# الفصل الثاني

## الكميات القياسية والكميات المتجهة

## *Scalers and vectors*

٢-١ المقدمة Introduction

تعتبر المعرفة الصحيحة بكل من الكميات القياسية Scalars و لكميات المتجهة Vectors امرا اساسيا في علم الفيزياء، واهميتها تتجسد في التعرف على طبيعتها و سلوكها و تغيرها بالنسبة لبعضها البعض وعلى وجه الخصوص تغيرها بالنسبة للزمن كما ان تحديد بدايتها ونهايتها ومعرفة موقعها في المستوى الديكارتي x-y plane ومقاديرها على المحور (x) والمحور (y) وحساب ذلك بدلالة زاوية المتجهة بدءأ من نقطة الأصل عن المحور السيني الموجب (x) وبتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة. كل ذلك يجعلنا نتعامل مع الكمية المتجهة بيسر و سهولة وحرصا على تبسيط الامر سنتناول كلا من هذين النوعين من كميات الانفراد .

بعد ذلك نتوقع ان يكون الطالب قادراً على :

١ - ان يميز بين الكميات القياسية ، والكميات المتجهة

٢ - أن يعدد بعض الأمثلة على كلا النوعين من الكميات القياسية والمتجهة من خلال دراسته المنهجية

٣- أن يختار الطريقة الرياضية الصحيحة للتعامل مع كل من الكميات القياسية والمتجهة

٤- أن يتعلم كيفية تحليل الكميات المتجهة لما في المستوى الديكارتي وفي الفراغ ويحدد مقدار واتجاه المحصلة

٥- أن يميز متجه الوحدة ، أهميته واستعمالاته التطبيقية ، ولاسيما في عمليتي الضرب القياسي والضرب الاتجاهي

### ٢-٢ الكميات القياسية (Scalars)

تعريف الكمية القياسية تعينا كاملا بالمعرفة  هي تلك الكمية التي يمكننا أن نعينه تعيينا كاملا بمعرفة

١- مقدارها Magnitude

٢- وحدة قياسها Measurement unit

ويمثل ذلك عادة بعدد متبوع بوحدة قياس مناسبة ، فمثلا عندما نقول : إن كتلة جسم ما تساوي (٥) دون أن نذكر وحدة قياس الكتلة المستخدمة ، فإن ذلك يجعلنا نتساءل هل وحدة القياس هي الكيلوغرام أم الباوند أم الغرام أم ماذا ؟ ولكننا : ان الكتلة تساوي (5Kg) نكون قد اوضحنا المسألة ايضاحاً تاما و في واقعنا هناك أمثلة كثيرة جدا على الكميات القياسية ، مثل الزمن والمساحة والحجم والكثافة والطاقة والشحنة ودرجة الحرارة ، وما إلى هنالك من الكميات التى تُحدد بمجرد قياسها تحديدا تاما . بعد أن عرفنا ذلك ، يمكننا أن نتعامل مع الكميات القياسية باستخدام القواعد الرياضية البسيطة في الجبر كالجمع والطرح والقسمة والضرب

٢-٣ الكميات المتجهة Vectors

تعريف الكمية المتجهة : هي الكمية الفيزيائية التي يمكننا تعيينها تعيينا كاملا بمعرفة كل من

١- مقدارها العددي magnitude

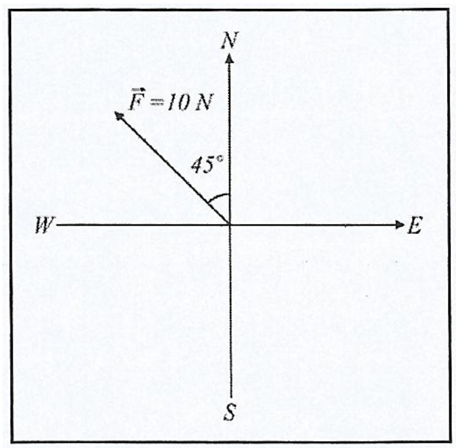
٢- اتجاهها direction

(سواء في المستوى (xy) او في الفراغ (xyz)

٣- نقطة تأثيرها Action point

٤- محور عملها Action axis

ومن الأمثلة المألوفة على الكميات المتجهة ، القوة force ، الإزاحة displacement ، شدة المجال المغناطيسي field magnetic ، السرعة Velocity ، التسارع التعجيل acceleration ، العزم . momentumومن الممكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم arrow مرسوم على محور عمله ، ونستخدم عادة المحاور الديكارتية لتحديد كل من المقدار والاتجاه وفق مقياس رسوم محدد ومعلوم ؛ حيث يكون طول السهم متناسبا مو مقدار الكمية المتجهة واتجاه السهم يعبر عن اتجاه تلك الكمية ، فعلى سبيل التطبيق ، إذا أثرت قوة مقدارها على جسم باتجاه الشمال الغربي N-W) direction) فإن هذه القوة يمكن تمثيلها بسهم طوله عشر وحدات طول كل منها تساوي (IN) ويكون السهم مرسوما بالاتجاه الذى يطابق اتجاه تأثير القوة على ويكون الجسم ، انظر الشكل (1-1)

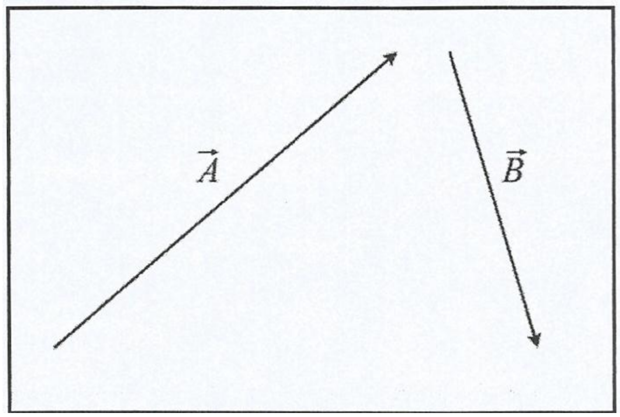



الشكل (١-١) يمثل القوة

ومن الجدير بالذكر أن الكمية المتجهة يتم تمثيلها برمز، وهو عبارة عن حرف لاتيني أو إنكليزي فوقه سهم مثل $\bar{A}$ أما مقدارها فيتم بكتابة الحرف A دون تحديد الاتجاه ، وعلى سبيل التطبيق في الشكل(1-1) المتجه F يمثل القوة ككمية متجهة، أما مقدارها فهو ( F=10 N) والسؤال الآن هو.هل يمكننا استخدام القوانين الجبرية البسيطة كالجمع والطرح والضرب مع الكميات المتجهة ؟ إن الإجابة الأولية هي لا يمكن إطلاقاً، ذلك أن للكميات المتجهة قوانينها المناسبة الخاصة بها ، وسنتناول هذه القوانين بشكل ل موجز بية الفقرات التالية

