« التكامل غير المحدود »

تعريف :- الدالة $F(x)$ تكون معكوس تفاضل للدالة $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$

لجميع قيم x في منطلق الدالة $f(x)$ مجموعة كل المعكوس لمشتقة الدالة $f(x)$ تكون هي التكامل غير المحدود (indefinite integral) للدالة f بالنسبة لـ x ويرمز له بالرمز

$$\int f(x)\,dx$$

الرمز $\int$ هو رمز التكامل والدالة $f(x)$ هي الدالة المتكاملة و x هو متغير التكامل .

ملاحظة / يمكن إيجاد معكوس التفاضل $F(x)$ للدالة $f(x)$ وباقي الدوال التي تكون معكوساً لتفاضل الدالة $f(x)$ بأضافة ثوابت التكامل c وبصورة أخرى فإن :-

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

أي أن معكوس تفاضل الدالة $2x$ فيمكن أن يكون :-

$$x^2 \text{ or } x^2+1 \text{ or } x^2+\sqrt{2} \text{ or } x^2+\pi \text{ or } x^2-\sqrt{2} \text{ or } \ldots$$

مبرهنة :- إذا كان $F(x)$ أي معكوس تفاضل للدالة $f(x)$ في الفترة I فإنه لأي ثابت c تكون الدالة $F(x)+c$ هي ايضاً معكوس الدالة $f(x)$ في تلك الفترة I بالاضافة الى أن كل معكوس تفاضل للدالة $f(x)$ في الفترة I يمكن التعبير عنه بالصورة $F(x)+c$ حيث أن c ثابت أختياري . بدون برهان .

ملاحظة :- ① تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x هو الدالة $F(x)$ زائداً ثابت التكامل.

② رمز التفاضل هو dx فيكون $\frac{d}{dx}[\,] \text{ and } \int [\,]\,dx$

CamScanner ile tarandı

أمثلة:-

① $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ $\quad\quad$ $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$

② $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$

③ $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ $\quad\quad$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

④ $\frac{d}{du}[u^{\frac{3}{2}}] = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = u^{\frac{3}{2}} + c$

ملحوظة:- يمكن كتابة كل ما يأتي بالشكل الآتي:-

① $\int 1\,dx = \int dx$

② $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2}$

قواعد التكامل:-

① $\int dx = x + c$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}[x] = 1$

② $\int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \; ; r \neq -1$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \; ; r \neq -1$

③ $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

④ $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + c$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

⑤ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

⑥ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$ $\quad\quad$ $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

CamScanner ile tarandı

⑦ $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$ $\quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

⑧ $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$ $\quad \frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

أمثلة /

① $\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + c$

② $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

③ $\int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

④ $\int \cos \frac{x}{2} \, dx = \int \cos(\frac{1}{2}x) \, dx = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} + c = 2\sin \frac{x}{2} + c$

مبرهنة :- لنفرض أن $F(x)$ ، $G(x)$ مكاملا تفاضل للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب ، k ثابت فإن :-

① الثابت يمكن أخراجه الى خارج رمز التكامل وذلك يعني :-

$$\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

② مكاملا مشتقة حاصل جمع أو طرح دالتين يساوي حاصل جمع أو طرح مكاملا مشتقتيهما أي أن :-

$$\int [f(x) \mp g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \mp \int g(x) \, dx$$

③
$$\int -f(x) \, dx = -\int f(x) \, dx$$

CamScanner ile tarandı

مثال:-

$$\int 5\sec x\tan x\,dx$$

$$= 5\int \sec x\tan x\,dx = 5\sec x + c$$

مثال:-

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c$$

مثال:- احسب كلاً من التكاملات الآتية:-

① $\int \sin^2 x\,dx$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2}\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

② $\int \cos^2 x\,dx$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2}\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

CamScanner ile tarandı

- تمارين -

احسب التكاملات الآتية :-

① $\int (x+1)\,dx$

② $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\,dt$

③ $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\,dx$

④ $\int (x^{-1})^2\,dx$

⑤ $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

⑥ $\int (8y - \frac{2}{y^{1/4}})\,dy$

⑦ $\int (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}})\,dx$

⑧ $\int (\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{\frac{5}{4}}})\,dy$

⑨ $\int 2x(1 - x^{-1})\,dx$

⑩ $\int (\frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2})\,dt$

⑪ $\int -2\cos t\,dt$

⑫ $\int 7\sin\frac{\theta}{3}\,d\theta$

⑬ $\int (-3\csc^2 x)\,dx$

⑭ $\int (1 + \tan^2\theta)\,d\theta$

⑮ $\int \cot^2 x\,dx$

⑯ $\int \cos\theta(\tan\theta - \sec\theta)\,d\theta$

⑰ $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\,d\theta$

⑱ $\int (7x-2)^3\,dx$

⑲ $\int (3x+5)^{-2}\,dx$

⑳ $\int \csc^2(\frac{x-1}{3})\,dx$

㉑ $\int (t - \frac{2}{t})(t + \frac{2}{t})\,dt$

㉒ $\int \frac{r\,dr}{(r^2+5)^2}$

㉓ $\int 3\theta\sqrt{2-\theta^2}\,d\theta$

㉔ $\int x^3(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx$

㉕ $\int \sin^2\frac{x}{4}\,dx$

㉖ $\int \frac{(1+\sqrt{u})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u}}\,du$

