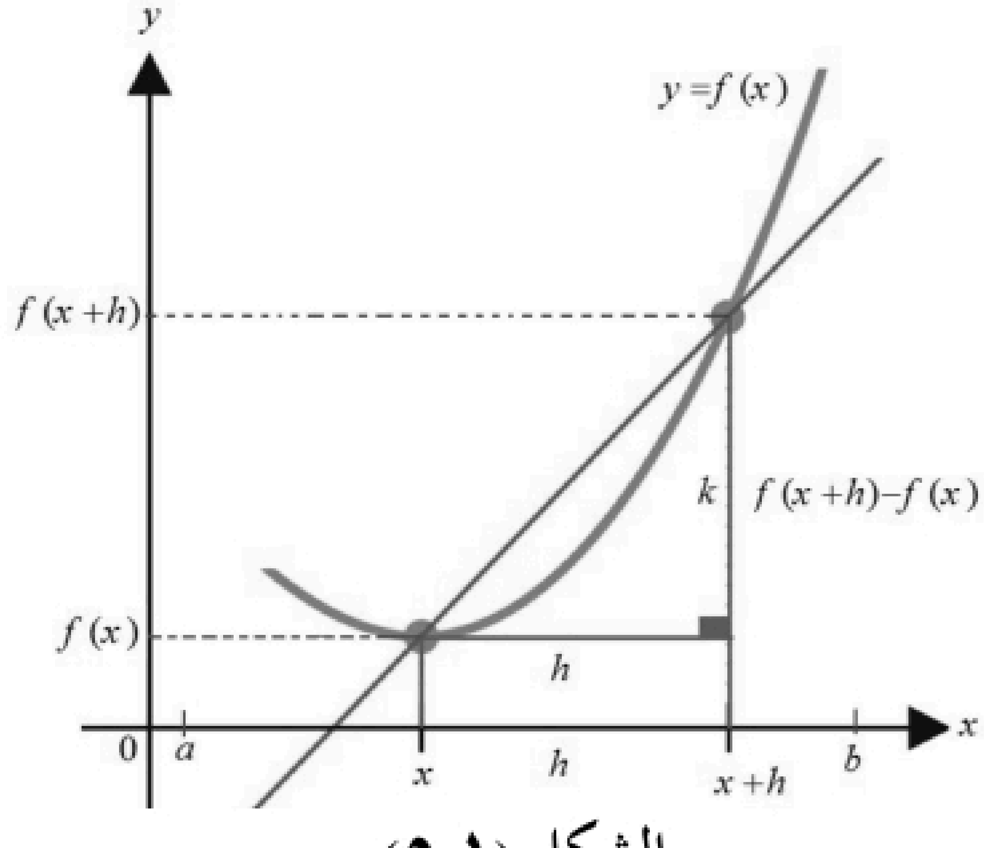
الفصل الخامس

الاشتقاق
DIFFERENTIATION

يعتبر الاشتقاق من المفاهيم الرياضية الهامة والتي لها العديد من التطبيقات، مثل حساب ميل المماس، إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة، رسم الدوال وغيرها. في هذا الفصل نعرف الاشتقاق ثم نوضح قوانين الاشتقاق، ونذكر بعضاً من التطبيقات على الاشتقاق.

(٥,١) تعريف المشتقة
Definition of Derivative

لتكن الدالة $y=f(x)$ معرفة على الفترة المفتوحة (a,b) ولتكن $x\in(a,b)$، إذا زادت x بالمقدار h بحيث إن النقطة $x+h$ تنتمي للفترة (a,b) فإن قيمة الدالة $y=f(x)$ سوف تتغير إلى $y+k=f(x+h)$، أي أن $k=f(x+h)-f(x)$، كما هو موضح في الشكل (٥,١).



الشكل (٥,١).

تعريف (٥,١)

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة I ، وليكن $x \in I$. تعرف ويرمز لمشتقة الدالة f عند x كما يلي:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

إذا كانت قيمة النهاية موجودة.

يرمز لمشتقة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة x أيضاً بالرموز التالية:

$$y',\ \ Df(x),\ \ D_x f(x),\ \ \frac{dy}{dx},\ \ \frac{df}{dx}$$

وكذلك نرمز لمشتقة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = x_0$ بأحد الرموز $f'(x_0)$ أو $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$ ، $Df(x_0)$ ، أي أن

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

بوضع $h = x - x_0$ نجد أنه عندما تقترب x من x_0 فإن h تقترب من الصفر ويمكننا كتابة التعريف الأولي للمشتقة عند النقطة x_0 كما يلي

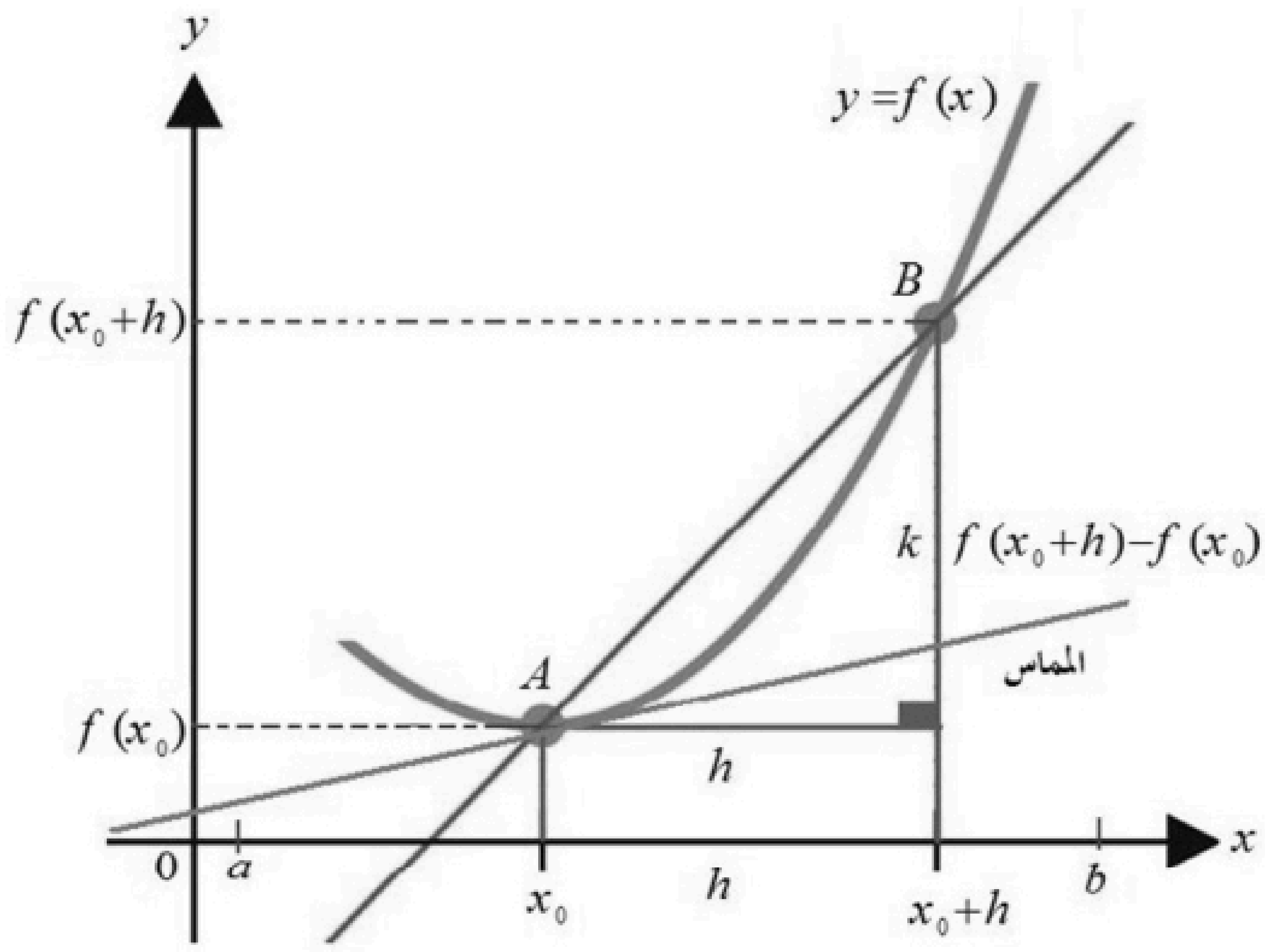
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

بشرط وجود النهاية عندما تقترب x من النقطة x_0.

