جامعة ديالى

كلية التربية الاساسية

قسم الحاسبات

المرحلة الاولى

COLLEGE OF BASIC EDUCATION

هياكل متقطعة

الكورس الاول

الدراسة الصباحية

م.م. زينب قحطان محمد

١٤٣٩هـ

٢٠١٧م

الفصل الأول
نظرية الفئات
Set Theory

في هذا الفصل:

- ✔ الفئات والعناصر
- ✔ الفئات الشاملة والفئات الخالية
- ✔ الفئات الجزئية
- ✔ مخططات ڤن
- ✔ العمليات على الفئات
- ✔ جبر الفئات والثُنائية
- ✔ الفئات المنتهية، مبدأ العد
- ✔ فصول الفئات، فئات القوى، التجزىء

الفئات والعناصر — Sets and Elements

الفئة هى مجموعة من الأشياء، يقال لها عناصر elements or members، وعادة تستخدم الحروف الكبيرة $A, B, X, Y, \ldots$ كرموز للفئات والحروف الصغيرة $a, b, x, y, \ldots$ كرموز لعناصر الفئات.

والتقرير "p عنصر من الفئة A" أو التقرير المكافئ "p ينتمى إلى A" يكتب

$$p \in A$$

أما التقرير "p ليس عنصراً فى A"، أى نفى التقرير $p \in A$، فيكتب

$$p \notin A$$

حقيقة أن المجموعة تتحدد تحديداً كاملاً إذا تم تحديد عناصرها تعرف باسم مبدأ المد.

مبدأ المَدّ **Principle of Extension**

الفئتان A وB متساويتان، إذا، وفقط إذا، احتوتا على نفس العناصر.

تحديد الفئات Specifying Sets

توجد أساسًا طريقتان للتعبير عن الفئة. الطريقة الأولى تتلخص فى سرد عناصر الفئة، إذا كان ذلك ممكنا، مثلاً

$$A = \{\mathrm{a, e, i, o, u}\}$$

تمثل الفئة التى عناصرها الحروف a, e, i, o, u. لاحظ أن العناصر بينها فصلات (,) ومحتواة بين قوسين { }. والطريقة الثانية أن تذكر الخواص التى تميز العناصر فى هذه الفئة. مثلاً

$$B = \{x\text{: } x \text{ is an even integer, } x > 0\}$$

ونقرأ "B هى فئة العناصر x، حيث x عدد صحيح زوجى وأكبر من الصفر". يرمز ذلك للفئة B التى عناصرها الأعداد الزوجية الموجبة. وفى هذه الحالة يرمز حرف x لعنصر نمطى فى الفئة و (:) colon يقرأ "حيث" وأيضًا (,) comma تقرأ "و".

مسألة محلولة 1.1

(*a*) الفئة السابقة A يمكن أيضًا كتابتها كالآتى:

$$A = \{x: x \text{ is a letter in the English alphabet, } x \text{ is a vowel}\}$$

أى أن A هى فئة الحروف المتحركة فى اللغة الإنجليزية. لاحظ أن $b \notin A$، $e \in A$، $p \notin A$.

(*b*) لا نستطيع سرد جميع عناصر الفئة B السابقة، بالرغم من أننا نحددها تمامًا فنكتب عادة

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

حيث يُفترض أن كل شخص يعلم ماذا نقصد هنا، وهو الاسترسال فى ذكر الأعداد الزوجية الموجبة. ونلاحظ أن $8 \in B$ ولكن $-7 \notin B$.

(*c*) لتكن $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$، أى أن E تتكون من الأعداد التى هى حلول للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$، أحيانًا تسمى E فئة الحل solution set للمعادلة المعطاة. ولأن حلول المعادلة هى 1، 2 يمكن كتابة $E = \{1, 2\}$.

(*d*) لتكن $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$، $F = \{2, 1\}$ و $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$، فإن $E = F = G$. ونلاحظ أن الفئة لا تعتمد على طريقة عرض عناصرها؛ أى أن الفئة تظل كما هى إذا تكررت عناصرها أو أعيد ترتيبها.

Solved Problem 1.1

(*a*) The set A above can also be written as

$A = \{x: x \text{ is a letter in the English alphabet, } x \text{ is a vowel}\}$

Observe that $b \notin A$, $e \in A$, and $p \notin A$.

(*b*) We could not list all the elements of the above set B although frequently we specify the set by writing

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

where we assume that everyone knows what we mean. Observe that $8 \in B$ but $-7 \notin B$.