㉗ $\int 2x\sin(1-x^2)\,dx$

㉘ $\int x^{-\frac{1}{3}}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx$

CamScanner ile tarandı

التكامل غير المحدود بطريقة التعويضات :

مثال :

$$\int \cos(7\theta+5)\, d\theta$$

let $u = 7\theta + 5$

$du = 7\, d\theta$

$\frac{du}{7} = d\theta$

$$= \int \cos u \cdot \frac{du}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\, du = \frac{1}{7}\sin u + c = \frac{1}{7}\sin(7\theta+5)$$

مثال :

$$\int x^2 \sin x^3\, dx$$

let $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2}\, du$

$\Rightarrow \frac{du}{3} = x^2\, dx$

$$= \int \sin u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\, du$$

$$= \frac{-1}{3}\cos u + c$$

$$= \frac{-1}{3}\cos x^3 + c$$

مثال :

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\, dx = \int \sec^2 2x\, dx$$

let $u = 2x$

$du = 2\, dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$$= \int \sec^2 u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + c = \frac{1}{2}\tan 2x + c$$

مثال :

$$\int \frac{2z\, dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

let $u = z^2 + 1$

$du = 2z\, dz$

$$= \int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \int u^{-\frac{1}{3}}\, du = \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(z^2+1)^2}$$

CamScanner ile tarandı

«تمارين»

احسب التكاملات الآتية بأستخدام التعويض :-

① $\int x \sin(2x^2)\, dx$ use $u = 2x^2$

② $\int (1-\cos\frac{t}{2})^2 \sin\frac{t}{2}\, dt$, $u = 1-\cos\frac{t}{2}$

③ $\int 28(7x-2)^{-5}\, dx$, $u = 7x-2$

④ $\int x^3 (x^4-1)^2\, dx$, $u = x^4-1$

⑤ $\int \frac{9r^2\, dr}{\sqrt{1-r^3}}$, $u = 1-r^3$

⑥ $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^4+2y)\, dy$, $u = y^4+4y^2+1$

⑦ $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{\frac{3}{2}}-1)\, dx$, $u = x^{\frac{3}{2}}-1$

⑧ $\int \frac{1}{x^2}\cos^2(\frac{1}{x})\, dx$, $u = \frac{1}{x}$

⑨ $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\, d\theta$ ⓐ using $u = \cot 2\theta$
ⓑ using $u = \csc 2\theta$

⑩ $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

ⓐ using $u = 5x+8$, ⓑ using $u = \sqrt{5x+8}$

⑪ $\int \sqrt{3-2s}\, ds$

⑫ $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\, ds$

CamScanner ile tarandı

(13) $\int \frac{3\,dx}{(2-x)^2}$

(14) $\int \theta \sqrt[4]{1-\theta^2}\, d\theta$

(15) $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\, dy$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\, dx$

(17) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx$

(18) $\int \cos(3z+4)\, dz$

(19) $\int \sec^2(3x+2)\, dx$

(20) $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\, dx$

(21) $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx$

(22) $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

(23) $\int \sec\left(r+\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(r+\frac{\pi}{2}\right) dr$

(24) $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\, dt$

(25) $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\, dt$

(26) $\int \sqrt{\cot y}\,\csc^2 y\, dy$

(27) $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right) dt$

(28) $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\, dt$

(29) $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$

(30) $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$

CamScanner ile tarandı

The Definite Integral التكامل المحدد :-

خواص التكامل المحدد :-

تعريف :- الرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ يقرأ تكامل الدالة f من a الى b بالنسبة الى x حيث يسمى

b القيد الاعلى للتكامل

a = الادنى للتكامل

f(x) الدالة المتكاملة.

تعريف :- ① إذا كان a في منطلق الدالة f فأننا نعرف :-

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

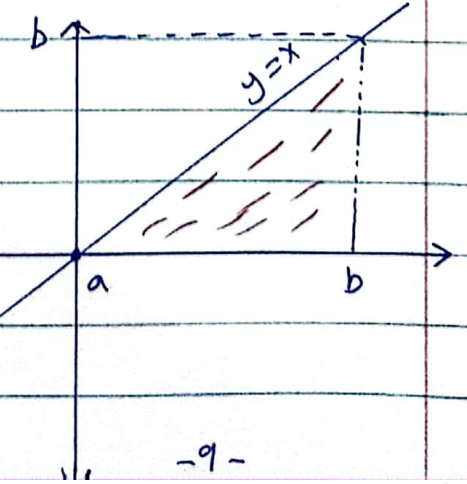
② إذا كانت f قابلة للتكامل في الفترة [a,b] فأننا نعرف :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مبرهنة :- إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة [a,b] فأنها تكون قابلة للتكامل في [a,b] . بدون برهان.