٤-٢ جمع المتجهات بطريقة الرسم البياني: adding vectors graphical method

إن هذه الطريقة تعتبر بدائية وغير عملية ولا سيما فيما إذا استخدمنا الطريقة التحليلية لإيجاد محصلة أكثر من متجهين، وسوف نتناول هذه الطريقة ي فقرة خاصة قادمة بي هذه الوحدة ولتوضيح طريقة جمع المتحهات بطريقة الرسم البياني، افرض المتجهين $(\vec{A})$ و . $(\vec{B})$ انظر الشكل (٢-٢)

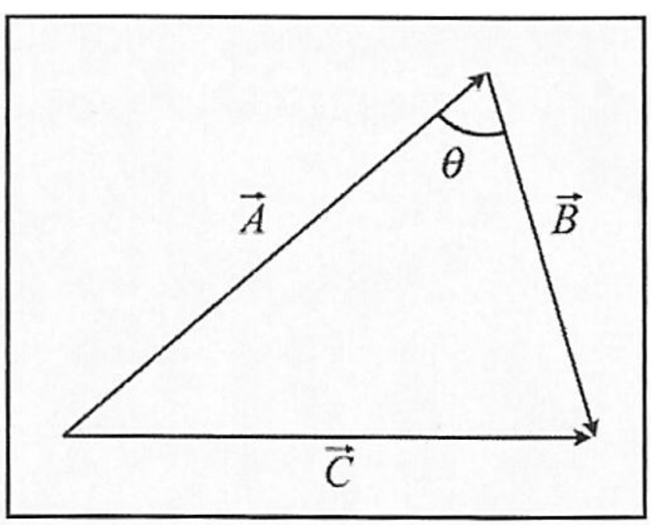



الشكل 2-2 ويمثل المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

وأردنا إيجاد محصلة هذين المتجهين مستخدمين طريقة الرسم البياني، نبدأ أولا بنقل المتجه الأول نقلاً صحيحاً بجميع مواصفاته الهندسية ، ثم نبدأ بعد ذلك بنقل المتجه حيث تكون بدايته عند نهاية المتجه الأول ثم نصل بين بداية المتجه A ونهاية المتجه B مراعين دقة الرسم الهندسي ، إن المتجه الجديد $(\vec{C})$ والذي بدايته عند بداية المتجه $(\vec{A})$ ونهايته عند نهاية المتجه $(\vec{B})$ هو حاصل جمع المتجهين (A) و(B) أي أن:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

انظر الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢) إيجاد محصلة اتجاهين باستخدام طريقة الرسم البياني

اما القيمة القياسية للمتجه $\vec{C}$ فتحسب بطريقتين ، الأولى هي الطريقة التحليلية ، والثانية باستخدام ما يسمى بقانون الجيب تمام cosine law ، وهذا يتطلب معرفة مقدار كل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وكذلك الزاوية المحصورة بين المتجه الأول $\vec{A}$ والمتجه الثانى $\vec{B}$ أما الصيغة الرياضية لقانون الجيب تمام فهي

$$C^2 = A^2 + B^2 = 2ABcos\ (\theta)$$

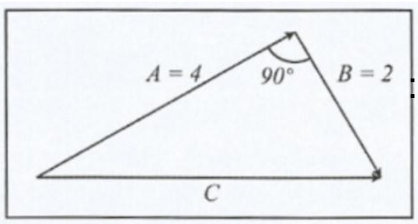
وفي هذه الطريقة فاننا نحتاج إلى استخدام المسطرة يخة حساب أطوال والمنقلة لحساب الزوايا ونعمد أيضا إلى اختيار مقياس رسم مناسب لجميع مقادير القوى التي نريد إيجاد محصلتها حيث أننا سوف نحصل على متجهين فقط مهما كان عدد المتجهات، ويمكننا معرفة مقدار كل منهما وكذلك معرفة مقدار الزاوية بينهما ويسميها البعض احيانا الطريقة الحسابية

مثال (٢-١)

باستخدام قانون الجيب تمام أوجد محصلة متجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المبينين بالشكل (٢-٣) علما ان الزاوية بينهما $(\theta = 90^o)$

الحل /

من الواضح ان الزاوية بين المتجهين تساوي $(\theta = 90^o)$ ، إذا :



الشكل (3- 2)

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2ABcos\ ((\theta)$$

$$= (4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2)cos\ (90) = 16+4=20$$

$$C^2 = 20$$

$$|C| = 4.47$$

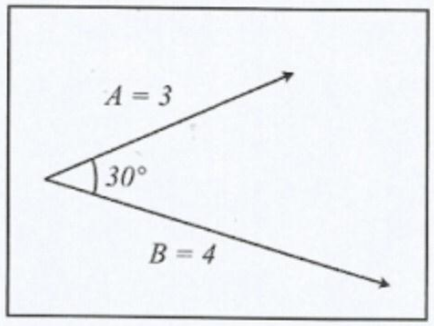
ملاحظة : لقد تم تحديد متجه المحصلة () ، حيث تكون بدايته هي بداية المتجه الأول و نهايته عند نهاية المتجه الثاني

مثال (٢-٢)

باستخدام قانون الجيب تمام Cosine law أوجد محصلة المتجهين (A=٣،B=٤ )

**المبين بالشكل**

(٤−٢) حيث ان مقدار الزاوية بينهما $(\theta = 30^{o})$



الشكل (4- 2)

الحل Solution

من المعلوم لدينا ان محصلة متجهين باستخدام قانون الجيب تمام يعبر عنها رياضيا على النحو التالي :

$$C^2 = A^2 + B^2 ABcos\,(\theta)$$

$$C^2 = (3)^2 + 4^2 + 2(3x4)\cos(30)$$

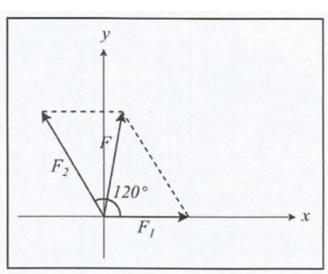
$C^2$=9+16+24(0.8660) =45.78

ICI=6.76 .