(*c*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$. In other words, E consists of those numbers which are solutions of the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sometimes called the *solution set* of the given equation. Since the solutions of the equation are 1 and 2, we could also write $E = \{1, 2\}$.

(*d*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ and $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$. Then $E = F = G$. Observe that a set does not depend on the way in which its elements are displayed. A set remains the same if its elements are repeated or rearranged.

✓ يجب أن تعرف

بعض الفئات يتكرر ذكرها ولذلك نستخدم بعض الرموز الخاصة للتعبير عنها

فئة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

فئة الأعداد الصحيحة $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

فئة الأعداد النسبية $= Q$

فئة الأعداد الحقيقة $= R$

فئة الأعداد المركبة $= C$

وحتى إذا أمكننا سرد عناصر الفئة فإن ذلك قد لا يكون عمليًا. فمثلاً، لا نسرد عدد المواليد فى العالم خلال عام 1976 بالرغم من إمكانية حصر ذلك نظريًا.

أى أننا نصف الفئة بسرد عناصرها فقط إذا كانت تحتوى على قليل من العناصر. أما فى غير ذلك، فإننا نصف الفئة بالخاصية التى تميز عناصرها.

وحقيقة إنه يمكن وصف فئة بخاصية ما تُعرف بمبدأ التجريد.

where we assume that everyone knows what we mean. Observe that $8 \in B$ but $-7 \notin B$.

(*c*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$. In other words, E consists of those numbers which are solutions of the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sometimes called the *solution set* of the given equation. Since the solutions of the equation are 1 and 2, we could also write $E = \{1, 2\}$.

(*d*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ and $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$. Then $E = F = G$. Observe that a set does not depend on the way in which its elements are displayed. A set remains the same if its elements are repeated or rearranged.

✓ يجب أن تعرف

بعض الفئات يتكرر ذكرها ولذلك نستخدم بعض الرموز الخاصة للتعبير عنها

فئة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

فئة الأعداد الصحيحة $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

فئة الأعداد النسبية $= Q$

فئة الأعداد الحقيقية $= R$

فئة الأعداد المركبة $= C$

وحتى إذا أمكننا سرد عناصر الفئة فإن ذلك قد لا يكون عمليًا. فمثلاً، لا نسرد عدد المواليد فى العالم خلال عام 1976 بالرغم من إمكانية حصر ذلك نظريًا.

أى أننا نصف الفئة بسرد عناصرها فقط إذا كانت تحتوى على قليل من العناصر. أما فى غير ذلك، فإننا نصف الفئة بالخاصية التى تميز عناصرها.

وحقيقة إنه يمكن وصف فئة بخاصية ما تُعرف بمبدأ التجريد.

Principle of Abstraction **مبدأ التجريد**

إذا أعطيت فئة U وأى خاصية P، فإنه توجد فئة A عناصرها هى بالضبط عناصر الفئة U التى تحقق الخاصية P.

الفئة الشاملة والفئة الخالية

Universal Set and Empty Set

فى أى تطبيق لنظرية الفئات، تكون عناصر كل الفئات تحت الفحص منتمية إلى فئة معينة كبيرة تسمى الفئة الشاملة. مثلاً فى الهندسة المستوية تتكون الفئة الشاملة من جميع النقط فى المستوى. وفى الدراسات السكانية فإن الفئة الشاملة تتكون من جميع سكان العالم. سوف نرمز للفئة الشاملة بالرمز

$$U$$

إلا إذا ذكر غير ذلك صراحة.

بالنسبة لفئة ما U والخاصية P، قد لا يوجد أى عنصر من U يحقق الخاصية P. على سبيل المثال اعتبر الفئة

$$S = \{x: x \text{ is a positive integer, } x^2 = 3\}$$

هذه الفئة لا تحتوى على أية عناصر حيث لا يوجد عدد صحيح موجب له الخاصية المطلوبة. تسمى الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر بالفئة الخالية أو الفئة الصفرية empty or null set ويرمز لها بالرمز

$$\varnothing$$

وتوجد فئة خالية وحيدة؛ أى أنه إذا كان كل من S و T فئة خالية فإن $S = T$ لأن لهما بالضبط نفس العناصر، بالتحديد، لا شيء.