مثال :- احسب المساحة تحت المنحني $f(x)=x$ في الفترة [a,b]

هندسياً



$$A = \frac{1}{2}(b-a)*(b+a)$$

$$A = \frac{1}{2}[b^2-a^2] = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

CamScanner ile tarandı

مثال/ احسب كلاً من المساحات الآتية :-

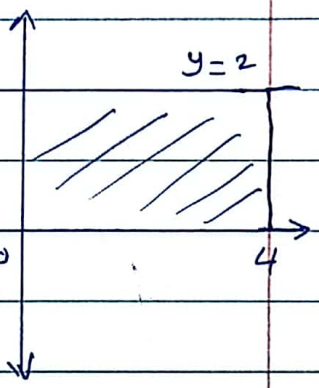
① $\int_0^3 (9-x^2)\,dx$

$$A=\int_0^3 (9-x^2)\,dx = \int_0^3 9\,dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right] = 9*3 - \frac{27}{3} - 0$$

$$= 27 - 9 = \underline{18}$$

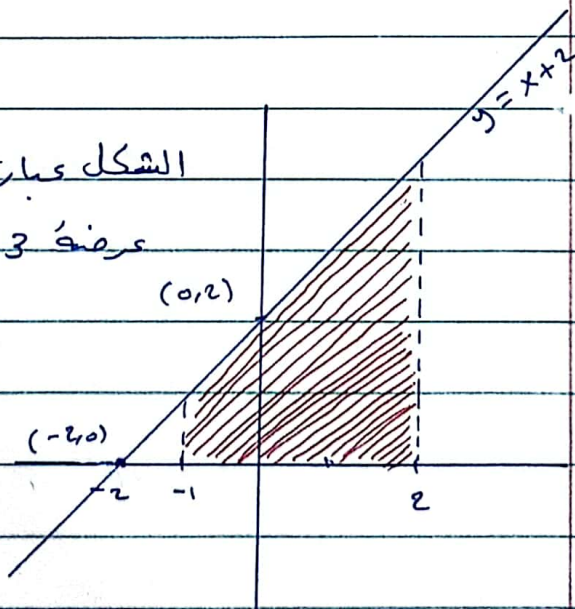
② $\int_0^4 2\,dx$



مساحة مستطيل طوله 4 وعرضه 2

$$\int_0^4 2\,dx = 2x\Big|_0^4 = 2*4 - 0 = 8$$

③ $\int_{-1}^2 (x+2)\,dx$



الشكل عبارة عن $\frac{1}{2}$ مساحة متوازي مستطيلات

عرضه 3 وأطوال أضلاعه هي 2 ، 8 على الترتيب

$$A=\int_{-1}^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^2$$

$$= 2+4 - \frac{1}{2} + 2$$

$$= 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

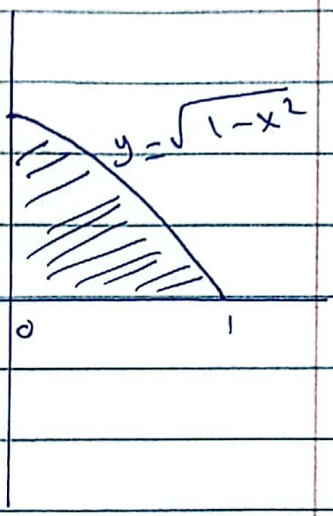
$$3*\left(\frac{2+8}{2}\right)\frac{1}{2} =$$

$$\frac{15}{2} = 3*5*\frac{1}{2} = 3*\left(\frac{10}{2}\right)\frac{1}{2} =$$

CamScanner ile tarandı

④ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$A = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$



ملاحظة: أنها مساحة $\frac{1}{4}$ دائرة نصف قطرها 1

مساحة $\frac{1}{4}$ دائرة $\Rightarrow A = \frac{1}{4} * \pi * r^2$

$\Rightarrow A = \frac{1}{4}\pi * 1 = \frac{\pi}{4}$

خواص التكامل المحدود:

① $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

② $\int_a^b -k f(x)\,dx = -k\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

④ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

④ If $f(x) \geq g(x)$ on $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

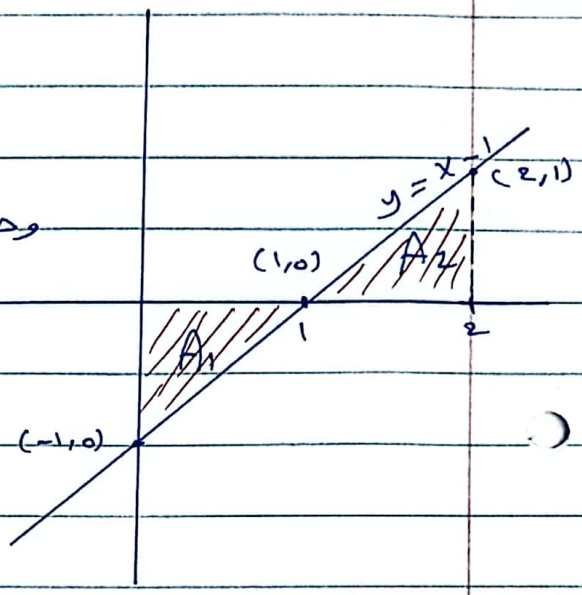
If $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

CamScanner ile tarandı

مثال 2- اجب

ⓐ $\int_0^1 (x-1)\,dx$ ⓑ $\int_0^2 (x-1)\,dx$

نلاحظ أن التكامل المطلوب هو المساحة المظللة بالشكل الآتي:-



$$A_1 = \int_0^1 (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

$$A_2 = \int_0^2 (x-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\right| + \left[\frac{x^2}{2} - x\Big|_1^2\right] = \frac{1}{2} + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