مثال (٣−٢)

قوتان مقدار كل $f_1 = 6n$ ومقدار الثانية ($F_2$=9N)تؤثران في نقطة مادية (p) انضر الشكل (٥−٢ ) منهما

باستخدام قانون الجيب تمام أوجد حسابيا محصلة هاتين القوتين اذا كانت الزاوية بينهما (١٢٠ْ =Ø)



الشكل (5- 2)

الحل Solution

هذا التطبيق مشابه في فكرته للتطبيق السابق (٢−٢) و باستخدام المعادلة الرياضية لقانون الجيب تمام نجد انن :

$$lFl = \sqrt{f_1^2+f_2^2 + 2f_1f_2\cos(\theta)}$$

$$=\sqrt{(6)^2+(9)^2 + 2(6)(9)\cos(120)}$$

$$= 7.9 \text{ N}$$

وهذا تطبيق مباشر يوضح كيف يمكننا إيجاد محصلة قوتين، وذلك إذا عرفنا مقدار كل منهما . ومقدار الزاوية المحصورة بينهما ، وهذا القانون لا يستخدم إلا مع الكميات المتجهة ، وسنناقش في الفقرات القادمة كيف يمكننا تحديد اتجاه هذه القوة المحصلة (F) استكمالا لتعريفها حيث اكتفينا بإيجاد مقدارها حسابيا وبتعيين موقعها وذلك بعد إكمال الشكل إلى متوازي أضلاع ، قطره يمثل القوة المحصلة(F)

## ١−٤−٢ خصائص جمع المتجهات Vectors addition properties

سنبين فيما يلي الخصائص الرياضية لعملية جمع المتجهات:

١- الخاصية التبادلية commutative law اذا كان لدينا المتجهين (A)و(B)

فان

$$A+B=B+A \qquad (2\text{-}6)$$

٢- الخاصية الترافقية association law في حالة الجمع الاتجاهي لثلاث كميات (A)و(B)و(c) فأن

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (2\text{-}7)$$

و من الجدير بالذكر هنا ان المتجه (A) لا يساوي المتجه (A-) أي ان :

$$A+(-A)=0 \tag{2-8}$$

## ٢-٤-٢ طرح المتجهات Vectors subtraction

هي العملية الثانية بعد الجمع وذلك لتحديد حاصل طرح الكميات المتجهة وهي تستند أصلا في معناها إلى ما سبق ذكره حول الجمع الاتجاهي مع مراعاة أن المتجه ($\vec{B}$)لا يساوى المتجه($-\vec{B}$)

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \tag{2-9}$$

اي ان عملية الطرح الاتجاهي تمت بأضافة المتجه ($-\vec{B}$) الى المتجه( $\vec{A}$ )

أي ان عملية الضرب الاتجاهي فسوف نناقشها بعد ان نتعرف على متجهات الوحدة في الفقرات القادمة من هذه الوحدة

## ٢-٥ المتجهات و مركباتها (طريقة التحليل ) Vectors and their componets

إن عملية تمثيل وتحديد الكمية المتجهة vector بطريقة الرسم التي قدمناها في الفقرة (٢-٤) من هذه الوحدة ، تعتبر عملية مملة وشاقة لما تتطلبه من دقة في الرسم الحرفي للكميات المتجهة ، وكذلك إتمام العمليات الأخرى كالجمع والطرح ولهذا تعد طريقة تمثيل وتحليل الكميات المتجهة باستخدام المحاور المتعامدة (x,y)

1-خصائص المحاور المتعامدة عند نقطة التقاطع ذات الإحداثيات(٠,٠) والاتجاهين السالب والموجب للمحاور
2-استخدام النظرية المعروفة والشهيرة بية المثلثات المتعامدة نظرية فيثاغورس لاتمام العمليات الحسابية

3-الاستفادة المباشرة من النسب المثلثية الثلاثة الجيب (sin)والجيب تمام (cos)والظل

(tan)لمعرفة ما يتعلق بتحديد الكمية المتجهة ، مقادير مركباتها وتحديد اتجاهها

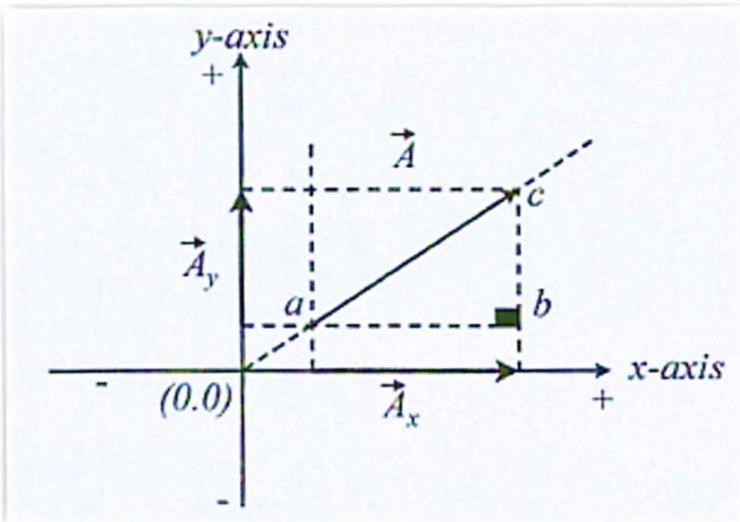
ولبيان ذلك انظر الشكل (٢-١٠) و تأمل موقع المتجه ($\vec{A}$) وكذلك المركبتين السينية ($A_X$)

والصادية ($A_Y$)والزاوية ($\vartheta$) التى تحدد اتجاه الكمية المتجهة($\vec{A}$)

و الان تأمل الشكل (٢-٦) و لاحظ الاتي

١- ($A_x$)و($A_y$) هما عبارة عن مركبتين عاموديتين للمتجه ($\vec{A}$)

٢- من الممكن عملياً نقل المتجه أو مركباته السينية والصادية نحافظ على مقداره واتجاهه كما يمكننا التعامل مع الحالة الجديدة كما كنا مادمنا نتعامل مع الحالة قبل النقل ثم لاحظ المثلث القائم (ABc) ضلعاه القائمان هما عبارة عن المتجهين(A)و(A) والمتجه (A)يعمل على الخطط المار من نقطة الأصل (٠.٠) حيث يعتبر الخط محور عمله .




