات تقع في مدى T $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؟

الحل:

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - b \\ -8a + 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2a - b = 1 \dots \dots (1) \quad \times 4$$

$$-8a + 4b = -4 \dots \dots (2)$$

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{ran}(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - b \\ -8a + 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2a - b = 5 \dots \dots (1) \quad \times 4$$

$$-8a + 4b = 0 \dots \dots (2)$$

$$0 + 0 \neq 20 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{ran}(T)$$