تعميم:-

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

CamScanner ile tarandı

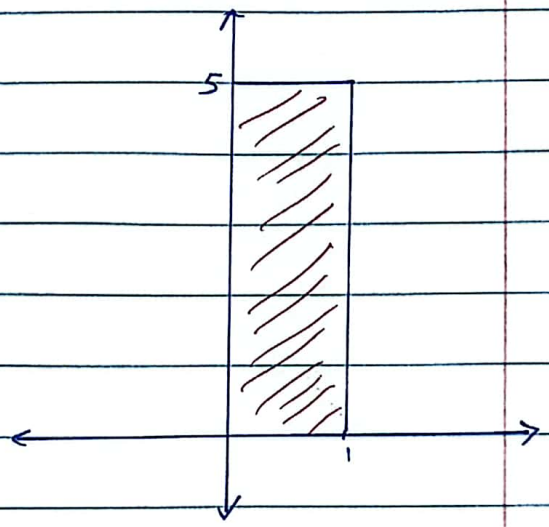
مثال:- احسب $\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1-x^2})\,dx$

$$= \int_0^1 5\,dx - \int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 5\int_0^1 dx - 3\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

* التكامل الاول هو مساحة مستطيل عرضه 1 وطوله يساوي 5 والتكامل الثاني هو عبارة عن ثلاثة أرباع مساحة الدائرة نصف قطرها يساوي 1 وبذلك فإن ناتج التكامل هو

$$= 5 - \frac{3\pi}{4}$$



مثال:- اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ① $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ ② $\int_1^{10} f(x)\,dx$ ③ $\int_{-\frac{1}{2}}^5 f(x)\,dx$ ④

① $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ وحدة مساحة

② $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 2x\,dx = \int_{-1}^0 2x\,dx + \int_0^1 2x\,dx$

CamScanner ile tarandı

$$= x^2\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_{0}^{1} = |0-(-1)^2| + (1-0)$$

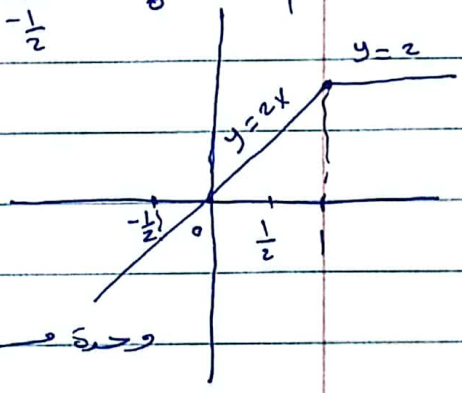
$$= 1+1 = 2 \quad \text{وحدة مساحة}$$

③ $$\int_1^{10} f(x)\,dx = \int_1^{10} 2\,dx = 2x\Big|_1^{10} = 2(10) - 2(1)$$

$$= 20 - 2 = 18 \quad \text{وحدة مساحة}$$

④ $$\int_{\frac{1}{2}}^{5} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2x\,dx + \int_1^5 2\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\,dx + \int_0^1 2x\,dx + \int_1^5 2\,dx = x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + x^2\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^5$$



$$= \left(0-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\right) + (1-0) + (2(5) - 2(1))$$

$$= \left|-\tfrac{1}{4}\right| + 1 + 8 = \tfrac{1}{4} + 9 = \tfrac{37}{4} \quad \text{وحدة مساحة}$$

مبرهنة القيمة المتوسطة في التكامل المحدود:

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإنه في بعض النقاط c في الفترة $[a,b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: جد معدل قيمة الدالة $f(x) = 4-x$ في الفترة $[0,3]$ حيث f تمتلك فعلاً هذه القيمة في بعض النقاط في المنطلق المعطى.

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

CamScanner ile tarandı

$$= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (4-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(4x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^3\right) = \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3} * \left(12 - \frac{9}{2}\right) = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

∴ معدل الدالة $(4-x)$ في الفترة $[0,3]$ هو $\frac{5}{2}$ والنقطة c هي:

$$4 - x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 4 - \frac{5}{2} = \frac{8-5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

المبرهنة الاساسية الاولى في التكامل المحدود:-

إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن الدالة:-

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

تمتلك مشتقة في كل نقطة x في الفترة $[a,b]$ ويكون:-

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

مثال:- أحسب $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^3\,dt\right)$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{t^4}{4}\Big|_1^x\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{4x^3}{4} - 0 = x^3$$

CamScanner ile tarandı

مثال:- أوجد:-

① $\frac{d}{dx}\int_{-p}^{x} \cos t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{-p}^{x} \cos t\,dt = \frac{d}{dx}\left[\sin t\Big|_{-p}^{x}\right]$$

عدد ثابت

$$= \frac{d}{dx}\left[\sin x + \sin p\right] = \cos x + 0 = \cos x$$

② $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} t\Big|_{0}^{x}\right]$

$$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x - \underbrace{\tan^{-1} 0}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

مثال:- احسب $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:-

$$y = \int_{1}^{x^2} \cos t\,dt$$

نلاحظ أن الحد الأعلى للتكامل هو x^2 وليس x لذلك يتحول التكامل الى الصيغة:-

$$y = \int_{1}^{u} \cos t\,dt \qquad , u = x^2 \ , \ \frac{du}{dx} = 2x$$

ويجب أن نطبق قانون السلسلة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{d}{du}\int_{1}^{u} \cos t\,dt\right)\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

CamScanner ile tarandı

مثال:- اجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:-

(a) $y = \int_x^5 3t \sin t \, dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t\sin t\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\sin t\,dt = -3x\sin x$$