الشكل (٢-٦) يمثل الكمية المتجهة ($\vec{A}$) على محور المتعامدة (y،x) ويوضح اتجاهها ومركباتها

٣- بعد ذلك يمكننا استخدام خصائص المثلث القائم لكي نعبر عن كل من المركبين ($A_x$)و($A_y$) من خلال النسب المثلثية للزاوية (θ) التي تحدد اتجاه المتجه ($\vec{A}$)

$$\cos(\theta)\,\frac{Ax}{A} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

2-10

| $A_X = A\cos(\theta)$ |
| --- |
| (2-10) |

مرة أخرى

$$\sin(\theta)\,\frac{Ay}{A}=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$Ay = Asin\ (\theta) \qquad 2\text{-}11$$

وبما أن المحورين متعامدان سنناقش الآن بعض الحالات الخاصة للزاوية $(\theta)$

١ الزاوية هذا يؤدي إلى$(\theta = 90^{\circ})$ هذا يؤدي الى :

$$-A_x = Acos\ (90) = 0$$

أي أن المركبة السينية للمتجه تساوي الصفر، بينما

$$A_y = A\ sin(90) = A$$

أى أن المركبة الصادية للمتجه تساوي المتجه نفسه وهي أعلى قيمة للمركبة الصادية $(A_y)$

٢- عندما تكون الزاوية $\theta$=٠˚ وهذا يؤدي إلى

$$A_X = Acos\ (0) = A$$

أي أن المركبة السينية تساوي المتجه نفسه وهي أعلى قيمة للمركبة السينية بينما $A_x$

$$A_y = Asin\ (0) = 0$$

أى أن المركبة الصادية تساوي الصفر

ولكن على وجه العموم قد تكون المركبتان السينية والصادية أو إحداهما موجبة أوسالبة وذلك حسب اتجاه الكمية المتجهة الأساسية الذى لابد أن نحدده بدءا من الزاوية $(\theta = 0)$عند

المحور السيني الموجب ثم نكمل الحركة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة ، وذلك بقدر زاوية المتجه

٣- بقسمة المعادلتين (٢-١٠)و(٢-١١) على بعضهما نحصل على:

$$\frac{A_y}{A_x}=\frac{Asin\ (\theta)}{Acos\ (\theta)}$$

$$\tan(\theta)\ \frac{A_y}{A_x} \qquad (٢\text{-}١٢)$$

وللمعادلة أهمية بالغة حيث تستخدم لتحديد اتجاه المحصلة كما يمكننا أن نستبدل فيها كلا$(A_y)$و$(Ax)$ من بمجموع المركبات الصادية والسينية العدد من الكميات المتجهة $(\vec{A}_1.\ \vec{A}_2.\ \vec{A}_3\ldots\ldots)$وذلك كما يلي

نستبدل $A_y$ بالمجموع( $\sum A_y$ )حيث :

$$\sum A_y = A_{y1} + A_{y2} + A_{y3} \ \dots\dots\dots..$$

كذلك نستبدل ($A_X$) بالمجموع ($\sum A_X$) حيث

$$\sum A_X = A_{X1}A_{X2}A_{X3}......$$

وذلك عندما نقوم بتحليل عدد من الكميات المتجهة ($\vec{A}_3, \vec{A}_2, \vec{A}_1$)

و اخيرا ، فأن اتجاه المحصلة يمكن تحديده بمعرفة مقدار الزاوية (θ) و ذلك باستخدام المعادلة (٢-١٢)على النحو التالي :

$$\tan(\theta) = \frac{\sum A_y}{\sum A_x}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\sum a_y}{\sum a_x}\right) \qquad (٢-١٣)$$

ومن خلال تحديد القيمة القياسية للطرف الأيمن للمعادلتين(٢−١٢) و (٢−١٢) بحسب الحالة المطلوبة يمكننا تحديد الاتجاه ،سواء كان ذلك لمتجه واحد أو لمحصلة مجموعة من المتجهات ، فعلى سبيل التطبيق عندما يكون الطرف الايمن للمعادلة

$$(\sum A_Y / \sum A_X) \qquad ٢-١٣$$

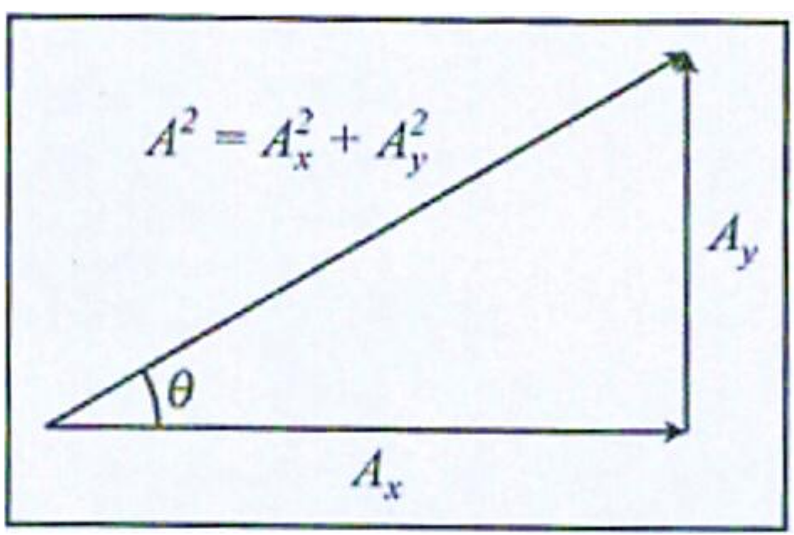
مساويا إلى الواحد ، فإننا بعد التعويض نحصل على ما يلي

$$\tan(\theta)=1$$

$$\theta=\tan^{-1}(1)$$

$$=45$$

وبالرجوع مرة أخرى إلى الشكل (2-7)نجد أن أضلاع المثلث القائم (abc) تمثل الاتي



(Ay) و(Ax) المركبتان السينية والصادية وهما عبارة عن الضلعين القائمين في المثلث (abc) بينما المتجه (a) هو عبارة عن وتر المثلث وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن

$$A^2 = A^2_x + A^2_y$$

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} \qquad ٢-١٤$$

وبشكل عام ، ومثلما استخدمنا العلاقة (٢-١٢) وتوصلنا إلى العلاقة **(٢-١٣)** فإننا نستخدم العلاقة **(٢-١٤)** لنتوصل إلى العلاقة (٢-١٥)

كما يمكننا الاستفادة من هذه المعادلة المعرفة مقدار المتجه (A)في حال معرفة كل من المركبتين ($A_1$) و($A_٢$) لمتجه واحد أو المركبات $\sum A_Y$ )و($\sum A_X$) لمجموعة من المتجهات

**مثال ٤-٢**

غادرت أرض المطار طائرة صغيرة وبعد فترة من الزمن أعطت إشارة إلى برج المراقبة أنها على بعد وباتجاه يصنع زاوية ٠(٢٢)من الشرق إلى الشمال ، فكم تبعد الطائرة عن برج مراقبة المطار في الاتجاهين شرقا وشمالا انظر الشكل (٢-٨) ٢١٥ KM