Subsets الفئات الجزئية

إذا كان كل عنصر من الفئة A هو أيضًا عنصر من الفئة B، فإن A تسمى فئة جزئية من B، ونقول أيضًا أن الفئة A محتواة فـي الفئـة B أو أن B تحتـوى A. وتكتب هذه العلاقة

$$A \subseteq B \qquad \text{أو} \qquad B \supseteq A$$

مسـألة محلولـة 1.2 الفئـة $E = \{2, 4, 6\}$ هـي فئـة جزئيـة مـن الفئـة $F = \{6, 2, 4\}$ حيث أن كل عدد 2، 4، 6 ينتمى إلى E ينتمى أيضًـا إلـى F. وفى الحقيقة $E = F$. بالمثل يمكن إثبات أن كل فئة هى فئة جزئية من نفسها.

Solved Problem 1.2 The set $E = \{2, 4, 6\}$ is a subset of the set $F = \{6, 2, 4\}$, since each number 2, 4, and 6 belonging to E also belongs to F. In fact, $E = F$. In a similar manner, it can be shown that every set is a subset of itself.

يجب ملاحظة الخواص التالية للفئات :

(i) كل فئة A هى فئة جزئية من الفئة الشاملة U، لأنه مـن التعريـف جميـع عناصر A تنتمى إلى U. وأيضًا الفئة الخالية $\varnothing$ هى فئة جزئية من A.

(ii) كل فئة A هى فئة جزئية من نفسها وذلك لأن عناصر A تنتمى إلى A.

(iii) إذا كان كل عنصر من A ينتمى إلى الفئة B وكل عنصر من B ينتمـى إلى الفئة C، فمن الواضح أن كل عنصر من A ينتمـى إلـى C وبعبـارة أخرى إذا كان $A \subseteq B$ و$B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

(iv) إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $B \subseteq A$ فإن A وB لهما نفـس العنـاصر أى أن $A = B$. وبالعكس إذا كانت $A = B$ فإن $A \subseteq B$، $B \subseteq A$ وذلـك لأن كـل فئة هى فئة جزئية من نفسها.

ونصوغ هذه النتائج فى الشكل الآتى:

نظرية 1.1

(i) لأى فئة A لدينا $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.

(ii) لأى فئة A لدينا $A \subseteq A$.

(iii) إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

(iv) $A = B$ إذا، وفقط إذا، كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

إذا كانت $A \subseteq B$ فإنه من الممكن أن تكون $A = B$. أما عندما تكون $A \subseteq B$ ولكن $A \neq B$، فإننا نقول إن A فئة جزئية أصيلة proper subset من B ويرمز لها بالرمز $A \subset B$. مثلاً نفترض أن

$$A = \{1, 3\} \qquad B = \{1, 2, 3\} \qquad C = \{1, 3, 2\}$$

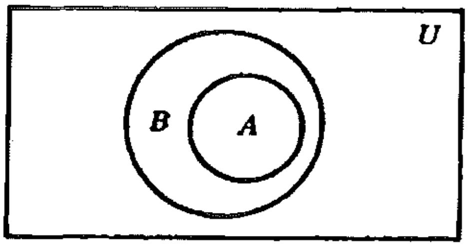
فإن A وB فئتان جزئيتان من C، لكن A فئة جزئية أصيلة من C، بينما B ليست فئة جزئية أصيلة من C حيث $B = C$.

مخططات ڤن Venn Diagrams

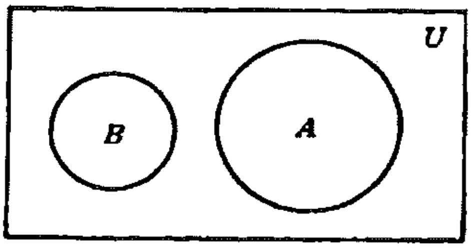
مخططات ڤن هى تمثيل تصويرى للفئات حيث تمثل الفئات بمساحات محاطة بمنحنيات مغلقة فى المستوى.

الفئة الشاملة تمثل بمساحة داخل مستطيل والفئات الأخرى تمثل بأقراص داخل هذا المستطيل. فإذا كانت $A \subseteq B$ فإن القرص الذى يمثل A يقع تمامًا داخل القرص الذى يمثل B كما فى شكل 1-1(a). إذا كانت A وB منفصلتين بمعنى أنه لا يوجد عنصر مشترك بينهما فإن القرص الممثل لـ A منفصل عن القرص الممثل لـ B كما فى الشكل 1-1(b).