(b) $y = \int_{1-3x^2}^{4} \frac{1}{2+t^2}\,dt = -\int_4^{1-3x^2} \frac{1}{2+t^2}\,dt$

Let $u = 1-3x^2$

$du = -6x\,dx$

$\frac{du}{dx} = -6x$

$$= -\int_4^u \frac{1}{2+t^2}\,dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(-\int_4^u \frac{1}{2+t^2}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{-1}{2+u^2}\frac{du}{dx} = \frac{-1}{2+(1-3x^2)}\cdot(-6x)$$

$$= \frac{6x}{2+1-6x^2+9x^4} = \frac{6x}{3(1-2x^2+3x^4)} = \frac{2x}{1-2x^2+3x^4}$$

CamScanner ile tarandı

المبرهنة الاساسية الثانية في التكامل المحدود:-

مبرهنة:- إذا كانت f دالة مستمرة في كل نقطة في الفترة [a,b] وكانت F(x) هي أي معكوس تفاضلي للدالة f في الفترة [a,b] فإن:-

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ملاحظة:- هذه المبرهنة تسمى نظرية حساب التكامل:-

مثال:- احسب التكامل:- $\int_{-1}^{3} (x^3+1)\,dx$

$$\int_{-1}^{3} (x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{81}{4}+3\right) - \left(\frac{1}{4}-1\right)$$

$$= \frac{80}{4} + 4 = \frac{96}{4} = 24$$

ملاحظة:- يمكن التعبير عن المبرهنة القيمة الوسطى (مبرهنة المتوسط) بالصيغة الآتية:-

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

ولايجاد قيمة c نجد (b-a) ثم نعوض c في الدالة f(x) وبتعويض قيمة التكامل نحصل على c

مع العلم ان الدالة f(x) يجب أن تكون مستمرة في الفترة [a,b].

مثال:- جد قيمة c التي تحقق قيمة معدل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ في الفترة [0,9]

$$Av(f) = \frac{1}{9-0}\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{1}{9} * \left[\frac{2}{3}\sqrt{729} - 0\right] = \frac{1}{9} * \frac{2}{3} * 27 = 2$$

$$\sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4$$

CamScanner ile tarandı

مثال :- احسب قيمة :- $\int_0^2 |2x-3|\,dx$

قبل البدء بالحل يجب أن نجد المناطق التي تكون فيها الدالة موجبة والمناطق التي تكون فيها الدالة سالبة.

وبما أن الدالة هي مطلق فيجب أن نجد الفترة التي تكون فيها الدالة هي $(2x-3)$ ثم نجد الفترة التي تكون فيها الدالة هي $-(2x-3)=3-2x$

وكما يأتي :-

$$\int_0^2 |2x-3|\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} -(2x-3)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3)\,dx$$

$$= 3x - x^2 \Big|_0^{\frac{3}{2}} + x^2 - 3x \Big|_{3/2}^2$$

$$= \left[\left[3\left(\tfrac{3}{2}\right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] - 0\right] + \left[[4-6] - \left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\tfrac{3}{2}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + (-2) - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{18}{4} - 2 = \frac{36-18-8}{4}$$

$$= \frac{36-26}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

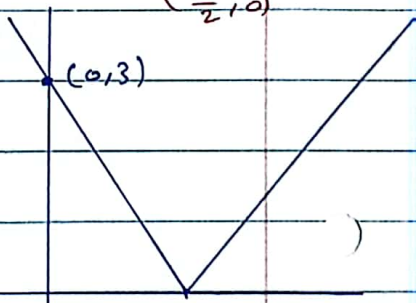
$y = |2x-3|$

$0 = 2x-3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$(\frac{3}{2}, 0)$



$y = |2(0)-3|$

$y = |-3| = 3$

$(0, 3)$

CamScanner ile tarandı

س / اوجد المشتقة في كلا مما يأتي :-

① $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

② $\frac{d}{dx}\int_1^{\sin x} 3t^2\, dt$

③ $\frac{d}{dt}\int_0^{t^4} \sqrt{u}\, du$

④ $\frac{d}{d\theta}\int_0^{\tan\theta} \sec^2 y\, dy$

⑤ $y = \int_0^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

⑥ $y = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt$

⑦ $y = \int_{\sqrt{x}}^{0} \sin(t^2)\, dt$

⑧ $y = \int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt$

⑨ $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $|x| < \frac{\pi}{2}$

⑩ $\int_{\tan x}^{0} \frac{dt}{1+t^2}$

⑪ $y = \int_2^{x} \sqrt{2+\cos^3 t}\, dt$

⑫ $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2+\cos^3 t}\, dt$

⑬ $y = \int_x^{1} \frac{6}{3+t^4}\, dt$

⑭ $y = \int_{\sec x}^{2} \frac{1}{t^2+1}\, dt$

س / جد معدل الدالة في الفترة المعطاة لكلا مما يأتي :-

① $f(x) = x^2 - 1$ on $[0, \sqrt{3}]$

② $f(x) = \frac{-x^2}{2}$ on $[0, 3]$

③ $f(x) = -3x^2 - 1$ on $[0, 1]$

④ $f(x) = 3x^2 - 3$ on $[0, 1]$

⑤ $f(t) = (t-1)^2$ on $[0, 3]$

⑥ $f(t) = t^2 - t$ on $[-2, 1]$

⑦ $g(x) = |x| - 1$ on $[-1, 1]$,
$g(x) = |x| - 1$ on $[1, 3]$
$g(x) = |x| - 1$ on $[-1, 3]$