تعريف (٥,٢)

تكون الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على فترة I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل $x_0 \in I$.

المعنى الهندسي للمشتقة



الشكل (٥,٢).

نلاحظ من الشكل (٥,٢) أن ميل المستقيم القاطع المار بالنقطتين A , B يساوي $\frac{k}{h}$. عندما تقترب النقطة B من النقطة A فإن المستقيم القاطع AB يقترب من المماس عند النقطة A. وإذا كانت مشتقة الدالة موجودة عند النقطة A فإن ميل المستقيم القاطع AB يؤول إلى ميل المماس المار بالنقطة A عندما B تقترب من A ، أي أن

$$m_A = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

و هذا يعني أن قيمة المشتقة عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ تساوي ميل المماس، m_A ، المار بالنقطة A.

ملاحظة

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \infty$ فإن المماس لمنحنى الدالة عند النقطة x_0 يوازي محور y ، أي أن المماس في هذه الحالة يكون رأسياً. أما إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن المماس يوازي محور x ، أي يكون أفقيا.

الأمثلة الآتية تبين كيفية إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة محددة.

مثال (٥,١)

باستخدام تعريف المشتقة، أوجد $f'(4)$ ، حيث $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

الحل

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}. \qquad \square$$

مثال (٥,٢)

باستخدام تعريف المشتقة، أوجد $f'(1)$ ، للدالة $f(x)=2x^3+1$

الحل

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x^3+1)-3}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x^3-2)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1^3)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$=2\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=2(3)=6. \qquad \square$$

الأمثلة الآتية تبين كيفية إيجاد مشتقة الدالة عند أي نقطة:

مثال (٥,٣)

باستخدام تعريف المشتقة أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$.

الحل

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{x(x+h)h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}. \qquad \square$$

مثال (٥,٤)

باستخدام تعريف المشتقة، أوجد $f'(x)$، حيث $f(x)=3x^3+2x-1$ ومن ثم أوجد، $f'(-1)$, $f'(1)$.

الحل

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^3+2(x+h)-1\right]-\left[3x^3+2x-1\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{9x^2h+9xh^2+3h^3+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[9x^2+9xh+3h^2+2\right]h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[9x^2+9xh+3h^2+2\right]=9x^2+2$$

بالتعويض المباشر نجد أن $f'(1)=f'(-1)=11$. $\square$

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

النظرية التالية توضح أن الاتصال شرط لازم للاشتقاق ولكنه غير كاف.

نظرية (٥,١)

كل دالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 تكون متصلة عند نفس النقطة.

البرهان

لكي نثبت أن الدالة $y = f(x)$ متصلة عند النقطة $x = x_0$ ، يجب علينا إثبات أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ،

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \ (x - x_0) \right], \quad x \neq x_0$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \right] \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0)\ (0) = 0,$$

إذاً $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ وبالتالي f متصلة عند $x = x_0$. □

من النظرية السابقة نستنتج أنه إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة I فإنها تكون متصلة على هذه الفترة. ومنها نستنتج أيضا أنه إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة ما x_0 تقع في نطاق الدالة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

عكس النظرية السابقة ليس بالضرورة صحيح، أي أنه إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة فإن الدالة ليست بالضرورة قابلة للاشتقاق. الأمثلة الآتية تبين أنه يوجد دوال متصلة عند نقطة ما، ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال (٥,٥)

بين أن الدالة $f(x) = |x|$ متصلة عند $x = 0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

الحل

درسنا فيما سبق اتصال هذه الدالة. لبحث وجود المشتقة عند $x=0$ ، نبحث قيمة النهاية

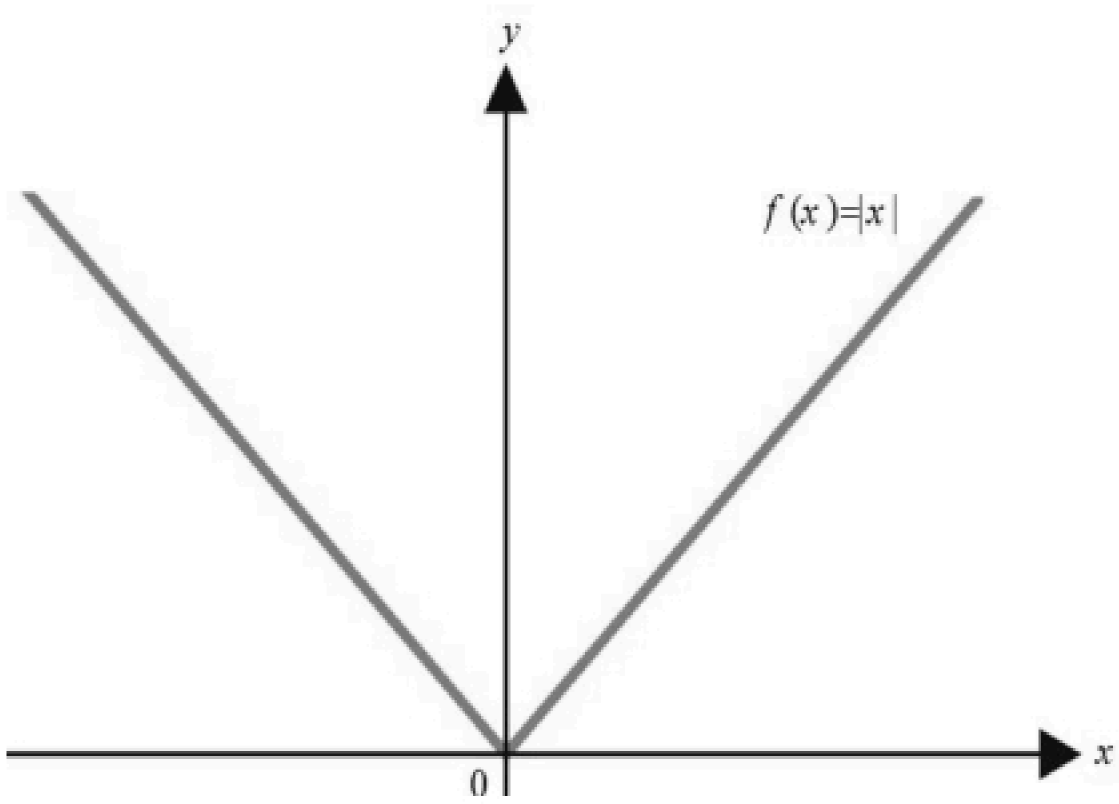
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

ولبحث هذه النهاية نبحث النهاية اليمنى و اليسرى

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

وحيث إن $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$. وبذلك تكون الدالة متصلة ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$. وهذا يؤكد أن عكس النظرية السابقة ليس صحيحاً. □



الشكل (٥,٣).