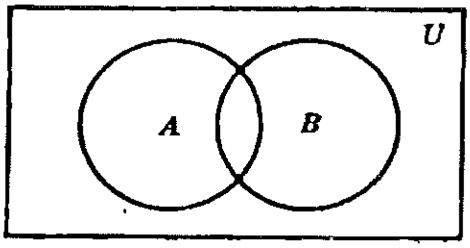
وعلى أية حال إذا كانت A وB أى فئتين فمن الممكن أن توجد بعض العناصر فى A ولكنها ليست فى B وكذلك بعض العناصر فى B وليست فى A وبعضها الآخر يوجد فى كل من A وB. وأيضًا هناك عناصر لا توجد فى A ولا توجد فى B. وعمومًا تمثل هذه الحالة لـ A وB بالشكل 1-1(c).



(a) $A \subseteq B$



(b) A، B فئتان منفصلتان



(c)

شكل 1-1

الحجج ومخططات ڤن **Arguments and Venn Diagrams**

كثير من التقارير الكلامية هى فى الأساس تقارير عن فئات وبالتالى يمكن وصفها بأشكال ڤن. ولذلك فإنه يمكن استعمال أشكال ڤن لتحديد ما إذا كانت الحجة argument صحيحة أم لا.

مسألة محلولة 1.3 أثبت أن الحجة التالية [مقتبسة من كتاب عن المنطق مؤلفه Lewis Carroll مؤلف كتاب "أليس فى بلاد العجائب"] صحيحة.

S_1: الطاسات الخاصة بى هى الشيء الوحيد، من بين كل ما أملك، المصنوع من القصدير.

S_2: أنا وجدت كل هداياك لى مفيدة جداً.

S_3: ولا أى من طاساتى لها أدنى استعمال.

S: هداياك لى غير مصنوعة من القصدير.

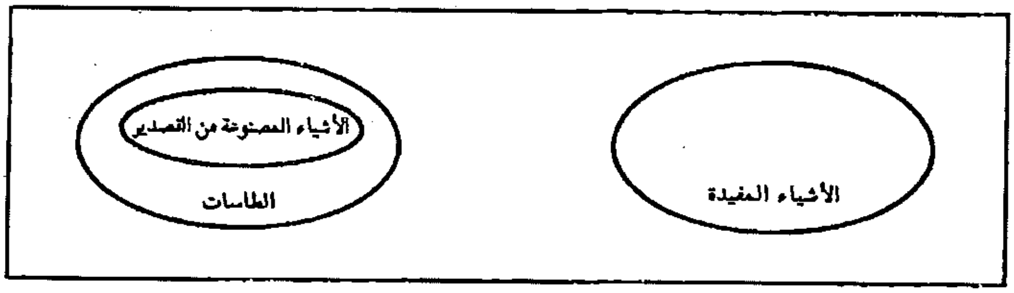
Solved Problem 1.3 Show that the following argument (adapted from a book on logic by Lewis Carroll, the author of *Alice in Wonderland*) is valid:

S_1: My saucepans are the only things I have that are made of tin.
S_2: I find all your presents very useful.
S_3: None of my saucepans is of the slightest use.

S: Your presents to me are not made of tin.

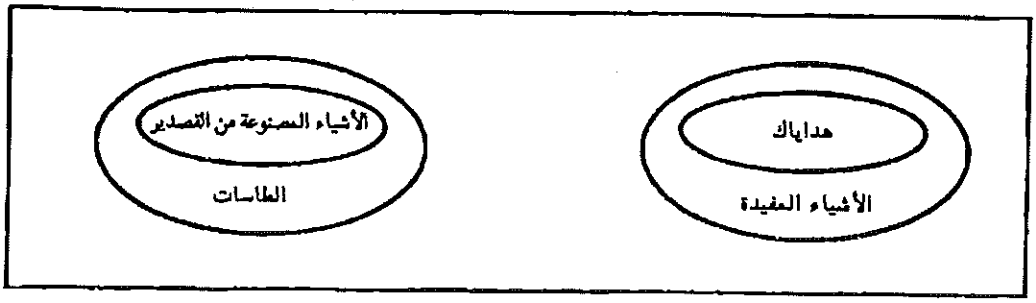
التقارير S_1، S_2، S_3 هـي الفـروض، والتقريـر S هـو النتيجـة. تصبـح الحجـة صحيحة إذا كان S ينتج منطقيًا من الفروض S_1، S_2، وS_3.

من S_1 الأشياء المصنوعة من القصدير هـى فئة جزئية من فئة الطاسات. ومن S_3 فئة الطاسات وفئـة الأشيـاء المفيـدة منفصلتـان وبالتـالى نحصـل علـى مخطط ڤن 1-2.



شكل 1-2

من S_2 فئة (هداياك) هى فئة جزئيـة مـن فئـة الأشيـاء المفيـدة وبالتـالى نحصل على مخطط ڤن 1-3.