⑧ $h(x) = -|x|$ on
ⓐ $[-1, 0]$ ⓑ $[0, 1]$, ⓒ $[-1, 1]$

⑨ $f(x) = mx + b$.
ⓐ on $[-1, 1]$
ⓑ on $[-k, k]$

⑩ $y = \sqrt{3x}$ on $[0, 3]$
$y = \sqrt{ax}$ on $[0, a]$

CamScanner ile tarandı

التعويضات في التكامل المحدود :-

مبرهنة :- إذا كانت $g'(x)$ مستمرة في الفترة $[a,b]$ ، و f كانت مستمرة في الفترة التي تحوي قيم $g(x)$ لكل $a \le x \le b$ فإن :-

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

نلاحظ أن :-

$$\int_a^b f(g(x)).\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$u = g(x)$

$x = a \Rightarrow u = g(a)$

$x = b \Rightarrow u = g(b)$

مثال :- احسب التكامل الآتي :-

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\left[(2)^{\frac{3}{2}} - (0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

لما $u = x^3+1$

$du = 3x^2\, dx$

$x = 1 \Rightarrow u = (1)^3+1 = 2$

$x = -1 \Rightarrow u = (-1)^3+1 = 0$

CamScanner ile tarandı

مثال:- اوجد التكامل الآتي:-

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta \csc^2\theta \, d\theta$$

let $u = \cot\theta$

$du = -\csc^2\theta \, d\theta$

$\Rightarrow -du = \csc^2\theta \, d\theta$

when $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

$$= \int_1^0 u(-du) = -\int_1^0 u\,du$$

$$= \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{(1)^2}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}$$

مثال:- اوجد كلاً من التكاملات الآتية:-

① $$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^5 2x \cos 2x \, dx$$

let $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2} du = \cos 2x \, dx$

$x = 0 \Rightarrow u = \sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{8} \Rightarrow u = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} u^5 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^6}{6}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6}{6} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{96}$$

② $$\int_2^5 (2x-5)(x-3)^9 \, dx$$

$u = x-3 \Rightarrow du = dx$

$u = x-3 \Rightarrow x = u+3$

$\Rightarrow 2x-5 = 2*(u+3)-5$

$= 2u+1$

$x = 2 \Rightarrow u = -1$

$x = 5 \Rightarrow u = 2$

$$= \int_{-1}^{2} (2u+1)u^9 \, du$$

$$= \int_{-1}^{2} (2u^{10} + u^9) \, du$$

CamScanner ile tarandı

$$= 2\int_{-1}^{2} u^{10}\,du + \int_{-1}^{2} u^{9}\,du$$

$$= 2\frac{u^{11}}{11} + \frac{u^{10}}{10}\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^{12}}{11} + \frac{2^{10}}{10}\right) - \left(\frac{2(-1)^{11}}{11} + \frac{(-1)^{10}}{10}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\frac{4}{11} + \frac{1}{10}\right) + \frac{2}{11} - \frac{1}{10} = 2^{10}\left(\frac{51}{110}\right) + \frac{8}{110} = \frac{52232}{110}$$

مثال: جد معدل الدالة $f(x) = \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

$$\text{ave}(f) = \frac{1}{3-1}\int_{1}^{3} \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$$

$$\text{ave}(f) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} \cos u\,du$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\sin u\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{2\pi}\left[\sin\frac{\pi}{3} - \sin\pi\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

نضع $u = \frac{\pi}{x} \Rightarrow du = -\frac{\pi}{x^2}dx$

$$-\frac{du}{\pi} = \frac{1}{x^2}dx$$

$x = 1 \Rightarrow u = \pi$

$x = 3 \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$

CamScanner ile tarandı

EXERCISES 5.6

Evaluating Definite Integrals

Use the Substitution Formula in Theorem 6 to evaluate the integrals in Exercises 1–24.

1. a. $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ b. $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. a. $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ b. $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. a. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ b. $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

4. a. $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$ b. $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$

5. a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ b. $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. a. $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ b. $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. a. $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ b. $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

8. a. $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ b. $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$

9. a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. a. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ b. $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

11. a. $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$ b. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$

12. a. $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

13. a. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$ b. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$

14. a. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$ 16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta\,d\theta$ 18. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\sin t\,dt$ 20. $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

Copyright © 2005 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley

CamScanner ile tarandı

المساحة بين منحنيين :-

تعريف :- إذا كانت f ، g دالة مستمرة وكان $f(x) \geq g(x)$ خلال الفترة $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=f(x)$ ، $y=g(x)$ من a الى b هو تكامل $(f-g)$ من a الى b أي أن :-

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

لأيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين :-

① نرسم المنحنيين في المستوي المتعامد لكي نتعرف على الحد الأعلى والحد الأدنى للتكامل من معادلة المنحنيين وايجاد نقاط التقاطع.

② نكتب $f(x)-g(x)$ بصيغة مبسطة إن أمكن ذلك.

③ نكامل $f(x)-g(x)$ من a الى b وهي القيم التي حصلنا عليها لتكون حدوداً للتكامل.