ملاحظة

من الواضح في الشكل (٥,٣) أن منحنى الدالة عند النقطة $x=0$ عبارة عن زاوية لذلك لا يمكن رسم مماس واحد فقط عند هذه النقطة (يمكن رسم عدد لانهائي من المماسات)، أي أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال (٥,٦)

بين أن الدالة الآتية

$$f(x)=\begin{cases}4 & x<2\\ 2x & x\geq 2\end{cases}$$

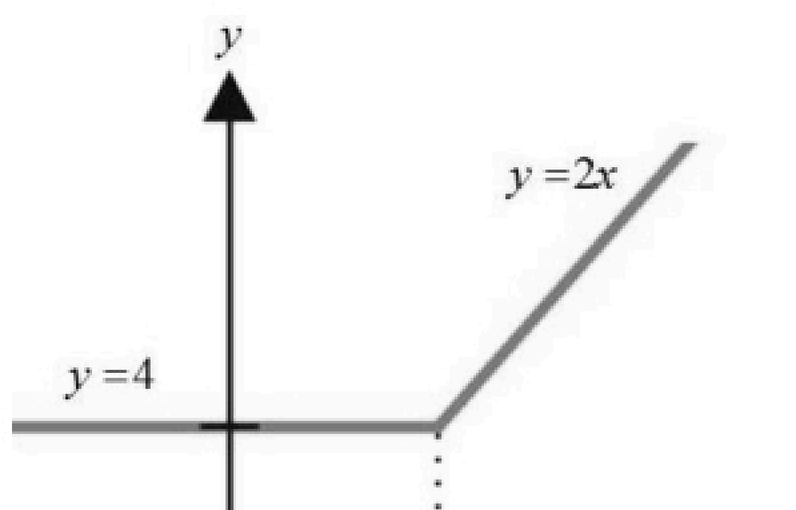
غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=2$.

الحل

من الواضح في الشكل (٥,٤) أن منحنى الدالة عبارة عن زاوية عند النقطة $x=2$ لذلك لا يمكن رسم مماس وحيد عند هذه النقطة، أي أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة. للتحقق من ذلك نوجد النهاية

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

بما أن تعريف الدالة عن يمين النقطة $x=2$ يختلف عن يسارها لذا سوف نحسب النهايتين.



الشكل (٥,٤).

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}2=2,$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}0=0.$$

حيث إن النهايتين غير متساويتين، إذا الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$. □

مثال (٥,٧)

بين أن الدالة $f(x) = x\,|x|$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

الحل

واضح أن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0, \infty)$ وكذلك $(-\infty, 0)$ ؛ لأنها كثيرة حدود في كل فترة.

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

بقي الآن بحث المشتقة عند $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

أي أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ وبذلك تكون قابلة للاشتقاق لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$. □

تمارين (٥,١)

في التمارين من (١) إلى (٤) أوجد مشتقة الدالة المعطاة باستخدام تعريف المشتقة

١- $f(x) = x^2$

٢- $f(x) = 2x^3 + 1$

٣- $f(x) = 2x^2 + 1$

٤- $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$

في التمارين من (٥) إلى (٨) بيّن هل الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة المعطاة أم لا.

٥- $x = 0$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0, \\ 3x + 1 & x \geq 0, \end{cases}$

٦- $x = 0$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0, \end{cases}$

٧- $x = 1$ $\quad f(x) = |x - 1|,$

٨- $x = 0$ $\quad f(x) = x^2\,|x|,$

٩- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ زوجية (فردية) بيّن أن $f'(x)$ تكون دالة فردية (زوجية).

في التمارين من (١٠) إلى (١٣) ارسم بيان الدوال ثم أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

١٠- $f(x) = |x+2|$ ‏ ‏ ‏ ١١- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

١٢- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \ge 0, \end{cases}$ ‏ ‏ ‏ ١٣- $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(٥,٢) قوانين الاشتقاق

Laws of Differentiation

في القسم السابق، قمنا بحساب مشتقات بعض الدوال وذلك باستخدام التعريف الأولي للمشتقة وهو أسلوب ليس بالسهل لكثير من الدوال. في هذا القسم سوف نستعرض بعض القواعد المستخدمة لحساب المشتقات وذلك بدون حساب النهاية الموجودة في التعريف الأولي للمشتقة.

نظرية (٥,٢)

إذا كان $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

البرهان

لدينا $f(x) = c$ ، باستخدام التعريف الأولي للمشتقة نجد

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0. \quad \square$$

النظرية السابقة تعني أنه لأي عدد ثابت c ، الدالة الثابتة $f(x) = c$ يكون لها خط مماس ميله يساوي صفر. أي أن الخط المماس للخط الأفقي يكون الخط الأفقي نفسه.

نظرية (٥,٣)

إذا كان $f(x) = x^n$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$.

البرهان

حيث إن $f(x) = x^n$ ، باستخدام التعريف الأولي للمشتقة نجد

$$\frac{d}{dx}(x^n) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

نعلم أن

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

بأخذ $a = (x+h),\ b = x$ ، يمكن كتابة المقدار $(x+h)^n - x^n$ على الصورة

$$(x+h)^n - x^n = (h)\,[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)^2 x^{n-3} + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

و يكون

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \lim_{h\to 0}\frac{(h)\,[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\
&= [x^{n-1} + x^{n-2}\,x + x^{n-3}\,x^2 + \cdots + x^2\,x^{n-3} + x\,x^{n-2} + x^{n-1}] \\
&= [\underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n-\text{times}}] = n\,x^{n-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

مثال (٥,٨)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = x^{12}$.

الحل

باستخدام النظرية (٥,٣) نجد $\frac{dy}{dx} = 12\,x^{12-1} = 12\,x^{11}$

يمكن إثبات صحة النظرية (٥,٣) عندما تكون $n \in \mathbb{R}$ ، أي أنه لأي عدد حقيقي n يكون $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$. □

نظرية (٥,٤)

إذا كان $r \in \mathbb{R}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(x^r) = r\,x^{r-1}$.

مثال (٥,٩)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = x^{-\frac{3}{2}}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{5}{2}}. \quad \square$$

نظرية (٥,٥)

إذا كانت g , f دوال قابلة للاشتقاق عند x ، وكان c عددا ثابتا ، فإن :

١- $\left(c\,f(x)\right)' = c\,f'(x)$

٢- $\left(f+g\right)'(x) = f'(x) + g'(x)$

٣- $\left(f-g\right)'(x) = f'(x) - g'(x)$

٤- $\left(f\,g\right)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

٥- $g(x) \neq 0 ,\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

البرهان

سوف نقوم ببرهان القاعدتين (١) و (٢) ونترك الباقي للقارىء.

١- لتكن $k(x)=c\,f(x)$ ، باستخدام التعريف الأولي للمشتقة نجد أن

$$\begin{aligned}(c\,f(x))' = k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c\,f(x+h)-c\,f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\,f'(x).\end{aligned}$$

٢- لتكن $k(x)=f(x)+g(x)$ ، باستخدام التعريف الأولي للمشتقة نجد أن :

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) = k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}+\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\\ &= f'(x)+g'(x)\,. \quad \square\end{aligned}$$

مثال (٥,١٠)

أوجد y' للدوال

١- $y=3x+\frac{1}{2}x^{12}+\sqrt{x}$ ٢- $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

٣- $y=\frac{3x^2-3x+1}{2x}$ ٤- $y=(x^2-9)(\sqrt{x}-5)$

الحل

١-
$$y' = \frac{d}{dx}\left[3x + \frac{1}{2}x^{12} + \sqrt{x}\right]$$
$$= \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^{12}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$
$$= 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^{12}) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$
$$= 3 + \frac{1}{2}(12x^{11}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 3 + 6x^{11} + \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

٢-
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]$$
$$= \frac{(x^2-1)\ \frac{d}{dx}\left[x^2+1\right] - (x^2+1)\ \frac{d}{dx}\left[x^2-1\right]}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)\ (2x) - (x^2+1)\ (2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{2x\,[(x^2-1)-(x^2+1)]}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\,(-2)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

٣- يمكن كتابة الدالة في الصورة المبسطة قبل إيجاد المشتقة كما يلي

$$y = \frac{3x^2-3x+1}{2x}$$
$$= \frac{3x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x}$$
$$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{-1}.$$

ويكون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{-1}\right)=\frac{3}{2}+0-\frac{1}{2}x^{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

٤-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x^2-9)(\sqrt{x}-5)\right]$$
$$=(x^2-9)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-5)+(\sqrt{x}-5)\frac{d}{dx}(x^2-9)$$
$$=(x^2-9)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(\sqrt{x}-5)(2x)$$
$$=\frac{(x^2-9)}{2\sqrt{x}}+2x(\sqrt{x}-5). \quad \square$$

مثال (٥,١١)

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=1$.