شكل 1-3

والنتيجة من الواضح أنها صحيحة من أشكال فن السابقة وذلك لأن فئة (هداياك) (your presents) منفصلة عن فئة (tin objects) الأشياء المصنوعة من القصدير.

العمليات على الفئات Set Operations

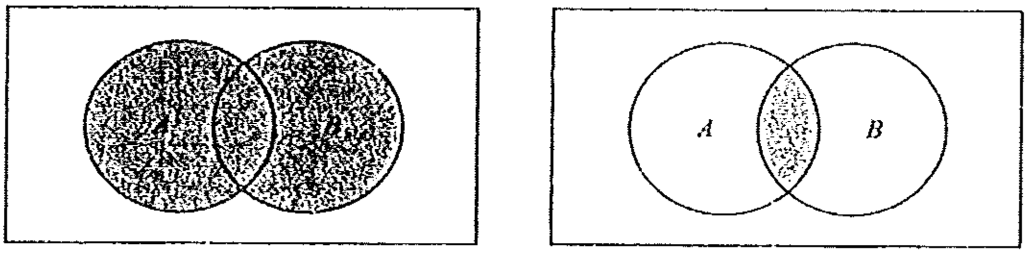
هذا البند يقدم عدداً من العمليات الهامة على الفئات.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

اتحاد union فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، هو فئة جميع العناصر التى تنتمى إلى A أو إلى B أى أن

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B)$$

وهنا or تستخدم بمعنى "أو/ و". شكل 1-4(a) هو مخطط فن حيث الاتحاد $A \cup B$ مُظلل



(a)اتحاد A و B مظلل (b)تقاطع A و B مظلل

شكل 1-4

تقاطع intersection فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cap B$، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى كل من A وB أى أن

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B)$$

شكل 1-4(b) هو مخطط فن حيث التقاطع $A \cap B$ مظلل.

والنتيجة من الواضح أنها صحيحة من أشكال ڤن السابقة وذلك لأن فئة (هداياك) (your presents) منفصلة عن فئة (tin objects) الأشياء المصنوعة من القصدير.

العمليات على الفئات Set Operations

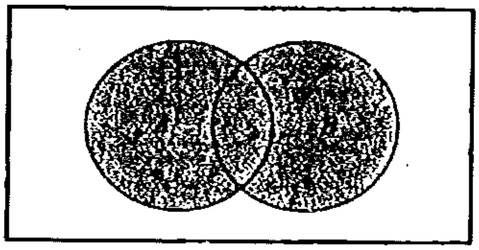
هذا البند يقدم عدداً من العمليات الهامة على الفئات.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

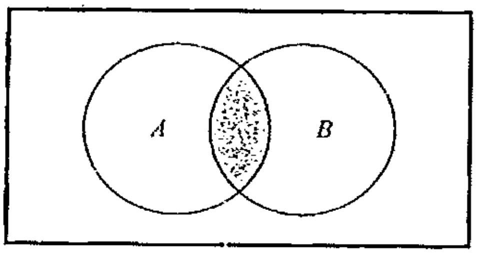
اتحاد union فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، هو فئة جميع العناصر التى تنتمى إلى A أو إلى B أى أن

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$$

وهنا or تستخدم بمعنى "أو/و". شكل 1-4(a) هو مخطط ڤن حيث الاتحاد $A \cup B$ مُظلل



انحاد A و B مظلل(a)



تقاطع A و B مظلل(b)

شكل 1-4

تقاطع intersection فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cap B$، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى كل من A وB أى أن

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$$

شكل 1-4(b) هو مخطط ڤن حيث التقاطع $A \cap B$ مظلل.

إذا كـانت $A \cap B = \varnothing$ أى إذا كـان A وB لا يحتويـان علـى أى عنـــاصر مشتركة، فإن A وB يقال عنهما أنهما منفصلتين أو غير متقاطعتين.

مسألة محلولة 1.4 لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$، $C = \{2, 3, 5, 7\}$.
أوجد $(a)\ A \cup B$، $(b)\ A \cap B$، $(c)\ A \cup C$، $(d)\ A \cap C$.

Solved Problem 1.4 Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, and $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Find $(a)\ A \cup B$; $(b)\ A \cap B$; $(c)\ A \cup C$; and $(d)\ A \cap C$.

الحل:

$(a)\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$(b)\ A \cap B = \{3, 4\}$
$(c)\ A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$(d)\ A \cap C = \{2, 3\}$

عملية احتواء الفئات ترتبط بشدة بعمليات الاتحاد والتقاطع كمـا يتضـح من النظرية التالية.