**الحل solution**

المتجه(A) يمثل بعد الطائرة عن نقطة الأصل(٠.٠) كما أن اتجاه الطائرة يصنع زاوية مقدارها(٩٠˚- ٢٢˚) مع المحور السيني الموجب أي ان

$$A = 215 \text{ km}$$

بعد الطائرة شرقاً هو عبارة عن مسقط المتجه($\vec{A}$) على المحور السيني

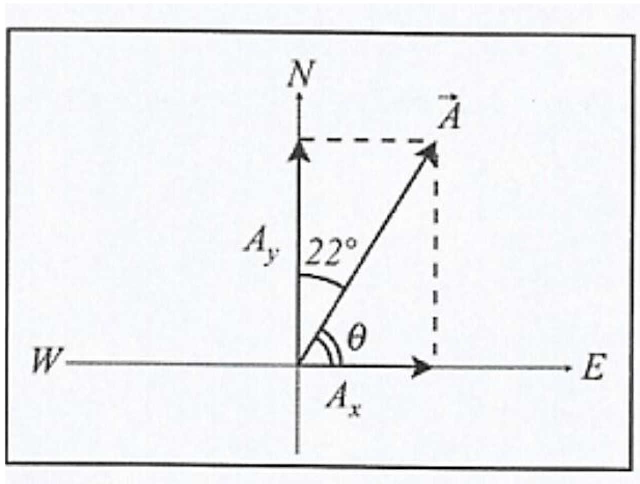
$$A_x = A \cos(\theta)$$

$$= 215 \cos(68) = 80.5 \text{ km}$$

بعد الطائرة غربا هو عبارة مسقط المتجه(A) على المحور الصادي

$$A_y = A \text{ sine } (\theta)$$

=215 sin (68) = 199.34 km




الشكل (2-8) التطبيق (2-4)

وسوف نتأكد من صحة الحل بطريقة معاكسة مستفيدين من العلاقات (٢-١٣) و (٢-١٤)

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_Y)^2}$$
$$= \sqrt{(80.5)^2 + (199.34)^2}$$
$$= 215 \text{ KM}$$
$$\tan(\theta) = \frac{A_Y}{A_X}$$
$$= \frac{199.34}{80.5} = 2.476$$
$$\theta = \tan^{-1}(2.476) = 68^0$$

## ٢-٦ متجهات الوحدة unit vectors

إن تمثيل الكمية المتجهة ، سواء المستوي أو في الفراغ ، يمكن أن يتم باستخدام نظام المحاور الثلاثية المتعامدة (x.y.z) مع متجهات الوحدة الخاصة بها أي أننا نمثل المتجه بعديا والمقصود بالتمثيل تعيين المتجه مقدارا واتجاهها وهذا ما يدعو إلى اعتماد متجهات الوحدة على المحاور الثلاثية المتعامدة للتعبير عن الكمية المتجهة إنّ مقدار كل واحدر منها يساوي الواحد تماماً ، وهذا هو سبب تسميتها بمتجهات الوحدة بينما تكون الزاوية قائمة بين كل منها وبهدف تمييزها من محور الآخر فقد تم الاتفاق على اعتماد الأحرف الإنكليزية الثلاثة

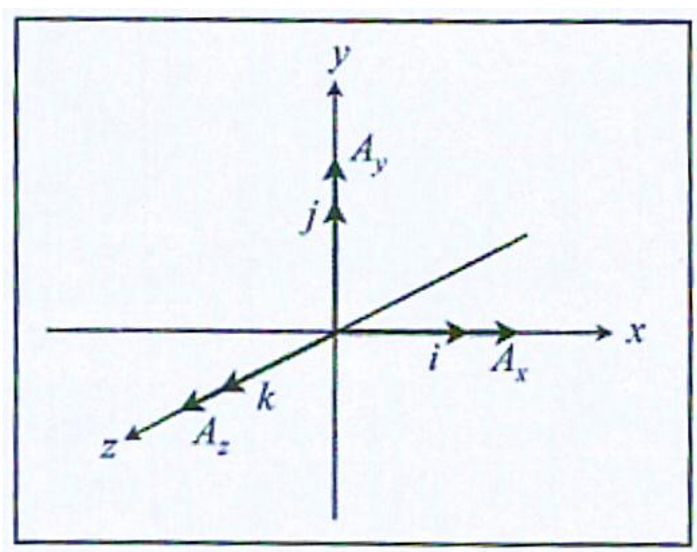
المتعاقبة (I,j,k) على المحاور المتعامدة (x,y,z)على التتالي للتعبير عن هذه المتجهات

إن اعتماد متجهات الوحدة $(\hat{j}, \hat{j}, \hat{k})$ مفيد للغاية ولاسيما للتعبير عن و هما المرك بتان العدديتان للمتجه مركبات الكميات المتجهة المتعددة مثلما هو مقيد للتعبير عن الكمية المتجهة الواحدة ، حيث (i) و (j) هما متجها الوحدة على المحورين (x,y) بينما $(A_x)$و$(A_y)$هما المركبتان العدديتان للمتجه (A)

إن نظام المحاور الثلاثية المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة ، يمكن تمثيله على النحو المبين في الشكل (٩-٢)

وباستخدام هذه الطريقة يمكن التعبير عن أي كمية متجهة سواء على المحاور الديكارتية أو على المحاور الثلاثية المتعامدة على الشكل الاتي

$$\hat{A}= \hat{A}_X \hat{I}+ \hat{A}_Y \hat{J}+ \hat{A}_Z \hat{K} \qquad (٢-١٦)$$




الشكل يبين (2-9)المحاور المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة ويلاحظ أن متجهات الوحدة $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ متعامدة مع بعضها البعض أيضاً

فعلى سبيل التطبيق لو أردنا أن نعبر عن الشكل (2-7)السابق الذكر باستخدام متجهات الوحدة فإن المركبتين المتجهتين $(\vec{A}_x)$ و $(\vec{A}_y)$ يمكن إعادة كتابتهما على النحو الآتي

$$A=A_x\hat{I} + A_y\hat{J} \qquad (2\text{-}17)$$

اما على المحاور الثلاثية المتعامدة فتأمل المثال التالي (٢-٥)

مثال (٢-٥)

تأمل المتجه $(\vec{A})$ بمركباته الثلاثة في العلاقة الرياضية الاتية :