الحل

معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (x_0,y_0) وميله m هي

$.(y-y_0)=m(x-x_0)$

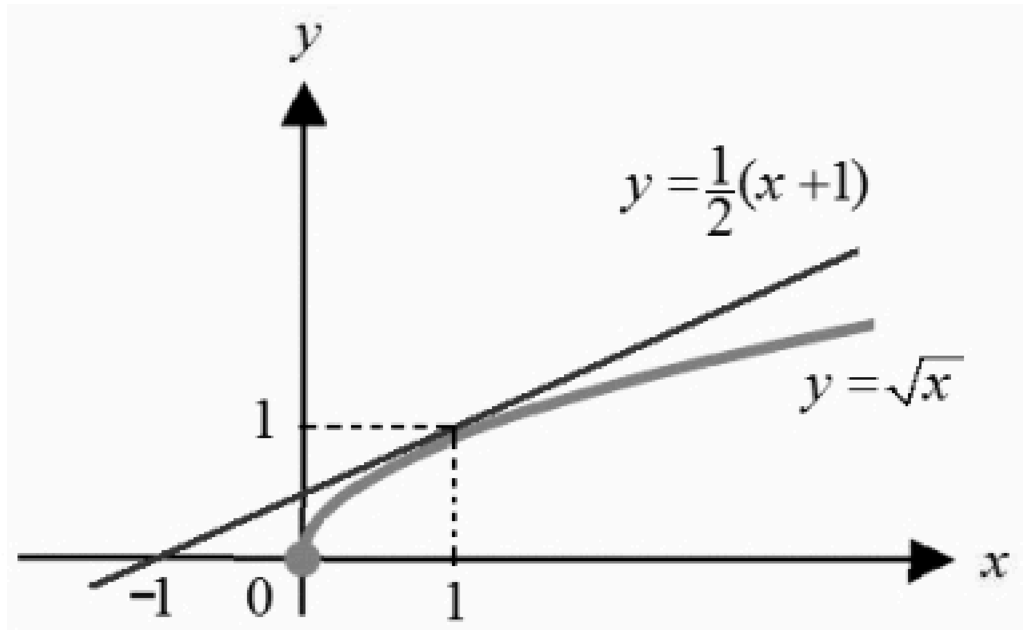
إذاً يلزمنا معرفة النقطة (x_0,y_0) وميل المماس.

$x_0=1$ وبالتعويض عن $x=1$ في معادلة المنحنى نجد أن

$$y_0=f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1$$

إذاً $(x_0,y_0)=(1,1)$. ميل المماس عند النقطة (x_0,y_0) هو $f'(x_0)$. إذا يلزمنا إيجاد $f'(1)$. بما أن $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، إذاً $m=f'(1)=\frac{1}{2}$. معادلة الخط المستقيم (المماس) الذي ميلة $m=\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(1,1)$ هي $(y-1)=\frac{1}{2}(x-1)$ أو $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

كما هو موضح في الشكل (٥,٥) . $\square$



الشكل (٥,٥).

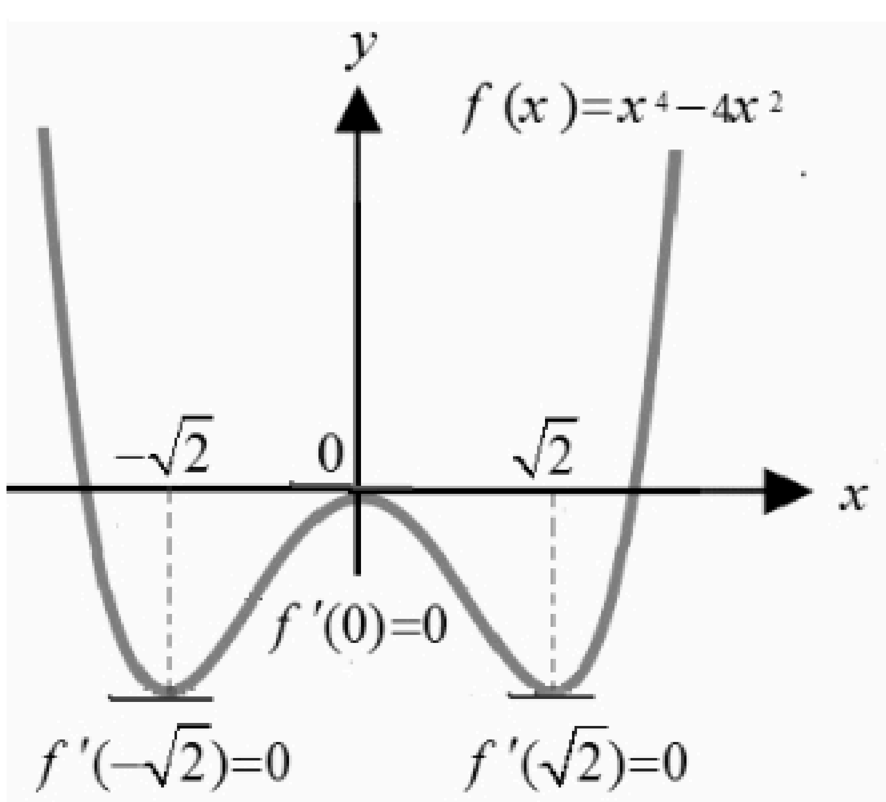
مثال (٥,١٢)

أوجد قيم x التي يكون عندها المماس لمنحى الدالة $f(x)=x^4-4x^2$ أفقيا.

الحل

يكون المماس لمنحنى الدالة أفقيا عندما تنعدم قيمة المشتقة عند هذه النقطة ، أي أن : $f'(x)=0$.

$$f(x)=x^4-4x^2 \Rightarrow f'(x)=4x^3-8x,$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2-2)=0 \ \Rightarrow x(x^2-2)=0$$
$$\Rightarrow \ x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$$
$$\Rightarrow \ x=0, \ \ x=\sqrt{2}, \ x=-\sqrt{2}$$



الشكل (٥,٦).

أي أن المماس للمنحني يكون أفقياً عند مجموعة النقاط $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ ، كما هو موضح في الشكل (٥,٦) . ☐

مثال (٥,١٣)

إذا كانت $f(1)=-2$ ، $f'(1)=3$ ، $g(1)=1$ ، $g'(1)=-2$. أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة $h(x)=f(x)g(x)$ ، عند النقطة $x=1$.

الحل

حيث إن $h'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$ فإن ميل المماس عند $x=1$ هو

$$m=h'(1)=f(1)g'(1)+f'(1)g(1)=(-2)(-2)+(3)(1)=4+3=7$$

لإيجاد النقطة (x_0, y_0) نعوض عن قيمة $x=1$ في معادلة المنحني $h(x)=f(x)g(x)$ ، أي أن : $y=h(1)=f(1)g(1)=(-2)(1)=-2$.

وبذلك تكون النقطة $(x_0, y_0)=(1,-2)$. معادلة المماس بدلالة الميل m ونقطة تقع على منحنى الدالة هي $y-y_0=m(x-x_0)$. وبذلك تكون معادلة المماس هي

$$y+2=7(x-1)$$

أو

$$y=7x-9. \quad \square$$

تمارين (٥,٢)

في التمارين من (١) إلى (١٢) أوجد مشتقة الدوال

١- $f(x)=(x^2+2)(x^3-3x+1)$

٢- $g(x)=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$

٣- $f(x)=2x^2+1$

٤- $h(x)=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$

٥- $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{5x+1}$

٦- $y(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$

٧- $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{\sqrt{x}}$ ٨- $g(x)=\dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$

٩- $f(x)=x(\sqrt[3]{x}+3)$ ١٠- $f(t)=\dfrac{5t^3+t}{5t^2+1}$

١١- $f(x)=\dfrac{5x+\frac{1}{x}}{5x^2+1}$ ١٢- $k(t)=(t+\frac{1}{t})(t^2+1)$

١٣- إذا كانت $F(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2+1}$ ، أوجد $F'(0),\ F'(-1)$.