نظرية 1.2: التقارير التالية متكافئة : $A \subseteq B$، $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$.

المتممات Complements

نذكر أن جميع الفئات تحت الدراسة فى وقت ما هى فئـات جزئيـة مـن فئـة شاملة U. المتمم المطلق absolute complement للفئة A، ونرمز له بـالرمز A^C، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى A. أى أن

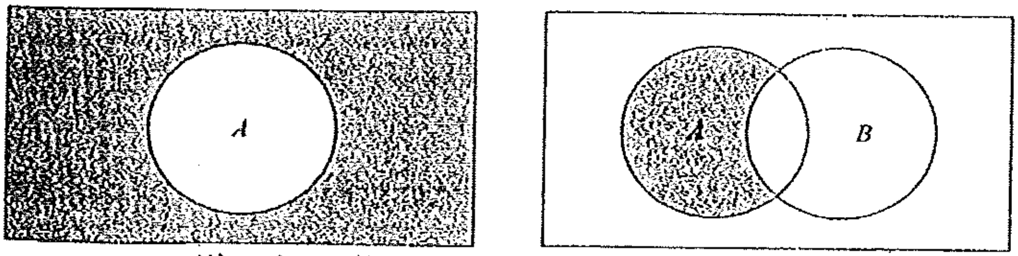
$$A^c = \{x: x \in U, x \notin A\}$$

شكل $1\text{-}5(a)$ هو مخطط ڤن حيث A^c مُظللة.

المتمم النسبى relative complement للفئة B بالنسـبة للفئـة A أو الفـرق difference بين A وB، ويرمز له بـ $A \setminus B$، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى A ولا تنتمى إلى B، أى أن

$$A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

الفئة $A\setminus B$ تقرأ "A ناقص B". شكل 1-5(b) مخطط ڤن حيث $A\setminus B$ مُظللة.



المتمم A^c مظلل(a) الفرق $A\setminus B$ مظلل(b)

شكل 1-5

الفرق المتماثل Symmetric Difference

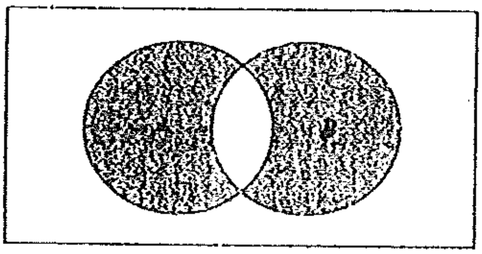
الفرق المتماثل للفئتين، A وB يرمز له بالرمز $A \oplus B$، يتكون من العناصر التى تنتمى إلى A أوB وليس كليهما؛ أى أن

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ويمكن أيضًا إثبات أن

$$A \oplus B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فإن:
$A\setminus B = \{1, 2, 3\}$، $B\setminus A = \{7, 8, 9\}$، وبالتالى فإن $A \oplus B = [1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.

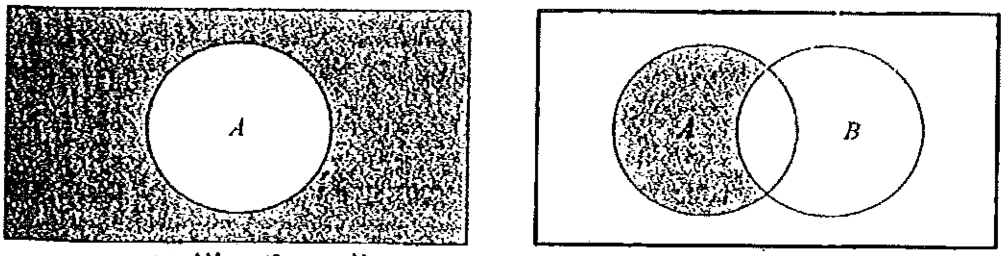


الفرق المتماثل$A\oplus B$ مظلل

شكل 1-6

الشكل 1-6 يوضح مخطط ڤن حيث $A \oplus B$ مظلل.

الفئة $A\setminus B$ تقرأ "A ناقص B". شكل 1-5(b) مخطط ڤن حيث $A\setminus B$ مُظللة.