مثال :- جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=2-x^2$ ، $y=-x$

① لأيجاد حدود التكامل نساوي الدالتين

$$2-x^2 = -x$$

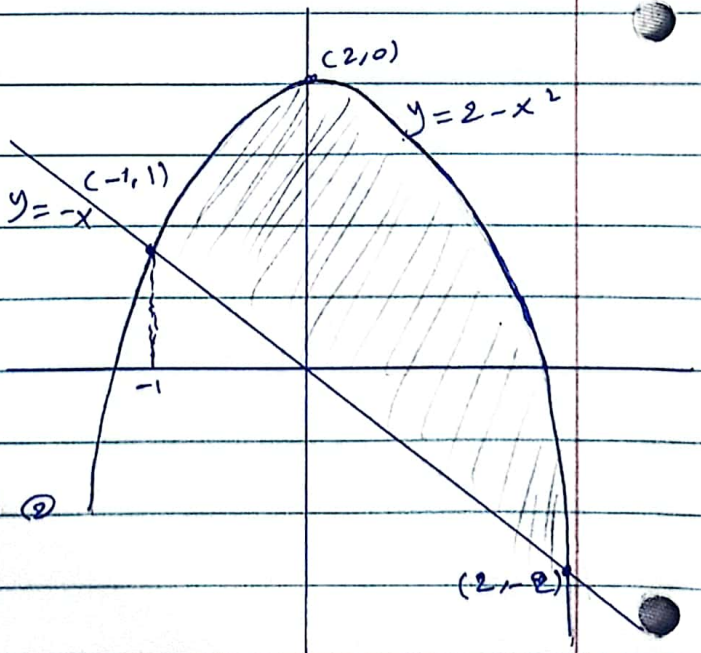
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x=2 \,,\; x=-1$$

وهذا يعني ان المساحة سوف تكون محصورة بين $x=2$ ، $x=-1$

② نكتب $f-g$ بصيغة مبسطة

$$2-x^2+x = 2+x-x^2$$



CamScanner ile tarandı

③ نكامل و-f فتكون :-

$$\int_{-1}^{2}(f(x)-g(x))\,dx = \int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,dx$$

$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \left(4+2-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 8 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين المحور X و منحنى الدالة:-

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x \quad ; \quad -1 \le x \le 2$$

① يجب أن نحدد نقاط تقاطع الدالة مع المحور x أي إنه يجب أن نجد حلول المعادلة (اصفار الدالة) لكي نتعرف على أي المناطق سوف تكون أعلى محور السينات وأيا منها سوف تكون اسفل المحور.

② المناطق التي تكون الى الاسفل من محور x فتعوض سالبة (نأخذ المطلق لها) ونجدها على حدة.

③ المناطق التي تكون الى الاعلى من محور x فتعوض موجبة ونجدها على حدة.

$$[-1,0]: \quad A_1 = \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right] = \frac{5}{12}$$

$$[0,2]: \quad A_2 = \int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{0}^{2}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} - 4 - 0 = -\frac{8}{3}$$

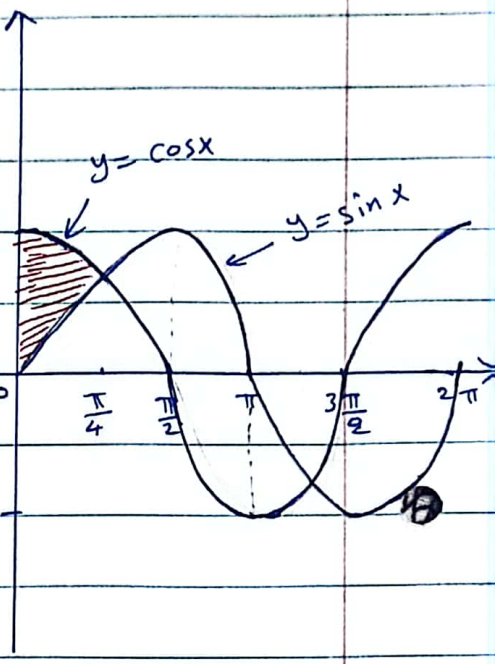
$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

CamScanner ile tarandı

مثال: جد مساحة المنطقة المثلثة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين المنحنيين $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ والمحور y من اليمين

① نجد نقطة التقاطع $\sin x=\cos x \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

فتكون حدود التكامل من $x=0$ الى $x=\frac{\pi}{4}$



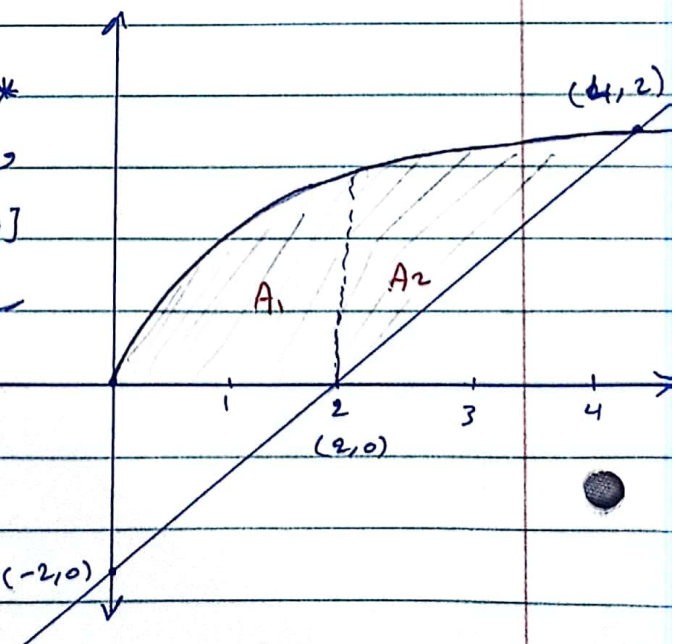
② $f(x)-g(x)=\cos x-\sin x$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\sin x+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-(0+1)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