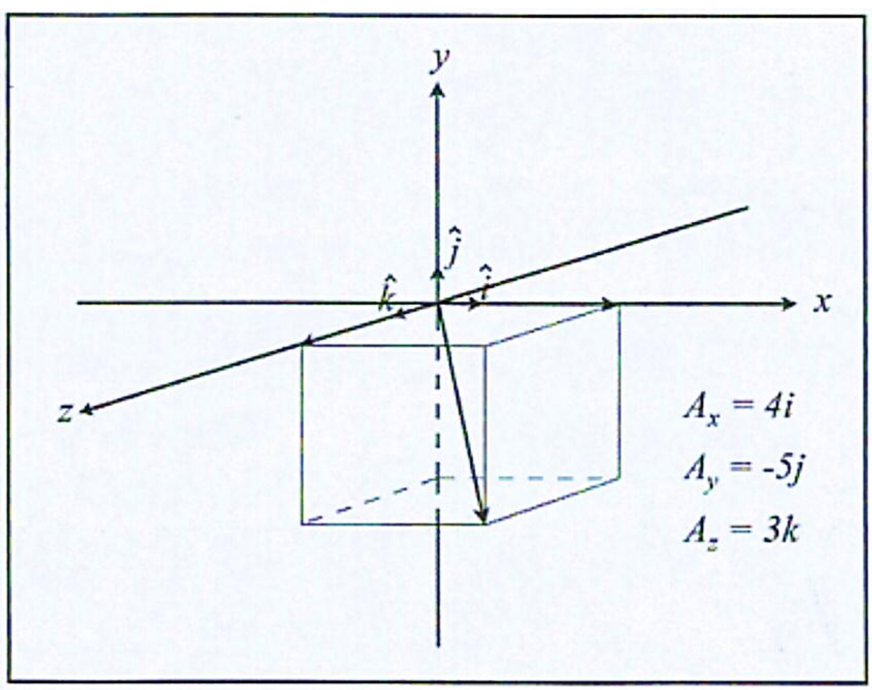
$$A=4\hat{I}-5\hat{J}+3\hat{K}$$

نلاحظ ان المركبات الاتجاهية الثلاثة هي $+4\hat{I}$ $-5\hat{J}$, $3\hat{K}$

كما نلاحظ أن مركباتها القياسية :

$+ 4,-5,+3$

ومن الممكن عمليا تمثيل ذلك على المحاور المتعامدة (x,y,z)انظر الشكل (٢-١٠)




الشكل يبين(٢-١٠) كيف يمكن تمثيل المتجه(A) بية الفراغ باستخدام المحاور الثلاثية المتعامدة مع متجهات الوحدة

(٢-٧) جمع الكميات المتجهة بطريقة جمع مركباتها Adding vectors by adding their

يمكننا ان نستعرض هذه المسألة الهامة ، وذلك باستخدام ثلاث متجهات ($\vec{A}$) و ( $\vec{B}$) و ($\vec{C}$) معبرين عنها بالعلاقات الرياضية الآتية

$$\vec{A}=A_X\hat{I}+A_Y\hat{J}+A_Z\hat{K} \qquad (2\text{-}18)$$

$$\vec{B}=B_X\hat{I}+B_Y\hat{J}+B_Z\hat{K} \qquad (2\text{-}19)$$

$$\vec{C}=C_X\hat{I}+C_Y\hat{J}+C_Z\hat{K} \qquad (2\text{-}20)$$

إن المعادلات الرياضية التي نستخدمها لإيجاد محصلة المتجهات الثلاثة هي :

$$R_X = A_x+B_x+C_x \qquad (2\text{-}21)$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y \qquad (2\text{-}22)$$

$$R_z = A_z + B_z + C_z \qquad (2\text{-}23)$$

$$R=R_XI+R_YJ+R_Zk \qquad (2\text{-}24)$$

ومعنى ذلك أن محصلة المركبات (x,y,z) كل على انفراد وهي:($R_X,R_Y,R_Z$)وتمثل مركبات متجه المحصلة ( R ) القياسية بدلالة متجهات الوحدة (I,J,K)

**مثال (٢-٦)**

أوجد متجه المحصلة ($\vec{R}$) الذي يمثل حاصل جمع المتجهات الثلاثة الآتية:

$$\vec{A}=4i+6J+2K$$

$$\vec{B}=3I+3J+2K$$

$$\vec{C}=I-4J+2K$$

الحل: Solution

$$R_X=4+3+1=8$$

$$R_Y= 6+3-4=5$$

$$R_Z= 2-2+2=2$$

و هكذا نجد ان :

$$R=8I+5J+2K$$

## ١-٨-٢ الضرب القياسي Dot product

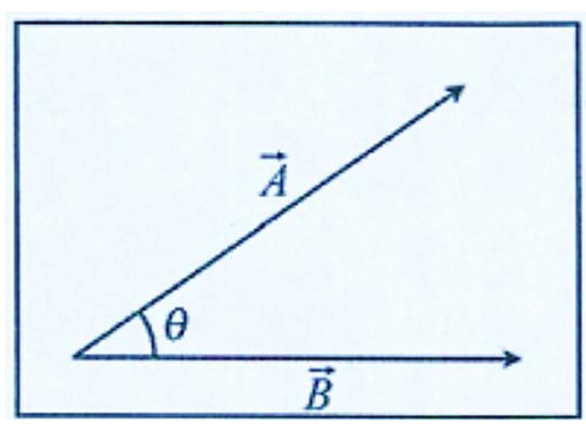
بداية ، لا بد من التأكيد على أن هناك نوعين اثنين من أنواع ضرب الكميات المتجهة وهما : الضرب القياسي ، والضرب الاتجاهي . وسنفرد فقرة خاصة لكل منهما

١-٨-٢ الضرب القياسي (.) DOT PRODUCT

لقد سميت العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضرب عبارة عن كمية عددي scalar ومعنى ذلك أن حاصل ضرب كميتين اتجاهيتين ضرباً قياسياً ( .) ينتج عنهما كمية عددية ، ويعبر عن الضرب القياسي بالمعادلة الآتية:

$$A.B|A||B|\cos\theta \qquad (2\text{-}25)$$

حيث إن $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ يمثلان الكميتين الاتجاهيتين ، و $(\theta)$ هي الزاوية المحصورة بينهما ، وتقرأ انظر وتقرأ (A dot B) الشكل (2-11)



الشكل (٢-١١) الضرب القياسي للمتجهين $(\overline{A})$ و $(\overline{B})$

ملاحظة : يخة حالة الجمع ، إذا كانت الزاوية أكثر من ( $90°$ ) بين المتجهين فإننا نأخذ الزاوية الخارجية بينهما وقياس الزاوية يبدأ من المحور السيني الموجب

كما يمكننا التأكد مرة أخرى ، وذلك لان جيب تمام الزاوية الداخلية يكون المقدار سالبا

مثلما يعتبر أيضا من التطبيقات المباشرة على الضرب القياسي حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة ولا بد في هذا المقام من التأكد على ما يلي :

1- $\hat{\imath}.\hat{\imath} = |1||1|\cos(\theta) = |1||1|\ \cos(0) = 1$

٢- $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = = |1||1|COS(90°) = 0$

3 - $\hat{\imath}.\hat{k} = |1||1|COS(90°) = 0$

معنى ذلك ان القيمة القياسية لمتجهات الوحدة هي :