١٤- إذا كانت $s(t)=\dfrac{t^2}{5}+\dfrac{3}{5-t}$ ، أوجد $s'(0),\ s'(2)$.

١٥- إذا كانت $z(t)=(\sqrt{t^3}+1)t$ ، أوجد $z'(0)$.

١٦- إذا كانت $f(t)=(t^2+t+1)(t^2-t+1)$ ، أوجد $f'(0), f'(1)$.

١٧- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $h(x)=\dfrac{x^2}{g(x)}$ عند النقطة $x=1,\ x=0$ ، علما بان $g'(1)=-2,\ g'(0)=-1$.

١٨- أوجد ميل المماس للدالة $h(x)=x\sin x$ عند النقطة $x=\pi$

(٥,٣) المشتقات العليا

Higher Derivatives

عرفنا في الأقسام السابقة المشتقة الأولى للدالة f (المشتقة من الرتبة الأولى)، ونوضح في هذا القسم تعريف المشتقة الثانية والثالثة،... إلخ للدالة f والتي تعرف بالمشتقات العليا للدالة f. إذا كانت $f'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ فإننا نحصل على المشتقة الثانية ونرمز لها بالرمز $f''(x)$ من المشتقة الأولى وذلك باشتقاقها مرة أخرى بالنسبة للمتغير x ، وعند اشتقاق المشتقة الثانية فإننا نحصل على المشتقة الثالثة $f'''(x)$ وبالمثل بالنسبة للمشتقة الرابعة $f^{(4)}(x)$ ، ⋯ ، والمشتقة النونية $f^{(n)}(x)$ ، كما هو موضح في الجدول (٥,١).

الجدول (٥,١).

رتبة المشتقة	الرمز الأول	الرمز الثاني
الأولى	$y' = f'(x)$	$\frac{df}{dx}$
الثانية	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2 f}{dx^2}$
الثالثة	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3 f}{dx^3}$
الرابعة	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4 f}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
النونية	$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n f}{dx^n}$

مثال (٥,١٤)

أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية (على الشكل $f(x) = ax^2 + bx + c$) بحيث يكون $f(0) = -2$ ، $f'(0) = 2$ و $f''(0) = 1$.

الحل

نوجد المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$
$$\Rightarrow f''(x) = 2a,$$

ثم نعوض في القيم المعطاة فنحصل على

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2,$$
$$f'(0) = 2 \Rightarrow b = 2,$$
$$f''(0) = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

إذاً $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$. □

مثال (٥,١٥)

أوجد المشتقة الخامسة للدالة $f(x) = x^5 + 2x^2 + 2$.

الحل

$$f'(x) = 5x^4 + 4x,$$
$$f''(x) = 20x^3 + 4,$$
$$f^{(3)}(x) = 60x^2,$$
$$f^{(4)}(x) = 120x$$
$$f^{(5)}(x) = 120. \quad \square$$

مثال (٥,١٦)

أوجد المشتقة الخامسة للدالة $f(x) = x^4$.

الحل

$$f(x) = x^4,$$
$$f^{(1)}(x) = 4x^3,$$
$$f^{(2)}(x) = (4)(3)x^2,$$
$$f^{(3)}(x) = (4)(3)(2)x,$$
$$f^{(4)}(x) = (4)(3)(2)(1) = 24,$$
$$f^{(5)}(x) = 0. \quad \square$$

من الأمثلة السابقة نستنتج النظرية الآتية :

نظرية (٥,٦)

إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث $n, m \in \mathbb{N}$ ، فإن

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} 0 & n < m, \\ n! & n = m, \\ n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))x^{n-m} & n > m. \end{cases}$$

تمارين (٥,٣)

في التمارين (١) إلى (٤) أوجد المشتقات الأولى، الثانية، الثالثة ثم استنتج المشتقة النونية للدوال

١- $f(x)=\dfrac{2}{x}$

٢- $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

٣- إذا كانت $y=\sqrt{2x-x^2}$ ، أثبت أن $y^3y''+1=0$.

(٥,٤) قاعدة السلسلة

The Chain Rule

في كثير من الحالات تكون الدالة f معرفة كتحصيل دالتين مثل $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

النظرية التالية توضح آلية اشتقاق مثل هذا النوع من الدوال.

نظرية (٥,٧)

إذا كانت الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x وكانت $f(g(x))$ قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ ، فإن

$$\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))g'(x)$$

يمكن كتابة النظرية على الصورة المختصرة الآتية:

إذا كانت كل من $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ ، دوال قابلة للاشتقاق، فإن $y=f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق، كما أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

مثال (٥,١٧)

باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد مشتقة الدالة $y=(x^3+x-1)^7$.

الحل

افرض أن $u=g(x)=x^3+x-1$ ، أذا $y=f(u)=u^7$ وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}(u^7)\frac{d}{dx}(x^3+x-1)$$
$$=(7u^6)(3x^2+1)=7(x^3+x-1)^6(3x^2+1). \qquad \square$$

إذا كان $y=f^n(x)$ ، $n\in\mathbb{R}$. فإننا نحصل على مشتقة الدالة y باستخدام قاعدة السلسلة

$$\left(f^n(x)\right)'=n\,f^{n-1}(x)f'(x)$$

حاله خاصة: عندما $n=\frac{1}{2}$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\,f'(x)$$

حاله خاصة: عندما $n=-1$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{[f(x)]^2}\,f'(x)$$

مثال (٥,١٨)

باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد مشتقة الدالة $y=\sqrt{x^3+x-1}$.

الحل

باستخدام الصيغة $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\,f'(x)$ نجد أن :

$$y' = \left(\sqrt{x^3 + x - 1}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x - 1}}\left(x^3 + x - 1\right)'.$$
$$= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x - 1}}. \quad \square$$

مثال (٥,١٩)

أوجد مشتقة الدالة $y(x) = \dfrac{1}{(x^3 + x - 1)^4}$.

الحل

باستخدام الصيغة $f'(x)\ \ \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^2}$ نجد

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(x^3 + x - 1)^4}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\left[(x^3 + x - 1)^4\right]^2}\left((x^3 + x - 1)^4\right)'$$
$$= -\frac{1}{\left[(x^3 + x - 1)^4\right]^2}\left[4(x^3 + x - 1)^3 (x^3 + x - 1)'\right]$$
$$= -\frac{4(x^3 + x - 1)^3 (3x^2 + 1)}{(x^3 + x - 1)^8}. \quad \square$$

مثال (٥,٢٠)

أوجد مشتقة الدوال

١- $f(x) = (x^3 - 3x^2)^{\frac{5}{2}}$

٢- $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$

٣- $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^3+2}+2x}$

٤- $f(x)=\dfrac{5x}{(x^2+1)^2}$

الحل

١-
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[(x^3-3x^2)^{\frac{5}{2}}\right]=\frac{5}{2}(x^3-3x^2)^{\frac{5}{2}-1}\frac{d}{dx}\left[x^3-3x^2\right]$$
$$=\frac{5}{2}(x^3-3x^2)^{\frac{3}{2}}\left[3x^2-6x\right].$$

٢-
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x^5+4x^3+3x+1)}}\;\frac{d}{dx}(x^5+4x^3+3x+1)$$
$$=\frac{(5x^4+12x^2+3)}{2\sqrt{x^5+4x^3+3x+1}}\;.$$