الفرق $A\setminus B$ مظلل(b) المتمم A^c مظلل(a)

شكل 1-5

الفرق المتماثل **Symmetric Difference**

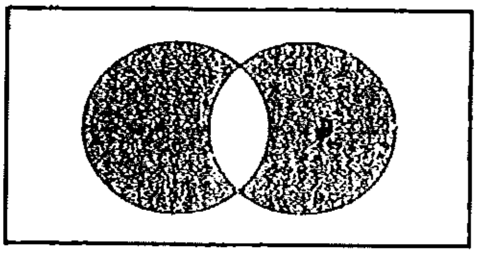
الفرق المتماثل للفئتين، A وB يرمز له بالرمز $A \oplus B$، يتكون من العناصر التى تنتمى إلى A أوB وليس كليهما، أى أن

$$A \oplus B = (A \cup B)\setminus (A \cap B)$$

ويمكن أيضًا إثبات أن

$$A \oplus B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فإن:
$A\setminus B = \{1, 2, 3\}$، $B\setminus A = \{7, 8, 9\}$، وبالتالى فإن $A \oplus B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.



الفرق المتماثل$A\oplus B$ مظلل

شكل 1-6

الشكل 1-6 يوضح مخطط ڤن حيث $A \oplus B$ مظلل.

جبر الفئات والثُّنائية Algebra of Sets and Duality

الفئات مع عمليات الاتحاد والتقاطع والمتمم تحقق عدة قوانين أو متطابقات مُسجلة فى الجدول 1-1. فى الحقيقة نصوغ ذلك شكليًا كالآتى:

نظرية 1.3: الفئات تحقق القوانين التى فى الجدول 1-1.

وتتلخص إحدى طرق إثبات المعادلات التى تحتوى على عمليات على الفئات فى استخدام معنى انتماء عنصر ما x إلى كل من جانبى المعادلة. تستخدم أشكال فِن كمرشد لتوضيح هذه الحجة. وثمة طريقة أخرى للبرهان باستخدام المتطابقات، فمثلاً يمكن إثبات النظرية التالية $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$ كالآتى:

$$(A \setminus B)^c = \left(A \cap B^c\right)^c$$
$$= A^c \cup B^{cc}$$
$$= A^c \cup B$$

جدول 1-1 قوانين جبر الفئات

Idempotent laws قوانين الرسوخ	
(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws قوانين الدمج	
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws قوانين التبديل	
(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws قوانين التوزيع	
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws قوانين التطابق	
(5a) $A \cup \varnothing = A$	(5b) $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Involution laws قوانين الالتفاف	
(7) $(A^c)^c = A$	
Complement laws قوانين التمام	
(8a) $A \cup A^c = U$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$
(9a) $U^c = \varnothing$	(9b) $\varnothing^c = U$
DeMorgan's laws قوانين دى مورجان	
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

يلاحظ أن المتطابقات في جدول 1-1 نظمت فى أزواج، مثلاً $(2a)$ و$(2b)$. ندرس الآن المبدأ الكامن خلف هذا التنظيم. لتكن E معادلة فـى جـبر الفئـات. المعادلة E^* التى نحصل عليـها بتبديـل كـل الرمـوز $\cup$، $\cap$، U و $\varnothing$ فـى E بالرموز $\cap$، $\cup$، $\varnothing$ و U على الترتيب تسمى المعادلة المتبادلة مع المعادلة E. ويلاحظ أن أزواج القوانين فى الجدول 1-1 متبادلة مع بعضها البعض. وهذه حقيقة فى جبر الفئات تسمى مبدأ الثنائية principle of duality، أى أنه إذا كانت أى معادلة E هى متطابقة فإن المعادلة E^* المتبادلـة معـها هـى أيضًـا متطابقة.

الفئات المنتهية، مبدأ العد

Finite Sets, Counting Principle

يقال للفئة أنها منتهية إذا احتوت بالضبط على m مـن العنـاصر المختلفـة حيث m عدد صحيح غير سالب. فى غير هذه الحالة فـإن الفئـة تكـون غـير منتهية (لا نهائية). فمثلاً الفئة الخاليـة $\varnothing$ وفئـة حـروف اللغـة الإنجليزيـة كلتاهما تمثلان فئة منتهية، بينما فئة الأعداد الصحيحة الزوجيـة الموجبـة $\{2, 4, 6, ...\}$ فئة غير منتهية (لا نهائية).

التمثيـل الرمـزى notation $n(A)$ يشـير إلـى عـدد العنـاصر فـى الفئـة المنتهية A.