$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |K| = 1$$

كما ان الزاوية بين أي متجهين منها هي الزاوية قائمة والزاوية بين المتجه و نفسه تساوي الصفر

٤- كما نؤكد على ضرورة ملاحظة الحالة العامة للتعبير عن الضرب الاتجاهي التي استخدمناها في حل التطبيق و هي

$$\vec{A}.\vec{B} = \ (A_y\hat{\imath} + A_X\hat{\jmath} = A_Z K)(B_X\hat{\imath} + B_Y\hat{\jmath} + B_2\hat{k})$$

حيث إن :

$$\vec{A}=A_X\hat{\imath} + A_Y\hat{\jmath}+ A_Z\hat{k}$$

$$\vec{B}=B_X\hat{\imath}+B_Y\hat{\jmath}+B_Z\hat{k}$$

و هذا ما استخدمناه لحساب الطرف الأيمن في التطبيق (٧-٢) مع مراعاة الخاصة التوزيعية في الضرب Distribution law

**مثال (٧-٢)**

اوجد مقدار الزاوية $(\theta)$ بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفين على النحو الاتي :

$$\vec{A}=3\hat{\imath} -4\hat{\jmath}$$

$$\vec{B}=2\hat{\imath}+3\hat{k}$$

**solution الحل**

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|COS(\theta)$$

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$B = \sqrt{B_X^2 + B_Z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = 3.6$$

من ناحية أخرى

$\vec{A}.\vec{B}$ =($A_X\hat{\imath}$+$A_Y\hat{\jmath}$)($B_X\hat{\imath}$+$B_Z\hat{k}$)

=(2$\hat{\imath}$-4$\hat{\jmath}$)(-2$\hat{\imath}$+3$\hat{k}$)

=(3$\hat{\imath}$).(-2$\hat{\imath}$)+(3$\hat{\imath}$).(3$\hat{k}$)+(-4$\hat{\jmath}$).(-2$\hat{\imath}$)+(-4$\hat{\jmath}$).(3$\hat{k}$)

=(-6)(1)+(9)(0)+8(0)-(12)(0)=-6

وهكذا بالتعويض نجد ان :

$$\cos(\theta) = \frac{-6}{18} = -0.333$$

$$\theta \cos^{-1}(-0.333) = 110$$

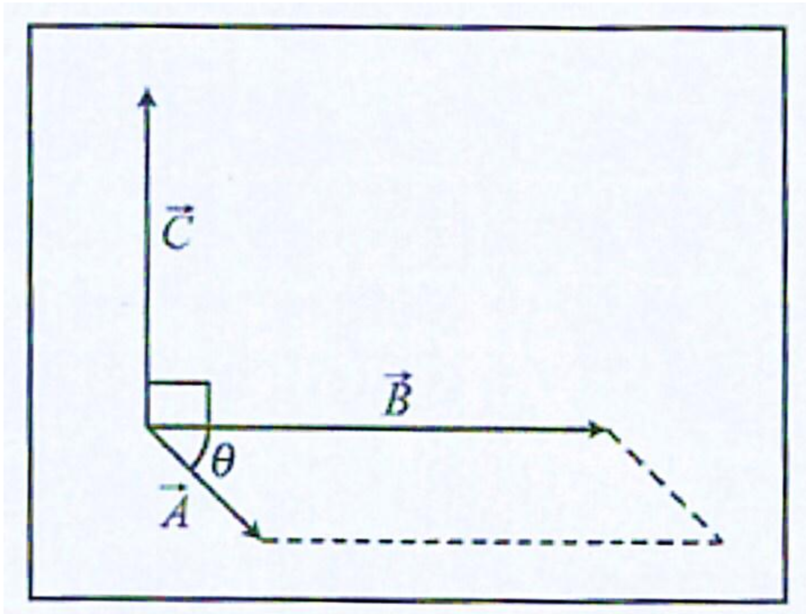
أي ان الزاوية بين المتجهين (A) و (B) هي ($\theta = 110^0$)

## ٢-٨-٢ الضرب الاتجاهي Cross product (X)

لقد سميت العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضارب عبارة عن كمية اتجاهيةvector ، ومعنى ذلك ، أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو متجه ثالث ، اتجاهه يكون عموديا على المستوى الذي يحوي المتجهين المضروبين ببعضهما ، أما مقدار المتجه الجديد فيعبر عنه بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$\vec{A}x\vec{B} = \vec{C} = |A||B|\sin\theta \qquad (٢-٢٦)$$

حيث (C) تمثل مقدار الكمية المتجهة الجديدة ، ($\theta$) تمثل الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين ($\vec{A}$) و($\vec{B}$) انظر الشكل (٢-١٢) و تقرأ ($\vec{A}$ cross $\vec{B}$)




الشكل (٢-١٢)  ويمثل الضرب الاتجاهي لكميتين اتجاهيتين ($\overrightarrow{A}$) و ($\overrightarrow{B}$)

أما اتجاه المتجه ($\overrightarrow{C}$) فيمكن معرفته باستخدام قاعدة اليد اليمنى ، انظر الشيكل ( ١٢ - ٢ ) ، مع ضرورة أن يبقى منفردا لتحديد اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي ، وعملية الترتيب هنا هامة للغاية ، بمعنى أن المتجه الأول ($\overrightarrow{A}$) تمثله أصابع اليد اليمنى والثاني ($\overrightarrow{B}$) تمثله راحة اليد اليمنى ، ويمثل الإبهام اتجاه المتجه الجديد ( $\overrightarrow{C}$ )، وهذا ما يؤكد ضرورة الانتباه إلى الآتي:

غير تبادلية

$\vec{B}$x$\overrightarrow{A}$ = -$\overrightarrow{A}$x $\vec{B}$ (2-27)

كما أن التعبير الرياضي عن عملية الضرب الاتجاهي باستخدام متجاه الوحدة يكون على الشكل الآتي:

$$AxB = (A_X I + A_Y J + A_Z J)x(B_X I + B_Y J + B_2 K) \qquad (2\text{-}28)$$

و يمكننا إيجاد ($\overrightarrow{A}$x$\vec{B}$) باعتماد خاصية التوزيع distribution Law ومن الضروري جدا ان نؤكد هنا على ان الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة في النظام