٣-
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{6}{\sqrt{x^3+2}+2x}\right]=6\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^3+2}+2x}\right]$$
$$=-6\frac{1}{\left(\sqrt{x^3+2}+2x\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+2}+2x\right)$$
$$=-\frac{6}{\left(\sqrt{x^3+2}+2x\right)^2}\left[\frac{d}{dx}\sqrt{x^3+2}+\frac{d}{dx}2x\right]$$
$$=-\frac{6}{\left(\sqrt{x^3+2}+2x\right)^2}\left[\frac{1}{2\sqrt{x^3+2}}\frac{d}{dx}(x^3+2)+2\right]$$
$$=-\frac{6}{\left(\sqrt{x^3+2}+2x\right)^2}\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}+2\right).$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)^2\ 5-5x\ \ 2\ (x^2+1)\ 2x}{\left[(x^2+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)\ \left[5x^2+5-20x^2\right]}{(x^2+1)^4}$$ ٤-

$$=\frac{-15x^2+5}{(x^2+1)^3}.\quad\square$$

تمارين (٤,٥)

في التمارين من (١) إلى (١٢) ، أوجد مشتقات الدوال

١- $f(x)=(x^3-3x+1)^3$

٢- $g(x)=(\sqrt{x}+1)^3(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1)$

٣- $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$

٤- $h(x)=(\sqrt[3]{x}+2x)^{\frac{3}{2}}$

٥- $f(x)=\left(\frac{2x^2+1}{5x+1}\right)^2$

٦- $\mathrm{y}(x)=2\sqrt{x+2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\sqrt[4]{3}$

٧- $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x}}}$

٨- $g(x)=\frac{3}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^3)}}$

٩- $f(x)=x(\sqrt[3]{x}+3)^4$

١٠- $f(t)=\left(\frac{5t^3+t}{5t^2+1}\right)^2+3x$

١١- $f(x)=\frac{\left(5x+\frac{1}{x}\right)^3}{5\sqrt{x^2+1}}$

١٢- $k(t)=\sqrt{(t+\frac{1}{t})^3(t^2+1)^4}$

١٣- إذا كانت $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$ ، أوجد $F'(0),\ F'(-1)$.

في التمارين من (١٤) إلى (١٦) ، أوجد مشتقات الدوال

١٤- $y(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+x^2}}$

١٥- $y(x)=(x^2-1)(x^2-4)^2(x^2-9)^3$

١٦- $y(x)=\left(1+(1+x^2)^2\right)^2$

١٧- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $h(x)=\sqrt{x^2+16}$ عند النقطة $x=3$.

١٨- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ عند النقطة $x=1$.

في التمارين من (١٩) إلى (٢١)، أوجد جميع النقاط على منحنى الدالة بحيث تكون $f'(x)=0$ أو غير موجودة

١٩- $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$

٢٠- $f(x)=x\sqrt[3]{(3x-20)^2}$

٢١- $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}$

(٥,٥) مشتقة الدوال المثلثية

Dirivative of Trigonometric Functions

نقوم في هذا القسم بدراسة مشتقات الدوال المثلثية والتي يمكن تلخيصها في النظرية التالية

نظرية (٥,٨)

١-	$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$	٢-	$\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$
٣-	$\frac{d}{dx}\tan(x)=\sec^2(x)$	٤-	$\frac{d}{dx}\cot(x)=-\csc^2(x)$
٥-	$\frac{d}{dx}\sec(x)=\sec(x)\tan(x)$	٦-	$\frac{d}{dx}\csc(x)=-\csc(x)\cot(x)$

البرهان

١- لتكن $f(x) = \sin(x)$ ، من التعريف الأولي للمشتقة نجد أن :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sin(x)\right] = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\left(\cos(h)-1\right)+\cos(x)\sin(h)}{h}\\
&= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\\
&= \sin(x)\ (0)+\cos(x)\ (1)\\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

٢- لتكن $f(x) = \cos(x)$ ، من التعريف الأولي للمشتقة نجد

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right] = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\left(\cos(h)-1\right)-\sin(x)\sin(h)}{h}\\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\\
&= \cos(x)\ (0)-\sin(x)\ (1)\\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

٣- لتكن $f(x) = \tan x$ ، باستخدام قاعدة مشتقة القسمة نجد أن :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

٥- لتكن $f(x)=\sec x$،

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x.$$

بالمثل يمكن برهان الفقرتين (٤) و (٦). □

وبشكل عام إذا كانت $y=u(x)$ ، فإننا نحصل على المشتقات التالية باستخدام قاعدة السلسلة.

$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\,\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\,\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\,\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\,\tan u\,\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\,\cot u\,\frac{du}{dx}$

مثال (٥,٢١)

أوجد مشتقة الدوال الآتية

١- $f(x)=(2\sin x+\sqrt{x})^3$

٢- $f(x)=\sqrt{1+\sin(2x+1)}$

٣- $f(x)=x^3\cos(2x^2+1)$

٤- $f(x)=\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)$

٥- $f(x)=\left[1+\sec^2(3x)\right]^4$

٦- $f(x)=x^3\sec(2x^2)$

الحل

١-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[(2\sin x+\sqrt{x})^3\right]=3(2\sin x+\sqrt{x})^2\frac{d}{dx}(2\sin x+\sqrt{x})$$

$$=3(2\sin x+\sqrt{x})^2\left(2\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

-٢

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin(2x+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin(2x+1)}}\frac{d}{dx}(1+\sin(2x+1)) \\ &= \frac{2\cos(2x+1)}{2\sqrt{1+\sin(2x+1)}} \\ &= \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{1+\sin(2x+1)}}. \end{aligned}$$

-٣

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)\frac{d}{dx}\cos(2x^2+1)+\cos(2x^2+1)\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= x^3(-\sin(2x^2+1))\frac{d}{dx}(2x^2+1)+\cos(2x^2+1)3x^2 \\ &= -4x^4\sin(2x^2+1)+3x^2\cos(2x^2+1). \end{aligned}$$

-٤

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \cos\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(1+\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

٥-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[1+\sec^2(3x)\right]^4=4\left[1+\sec^2(3x)\right]^3\frac{d}{dx}\left[1+\sec^2(3x)\right]$$
$$=4\left[1+\sec^2(3x)\right]^3\left[\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}\sec^2(3x)\right]$$
$$=4\left[1+\sec^2(3x)\right]^3\left[(0)+2\sec(3x)\frac{d}{dx}\left(\sec(3x)\right)\right]$$
$$=4\left[1+\sec^2(3x)\right]^3\left[(0)+2\sec(3x)(3\sec(3x)\tan(3x))\right]$$
$$=24\sec^2(3x)\tan(3x)\left[1+\sec^2(3x)\right]^3$$

٦-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^3\sec(2x^2)\right]=x^3\frac{d}{dx}\left[\sec(2x^2)\right]+\sec(2x^2)\frac{d}{dx}\left[x^3\right]$$
$$=x^3\sec(2x^2)\tan(2x^2)\frac{d}{dx}\left[2x^2\right]+3x^2\sec(2x^2)$$
$$=x^3\sec(2x^2)\tan(2x^2)\left[4x\right]+3x^2\sec(2x^2)$$
$$=4x^4\sec(2x^2)\tan(2x^2)+3x^2\sec(2x^2). \quad \square$$

مثال (٥,٢٢)

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=x-\sin(2x)$ عند $x=\frac{\pi}{2}$.

الحل

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x-\sin(2x)\right]=\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}\sin(2x)=1-2\cos(2x),$$

ويكون ميل المماس عند النقطة $x=\frac{\pi}{2}$ هو

$$m=f'(\frac{\pi}{2})=1-2\cos(\pi)=1-2(-1)=3$$

عندما $x=\frac{\pi}{2}$ ، فإن $y=f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-\sin(\pi)=\frac{\pi}{2}$. معادلة المماس الذي ميله $m=3$ عند النقطة $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ هي

$$(y-\frac{\pi}{2})=3(x-\frac{\pi}{2})$$

أو $y=3x-\pi$. □

مثال (٥,٢٣)

أوجد قيم x التي يكون عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x)=x-2\sin x$ أفقيا في الفترة $[-\pi,\pi]$.