تمهيدية 1.4: إذا كانت A وB فئتيـن منتـهيتين منفصلتيـن فـإن $A \cup B$ فئـة منتهية

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

البرهان Proof. لعد عناصر $A \cup B$ نعـد أولاً عنـاصر A ونجـد هنـاك $n(A)$ منها. العناصر الأخرى الموجودة فى $A \cup B$ هى العناصر التى تنتمى إلى B وغير موجودة فى A. لكن A وB منفصلتان فلا يوجد عنصـر مـن B موجـود

فى A أى أن هناك $n(B)$ من العناصر فى B ولا توجد فى A. وبالتالى فإن $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

نظرية 1.5: إذا كانت A وB فئتين منتهيتين فإن $A \cup B$ فئة منتهية و

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

يمكن استخدام هذه النتيجة للحصول على صيغة فى حالة 3 فئات.

ملحوظة 1.6: إذا كانت A، B، C فئات منتهية فإن $A \cup B \cup C$ فئة منتهية

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

فصول الفئات، فئات القوى، التجزيئات

Classes of Sets, Power Sets, Partitions

إذا كانت S فئة وأردنا الحديث عن الفئات الجزئية فإننا نتطرق إلى فئة الفئات. فى هذه الحالة حتى لا يحدث اضطراب سوف نستخدم تعبير فصل الفئات أو تجمع الفئات بدلاً من فئة الفئات. إذا أردنا أيضًا أن نعتبر بعض الفئات فى هذا الفصل من الفئات فإننا نتكلم عن فصل جزئى أو تجمع جزئى subclass أو subcollection.

فئات القوى Power Sets

إذا أعطيت الفئة S فيمكن أن نتكلم عن فصل كل الفئات الجزئية من S. هذا الفصل يسمى فئة القوى للفئة S ويرمز له بالرمز Power (S). إذا كانت S فئة منتهية فإن Power(S) تكون منتهية أيضًا وعدد عناصرها هو 2 مرفوعة للقوة $n(S)$ أى أن

$$n(\text{Power}(S)) = 2^{n(S)}$$

التجزيئات Partitions

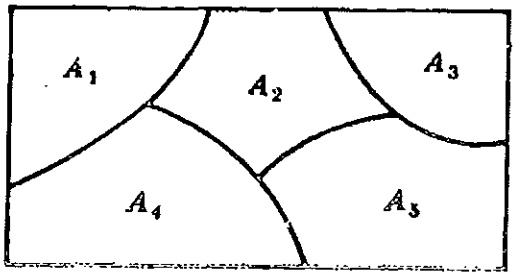
إذا كانت S فئة غير خالية فإن تجزىء S هو تقسيم للفئة S إلى فئات جزئية غير خالية ومنفصلة. بالتحديد، فإن تجزىء الفئة S هو مجموعة Collection $\{A_i\}$ من فئات جزئية غير خالية من S حيث:

(i) كل عنصر $a \in S$ ينتمى إلى واحدة من A_i.

(ii) الفئات من $\{A_i\}$ منفصلة عن بعضها بمعنى:

إذا كان، $A_i \neq A_j$ فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$

والفئات الجزئية فى التجزىء partition تسمى خلايا Cells. شكل 1-7 يمثل تخطيط فن لتجزىء الفئة التى على شكل مستطيل إلى 5 خلايا A_1، A_2، A_3، A_4 وA_5 .



شكل 1-7

تعميم العمليات على الفئات Generalized Set Operations

لقد تم تعريف عمليات الاتحاد والتقاطع للفئات سابقًا على فئتين فقط، يمكن الآن تعميم هذه العمليات لأى عدد من الفئات سواء كان منتهيًا أو غير منتهى (لا نهائى) كالتالى:

نعتبر أولاً عدداً محدوداً من الفئات A_1، A_2، ...،A_m. الاتحاد والتقاطع لهذه الفئات يرمز له ويعرف كالتالى على الترتيب

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \cup_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ for some } A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \cap_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ for every } A_i\}$$

أى أن الاتحاد يتكون من تلك العناصر التى تنتمى على الأقل إلى واحدة من الفئات، والتقاطع يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلى كل الفئات.

وإذا كانت **A** أى مجموعة من الفئات، فإن الاتحاد والتقاطع لعناصر المجموعة **A** يعرفان ويرمز لهما على الترتيب بـ

$$\cup(A: A \in \mathbf{A}) = \{x: x \in A \text{ for some } A \in \mathbf{A}\}$$
$$\cap(A: A \in \mathbf{A}) = \{x: x \in A \text{ for every } A \in \mathbf{A}\}$$

أى أن الاتحاد يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلى واحدة على الأقل من الفئات فى المجموعة **A**، والتقاطع يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلى جميع الفئات فى المجموعة **A**.