الثلاثي المتعامد (x,y,z)هو أوضح وأقرب تطبيق على التطبيق المباشر لهذا النوع من الضرب ، فعلى سبيل التطبيق : لو أردنا أن نجد حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين ( I ) و ( J ) فهذا يقتضي:

$$\hat{I}x\hat{J} = |I||J|\sin(\theta)$$

ولكن ؛:

$$|i| = |j| = 1$$

كما أن الزاوية بينهما تساوي $(\theta = 90^0)$ ، إذا المتجه الثالث $(\hat{k})$ هو المتجه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهيناكتب المعادلة هنا. ( I ) و ( J ) وهكذا نجد أن:

$$\hat{I}x\hat{j} = |1||1|\sin(90) = 1(\hat{k}) = \hat{k}$$

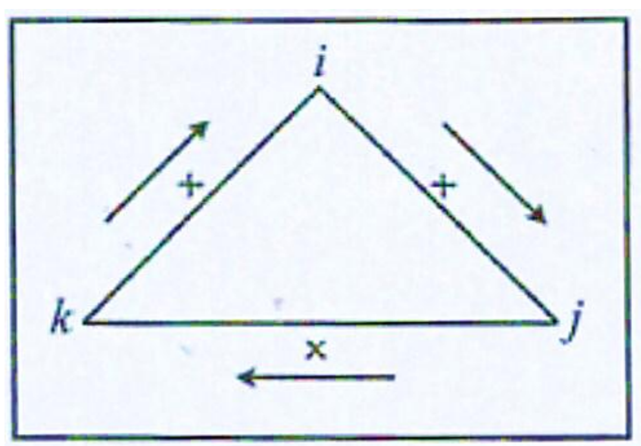
من الواضح أن مقدار المتجه الجديد يساوي الواحد ، أما اتجاهه فهو اتجاه ( $\hat{k}$ ) أي منطبق على المحور ( Z ) . ويمكننا أ ان نستنتج بيسر وسهولة كلا مما يلي:

$\hat{I}$x$\hat{j}$=$\hat{k}$ (2-29)

$\hat{j}$x$\hat{k}$=$\hat{I}$ (2-30)

$\hat{k}$x$\hat{I}$=$\hat{j}$ (2-31)

ومن الممكن تبسيط ذلك كله باستخدام المثلث البسيط المبين في الشكل




الشكل (٢-١٣) و يبين الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة (I)و (J) و(K)

**مثال (٨-٢)**

لديك المتجهان المعرفان على النحو التالي

$\vec{A}$=I-4J

$\vec{B}$=-2I +3K

اوجد المتجه الجديد $\vec{C}$=$\vec{A}$x$\vec{B}$

SOLUTION الحل

$$\vec{C}=\vec{A}x\vec{B}=(3\hat{I}-4\hat{J})x(-2\hat{I}+3\widehat{K})$$

$$=(3\hat{I}x2\hat{I})+(3\hat{I}x3\widehat{K})+(4\hat{J}x2\hat{I})-(4\hat{J}x3\widehat{K})$$

$$=0+9(-\hat{J})+8(-\widehat{K})-12(\hat{I})$$

$$\vec{C}=-12\hat{I}-9\hat{J}-8\widehat{K}$$

الملاحظات الهامة في هذا التطبيق و التي نلفت انتباه أبنائنا الطلبة إليها هي الاتي

$$\hat{I}x\hat{I}=\hat{J}x\hat{J}=\widehat{K}x\widehat{K}=0 \qquad (2\text{-}32)$$

ذلك ان $\hat{I}x\hat{I} = |1||1|\sin(0) = 0$

و كذلك بالنسبة لكل من $(\hat{J}x\hat{J})$ و $(\widehat{K}x\widehat{K})$

## الخلاصة

## *Summary*

>الكمية القياسية : هي الكمية التي يمكن تعيينها تعيينا كاملا بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها ، ويمكننا أن نستخدم مع مجموعة من الكميات القياسية المتجانسة ؛ القوانين الجبرية الاعتيادية

>. الكمية المتجهة : هي الكمية التي يمكن تعيينها تعيينا كاملا بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها واتجاهها ونقطة تأثيرها ومحور عملها . ويتحتم علينا أن نستخدم مع مجموعه من الكميات المتجهة المتجانسة القوانين الخاصة بها .

>.محصلة عدد من الكميات المتجهة : يمكننا إيجاد محصلة عدد من الكميات المتجهة المتجانسة بمعرفة مركباتها السينية ومركباتها الصادية على النحو الاتي :

$$\sum A_X = A_{1X} + A_{2X} + \cdots$$

$$\sum A_Y = A_{1Y} + A_{2Y} + \ldots$$

$$\tan\theta = \frac{\sum A_Y}{\sum A_X}$$

متجهات الوحدة: يمكننا أن العبر عن عدد من الكميات المتجهة المتجانسة بي المستوي أوبية الفراغ باستخدام متجهات الوحدة ( ) على النحو الآتي:

$$\vec{A} = A_X\hat{\text{I}} + A_Y\hat{\text{J}} + A_Z\hat{\text{K}}$$

$$\vec{B} = B_X\hat{ه} + B_Y\hat{\text{J}} + B_Z\hat{\text{K}}$$

$$\vec{C} = C_X\hat{ه} + C_Y\hat{J} + C_Z\hat{\text{K}}$$

حيث تساوي القيمة المطلقة لكل منها الواحد، كما أنّ الزاوية بين كل منها والآخر تساوي تسعين درجة ، كما أن محصلة هذه الكميات المتجهة تكون على النحو الاتي :

$$\vec{R} = R_X I + R_Y J + R_2 K$$

*قانون الجيب مام: ويستخدم لإيجاد حاصل جمع متجهين(B,A) ويعبر عنه رياضياً على الشكل الآتي $\vec{C} = A^2 + B^2 + 2\text{AB}\cos(\theta)$

حيث (A)هي المقدار العددي للمتجه الأول (B) المقدار العددي للمتجه الثاني(θ) الزاوية المحصورة بين المتجهين

الضرب القياسي: إن ناتج الضرب القياسي المتجهين (B,A) يُعبر عنه رياضيا على الشكل الآتي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|COS(\theta)$$

حيث | A | هى القيمة المطلقة للمتجه الأول I B Iهى القيمة القياسية المطلقة للمتجه الثاني θ I Iهي الزاوية المحصورة بينهما وناتج الضرب هو كمية عددية الضرب الاتجاهي : إن ناتج الضرب الاتجاهي لمتجهين (B,A)يعبر عنه رياضيا على الشكل الآتي

$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = |A||B|\sin(\theta)$$

وناتج الضرب هو عبارة عن كمية اتجاهية ثالثة($\vec{C}$)عمودية على المستوي الذي يحوي المتجهين(B,A)يمكن تحديد مقداره باستخدام هذه العلاقة الرياضية كما يمكن تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.