مثال: جد المساحة في الربع الاول للمنطقة المحددة للمنحني $y=\sqrt{x}$ من الاعلى والمحددة من الاسفل بالمحور x والمنحني $y=x-2$



* من الرسم نلاحظ أن الدالة $g(x)$ ليست دالة واحدة حيث أنها من $(0,2)$ هي المحور x ومن $[2,4]$ تكون الدالة $(x-2)$ لذلك فإن التكامل سوف يتجزأ الى جزأين.

← التكملة

CamScanner ile tarandı

لاستخراج حدود التكامل يكون :-

$$\sqrt{x} = x-2 \Rightarrow x = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$x = 4 \quad , \quad x = 1$$

نلاحظ أن قيمة $x=4$ هي فقط تحقق المعادلة $\sqrt{x} = x-2$ وأن $x=1$ لا تحقق المعادلة. لذلك فإن الحد الأعلى للتكامل هو 4

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 - \sqrt{x}$$

$$2 \le x \le 4 \Rightarrow f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2$$

$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}) - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2 + 4\right)$$

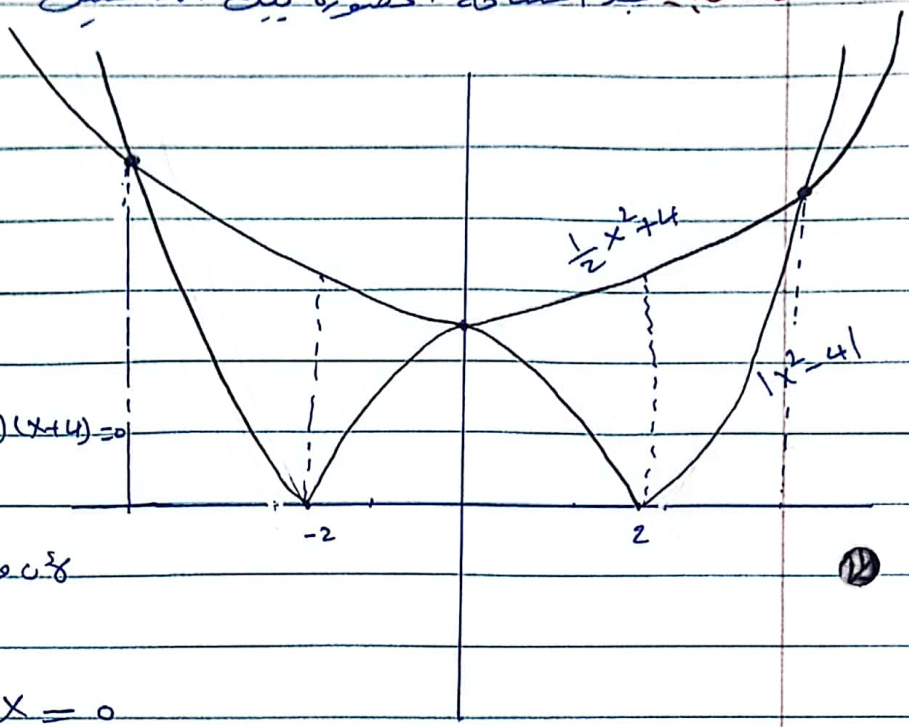
$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{16-6}{3} = \frac{10}{3}$$

CamScanner ile tarandı

مثال: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$y_1 = |x^2 - 4|$

$y_2 = \frac{x^2}{2} + 4$



$\frac{x^2}{2} + 4 = x^2 - 4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - 8 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 16) = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$

$\Rightarrow x = \mp 4$

$-(x^2-4)$ على الفترة

$\frac{x^2}{2} + 4 = 4 - x^2$

$\frac{3}{2}x^2 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{16}{2} + 4 = 12$

$x = -4 \Rightarrow y = \frac{16}{2} + 4 = 12$

نقاط التقاطع هي $(0,4)$, $(-4,12)$, $(4,12)$

$$A_1 = \int_{-4}^{-2} \left(\frac{x^2}{2}+4\right) - (x^2-4)\,dx = \int_{-4}^{2} \left(8 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 8x - \frac{x^3}{6}\Big|_{-4}^{-2}$$

$$= \left[8(-2) - \frac{(-2)^3}{6}\right] - \left[8(-4) - \frac{(-4)^3}{6}\right] = -16 + \frac{8}{6} + 32 - \frac{64}{6}$$

$$= 16 - \frac{56}{6} = \frac{96-56}{6}$$

$$A_2 = \int_{-2}^{0} \left[\left(\frac{x^2}{2}+4\right) - (-x^2+4)\right] dx = \int_{-2}^{0} \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2}x^3\Big|_{-2}^{0}$$

CamScanner ile tarandı

$= \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(-2)^3 = \frac{8}{2} = 4$

$A = 2(A_1 + A_2) = 2\left(\frac{20}{3} + 4\right) = 2\left(\frac{20+12}{3}\right) = 2\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3}$

CamScanner ile tarandı