الحل

نوجد مشتقة الدالة f: $f'(x)=1-2\cos x$. يكون المماس أفقياً عندما $f'(x)=0$ ، أي أن

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-2\cos x=0$$
$$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\cos^{-1}(\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}. \quad \square$$

مثال (٥,٢٤)

أوجد المشتقة الرابعة للدالة $f(x)=\sin(ax+b)$ ، حيث a, b ثوابت حقيقية.

الحل

$$f(x)=\sin(ax+b)$$
$$f^{(1)}(x)=a\cos(ax+b)$$
$$f^{(2)}(x)=-a^2\sin(ax+b)$$
$$f^{(3)}(x)=-a^3\cos(ax+b)$$
$$f^{(4)}(x)=a^4\sin(ax+b). \quad \square$$

تمارين (٥,٥)

في التمارين من (١) إلى (١٢) أوجد مشقة الدوال

١- $f(x)=\sin\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ ٢- $g(x)=(\sin x+1)\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)$

٣- $f(x)=(2x^2+1)\tan x$ ٤- $h(x)=x\tan x$

٥- $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ ٦- $y(x)=\cos^3 x$

٧- $f(x)=\cos x^3$ ٨- $g(x)=\cos 3x$

٩- $f(x)=(x+1)(\sqrt[3]{\sin x})$ ١٠- $f(t)=2\sin t\cos t$

١١- $f(x)=\tan\sqrt{x^2+1}$ ١٢- $k(t)=(t+\tan t)(4t^2+1)$

١٣- إذا كانت $F(x)=3\tan x-2\csc x$ ، أوجد $F'(0),\ F'(\frac{\pi}{3})$.

١٤- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=\sin(4x)$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{3}$.

١٥- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=x\sin(x)$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{2}$.

١٦- إذا كانت $f(x)=\sin(x)$ ، أوجد $f^{(70)}(x)$ ، $f^{(120)}(x)$.

(٥,٦) الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

تعاملنا في دراستنا السابقة مع دوال من الشكل $y=f(x)$ ، أي أن y معطاة كدالة صريحة في المتغير المستقل x ، على سبيل المثال $y=f(x)=x^2+3$. ولكن في بعض الأحيان قد يصعب وضع y كدالة صريحة في المتغير x ، بل تكون معرفتها ضمنياً كدالة في x على الصورة $f(x,y)=0$ ، على سبيل المثال $f(x,y)=y-\cos(x+y)=0$.
للحصول على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ نجري عملية الاشتقاق للمعادلة $f(x,y)=0$ باعتبار y دالة في x. فتكون مشتقة x هي 1 و مشتقة y هي y'.

مثال (٥,٢٥)

أوجد y' إذا كان

١- $x^2+4y^2=1$ ٢- $x^3y-8\sqrt{x}=x^2y$

٣- $3\cos(y)-y^2=6$ ٤- $\sqrt{x+y}-4x^2=y$

الحل

١- باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ x نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+4y^3\right)=\frac{d}{dx}(1) \qquad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(4y^3\right)=0$$

$$\Rightarrow 2x+12y^{3-1}y'=0$$

$$\Rightarrow 2x+12y^2y'=0$$

$$\Rightarrow 12y^2y'=-2x$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x}{6y^2}.$$

٢- باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ x نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y-8\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}(x^2y)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^3y\right)-\frac{d}{dx}\left(8\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}(x^2y)$$

$$\Rightarrow x^3\frac{d}{dx}[y]+y\frac{d}{dx}(x^3)-8\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=x^2\frac{d}{dx}[y]+y\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\Rightarrow x^3y'+3x^2y-8(\frac{1}{2\sqrt{x}})=x^2y'+2xy$$

$$\Rightarrow x^3y'+3x^2y-\frac{4}{\sqrt{x}}=x^2y'+2xy$$

$$\Rightarrow y'\left(x^3-x^2\right)=2xy+\frac{4}{\sqrt{x}}-3x^2y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2xy+\frac{4}{\sqrt{x}}-3x^2y}{\left(x^3-x^2\right)}, \quad x^3\neq x^2.$$

٣- باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ x نجد أن

$$\left(3\cos(y)-y^{2}\right)'=(6x)'$$
$$\Rightarrow\quad -3\sin y\ y'-2y\ y'=6$$
$$\Rightarrow\quad y'\left(-3\sin y-2y\right)=6$$
$$\Rightarrow\quad y'=\frac{-6}{\left(3\sin y+2y\right)}.$$

٤- باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\left(\sqrt{x+y}-4x^{2}\right)'=y'\qquad\Rightarrow\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\left(x+y\right)'-8x=y'$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\left[1+y'\right]-8x=y'$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}}y'-8x=y'$$
$$\Rightarrow\ y'\left[\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-1\right]=\left[8x-\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right]$$
$$\Rightarrow\ y'=\frac{\left[8x-\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right]}{\left[\frac{1}{2\sqrt{x+y}}-1\right]}$$
$$\Rightarrow\ =\frac{16x\sqrt{x+y}-1}{1-2\sqrt{x+y}}.\qquad\square$$

مثال (٥,٢٦)

أوجد ميل المماس للمنحنى $y^{2}-2xy=-4$ عند النقطة $(-2,2)$.

الحل

١- باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\left(y^2-2xy\right)'=(-4)' \quad\Rightarrow\quad 2yy'-2(xy'+y)=0$$
$$\Rightarrow 2yy'-2xy'-2y)=0$$
$$\Rightarrow y'\left(2y-2x\right)=2y$$
$$\Rightarrow\ y'=\frac{y}{y-x},\quad y\neq x.$$

ويكون الميل

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-2,2)}=\frac{2}{2\text{-}(\text{-}2)}=\frac{1}{2}. \qquad \square$$

مثال (٥,٢٧)

أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^2y^2=4x$ عند النقطة $(1,2)$

الحل

١- لإيجاد الميل نحسب y'

$$\left(x^2y^2\right)'=(4x)'\Rightarrow 2x^2yy'+2xy^2=4$$
$$\Rightarrow 2x^2yy'=4-2xy^2$$
$$\Rightarrow y'=\frac{2-xy^2}{x^2y}$$

ميل المماس هو قيمة المشتقة عند النقطة $(1,2)$ أي أن

$$m=y'|_{(1,2)}=-1$$

إذا معادلة المماس هي $(y-2)=-1(x-1)$ أو $y=3-x$. $\square$

تمارين (٥,٦)

في التمارين (١) إلى (٦) أوجد y'

١- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

٢- $x^3+y^3-3axy=0$

٣- $\cos(xy=x$

٤- $\sin(xy++\cos(xy)=\tan(x+y)$

٥- $y=\cos(x+y)$

٦- $\sin(xy++\cos(xy)=\tan(x+y)$

(٥,٧) مشتقات الدوال المثلثية العكسية

Derivatives of Inverse Trigonometric Functions

نعلم من دراستنا للاشتقاق والاتصال أنه إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة وتزايدية فعلاً (تناقصية فعلاً) فإن دالتها العكسية تكون كذلك متصلة وتزايدية فعلاً (تناقصية فعلاً). النظرية الآتية تعين قاعدة لاشتقاق الدالة العكسية، سنذكرها دون التعرض للبرهان.

نظرية (٥,٩)

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تزايدية فعلاً (تناقصية فعلاً) وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)، فإن دالتها العكسية $x = f^{-1}(y)$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق على الفترة $(f(a), f(b))$ $\big((f(b), f(a))\big)$ ويكون:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{\left[f(x)\right]'}; \qquad f'(x) \neq 0$$

من النظرية السابقة نستنتج أنه إذا كانت $y = f(x)$ هي الدالة الأساسية وكانت دالتها العكسية $x = f^{-1}(y)$ فإن

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

أي أن مشتقة الدالة العكسية هي مقلوب مشتقة الدالة الأصلية.

مثال (٥,٢٨)

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = f(x) = 2x + 1$، ثم أوجد مشتقة الدالة العكسية.

الحل

من دراستنا السابقة نجد الدالة العكسية هي:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-1)$$

وتكون مشتقة الدالة العكسية هي :

$$\frac{dx}{dy} = \left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(2x+1)'} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

مثال (٥,٢٩)

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1$ أوجد $\left(f^{-1}(7)\right)'$.

الحل

لاحظ أن $y = 7$ إذاً

$$x^3 - 1 = 7 \ \Rightarrow \ x^3 = 8 \ \Rightarrow \ x = 2$$

وكذلك $f'(x) = 3x^2$ وبالتالي فإن مشتقة الدالة العكسية هي :

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2}$$

ويكون

$$\left[f^{-1}(7)\right]' = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12}. \quad \square$$

نظرية (٥,١٠) مشتقات الدوال المثلثية العكسية

١- $\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$

٢- $\left(\cos^{-1} x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$

٣- $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

٤- $\left(\cot^{-1} x\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

٥- $\left(\sec^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1$

٦- $\left(\csc^{-1} x\right)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1$

البرهان

١- لتكن $y = \sin^{-1}(x)$ هي الدالة العكسية، فتكون $x = \sin y$ هي الدالة الأصلية، حسب النظرية (٥,٩) نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y}$$

بما أن $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ فإن $\cos y \geq 0$ و عليه نجد أن :

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} \quad \forall \quad -1 < x < 1$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢- لتكن $y = \cos^{-1}(x)$ هي الدالة العكسية، فتكون $x = \cos y$ هي الدالة الأصلية، ويكون

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\cos y)} = -\frac{1}{\sin y}$$

بما أن $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ فإن $\sin y \geq 0$ وعليه نجد أن:

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} \quad \forall \quad -1 < x < 1$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1$$

٣- لتكن $y=\tan^{-1}(x)$ هي الدالة العكسية، فتكون $x=\tan^{-1}y$ هي الدالة الأصلية، ويكون

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{\frac{d}{dy}\left(\tan y\right)}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}.$$

يمكن إثبات الفقرات ٤ ، ٥ ، ٦ بنفس الطريقة. □

الأمثلة الآتية توضح طريقة اشتقاق الدوال المثلثية العكسية.

مثال (٥,٣٠)

أوجد مشتقة الدوال التالية

١- $f(x)=2\tan^{-1}(x)$

٢- $h(x)=\sin(x^{-1})+(\sin x)^{-1}+\sin^{-1}x$

٣- $g(x)=(\sin^{-1}x)^{-1}+(\cot^{-1}x)^{-1}$

٤- $k(x)=x\cot^{-1}(x)$

الحل

١-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[2\tan^{-1}(x)\right]=2\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(x)\right)=\frac{2}{1+x^2}.$$

٢-

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sin(x^{-1}) + (\sin x)^{-1} + \sin^{-1} x\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\sin(x^{-1})\right] + \frac{d}{dx}\left[(\sin x)^{-1}\right] + \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1} x\right] \\ &= \cos(x^{-1})\frac{d}{dx}(x^{-1}) - (\sin x)^{-2}\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1} x\right] \\ &= -\frac{\cos(x^{-1})}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

٣-

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(\sin^{-1} x)^{-1} + (\cot^{-1} x)^{-1}\right] \\ &= -(\sin^{-1} x)^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - (\cot^{-1} x)^{-2}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{(\sin^{-1} x)^2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{(1+x^2)(\cot^{-1} x)^2}. \end{aligned}$$

٤-

$$k'(x) = \frac{d}{dx}\left[x \cot^{-1}(x)\right] = x\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}(x)\right) + \cot^{-1}(x)\frac{d}{dx}x$$

$$= x\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) + \cot^{-1}(x)(1) = -\frac{x}{1+x^2} + \cot^{-1}(x). \quad \square$$

عموما، إذا كانت $y = u(x)$ فإن:

$\left(\sin^{-1} u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	$\left(\cos^{-1} u\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
$\left(\tan^{-1} u\right)' = \frac{1}{1+u^2}u'$	$\left(\cot^{-1} u\right)' = \frac{-1}{1+u^2}u'$
$\left(\sec^{-1} u\right)' = \frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}u'$	$\left(\csc^{-1} u\right)' = \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}u'$

مثال (٥,٣١)

أوجد مشتقة الدوال الآتية

١- $f(x)=\tan^{-1}(2x)$ ٢- $h(x)=\sqrt{1+\tan^{-1}x}$

٣- $f(x)=\sin^{-1}(3x)$ ٤- $f(x)=\cot^{-1}(\sqrt{x})$

الحل

١-

$$f'(x)=\left[\tan^{-1}(2x)\right]'=\frac{1}{1+(2x)^2}\frac{d}{dx}(2x)=\frac{2}{1+4x^2}.$$

٢-

$$h'(x)=\left(\sqrt{1+\tan^{-1}x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\tan^{-1}x}}\frac{d}{dx}\left(1+\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{2\sqrt{1+\tan^{-1}x}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

٣-

$$f'(x)=\left[\sin^{-1}(3x)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\frac{d}{dx}(3x)=\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}.$$

٤-

$$f'(x)=\left[\cot^{-1}(\sqrt{x})\right]'=-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}. \quad \square$$

مثال (٥,٣٢)

أوجد مشتقة الدوال الآتية

١- $f(x)=2\tan^{-1}(x^3)$ ٢- $h(x)=\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+x\right)^3$

٣- $g(x)=(\sin^{-1}x)^3+(\tan^3 x)^{-1}$ ٤- $k(x)=3\sec^{-1}(\sqrt{x})$

الحل

-١

$$f'(x)=\left[2\tan^{-1}(x^3)\right]'=\frac{2}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=\frac{6x^2}{1+x^6}.$$

-٢

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\left[\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)^3\right]'\\
&=3\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)^2\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)\\
&=3\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{d}{dx}\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]\\
&=3\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\frac{d}{dx}(2+\tan^{-1}x)+\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]\\
&=3\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}+\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right].
\end{aligned}$$

-٣

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\left[(\sin^{-1}x)^3+(\tan^3x)^{-1}\right]'=\left[(\sin^{-1}x)^3\right]'+\left[(\tan^3x)^{-1}\right]'\\
&=3(\sin^{-1}x)^2\left[(\sin^{-1}x)\right]'-(\tan^3x)^{-2}\left[(\tan^3x)\right]'\\
&=3(\sin^{-1}x)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)-(\tan^3x)^{-2}\left(3\tan^2x\right)\left[(\tan x)\right]'\\
&=\frac{3(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3\sec^2x}{(\tan^4x)}.
\end{aligned}$$

٤-

$$k'(x)=\left[3\sec^{-1}(\sqrt{x})\right]'=\frac{3}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{3}{2x\sqrt{1-x}}. \qquad \square$$

تمارين (٥,٧)

في التمارين من (١) إلى (١٢) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

١- $f(x)=\sin^{-1}(2x)$

٢- $g(x)=(\sin^{-1}x+1)^3$

٣- $f(x)=x^3\tan^{-1}x$

٤- $h(x)=x^5+\sec^{-1}x$

٥- $f(x)=\dfrac{x^2}{\cot^{-1}x}$

٦- $\mathrm{y}(x)=\sin^{-1}(\sin x)$

٧- $f(x)=\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

٨- $g(x)=\tan^{-1}(\cos 3x)$

٩- $f(x)=(x+1)(\sqrt[3]{\sin^{-1}x})$

١٠- $f(t)=2t\cos^{-1}t$

١١- $f(x)=\tan^{-1}(\sqrt{x^2+1})$

١٢- $k(t)=\left(\sec^{-1}x\right)^2$