الفصل السادس

الدوال الأسية واللوغاريتمية ومشتقاتها

EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES

(٦,١) الدالة الأسية

Exponential Functions

نقوم في هذا القسم بتعريف الدالة الأسية ونذكر خواص الدوال الأسية.

تعريف (٦,١)

الدالة الأسية تأخذ الصورة $f(x) = a^x$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$. ومجال تعريف الدالة هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ومداها $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ ، أي أن،

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

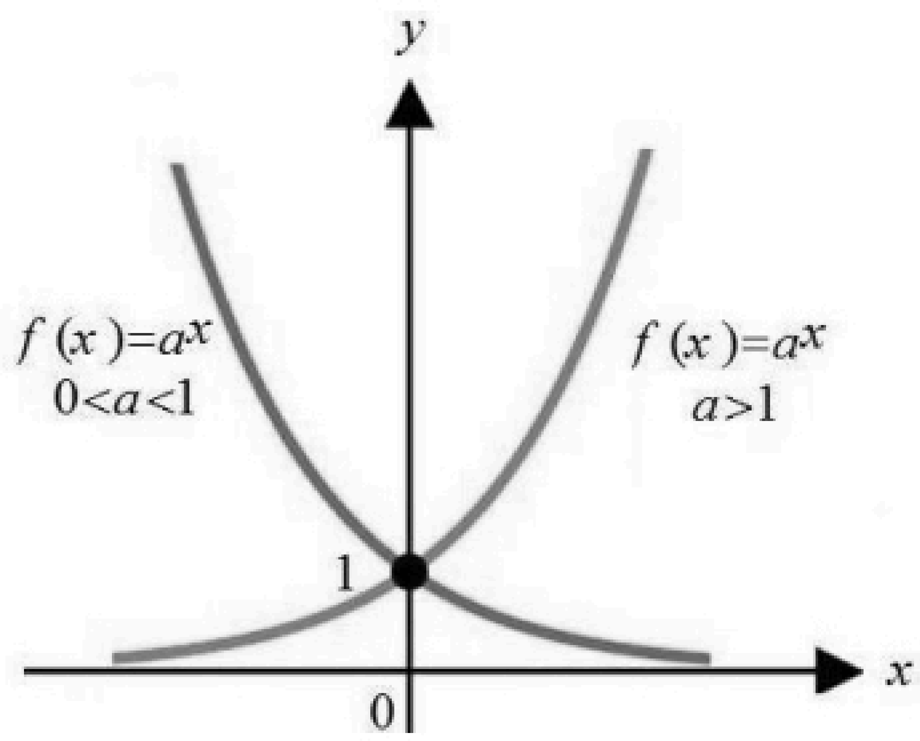
لرسم الدالة $f(x) = a^x$ ، نأخذ بعين الاعتبار قيمة a فيكون لدينا حالتين

الحالة الأولى

إذا كانت $a > 1$ ، فإن الدالة $f(x) = a^x$ تزايدية فعلا على $\mathbb{R}$ وهي دالة أحادية كما هو مبين في الشكل (٦,١).

الحالة الثانية

إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن الدالة تناقصية فعلا على $\mathbb{R}$ وهي دالة أحادية كما هو مبين في الشكل (٦,١).



الشكل (٦,١).

نظرية (٦,١) خواص الدالة الأسية

إذا كان $a,\ b>0$ و $x,\ y\in\mathbb{R}$ فإن:

١- $a^x a^y = a^{x+y}$

٢- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

٣- $(a\ b)^x = a^x b^x$

٤- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

٥- لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $a^n = \underbrace{(a)(a)\cdots(a)}_{n-\text{time}}$

٦- إذا كان $a>1$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty,$$

إذا كان $0<a<1$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 0,$$

باستخدام هذه الخواص سوف نقوم بحساب النهايات في المثال التالي.

مثال (٦,١)

أوجد النهايات التالية

١- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{-x}-1\right)$

٢- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{1/x}$

٣- $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{1/x}$

الحل

-١

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(3^{-x}-1\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(3^{-x}\right)-\lim_{x\to\infty}(1)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3^{x}}\right)-\lim_{x\to\infty}(1)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\lim_{x\to\infty}(1)\\ &= 0-1=-1.\end{aligned}$$

٢- بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ إذن $\lim_{x\to-\infty}3^{1/x}=3^{0}=1$.

٣- بما أن $\lim_{x\to0^{-}}\frac{1}{x}=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^{-}}2^{1/x}=0$. □

مثال (٦,٢)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $2^{3x-2}=8$

الحل

$$\begin{aligned}2^{3x-2}=8 \quad &\Rightarrow \quad 2^{3x-2}=2^{3}\\ &\Rightarrow \quad 3x-2=3\\ &\Rightarrow \quad 3x=5\\ &\Rightarrow \quad x=\frac{5}{3}. \quad \square\end{aligned}$$

(٦,٢) الدالة اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

وجدنا من دراستنا للدالة الأسية $f(x)=a^{x}$ أنها دالة أحادية وبذلك يكون لها دالة عكسية. الدالة العكسية للدالة الأسية تسمى الدالة اللوغاريتمية ويرمز لها

بالرمز $f^{-1}(x)=\log_a x$ حيث $a>0$ ، $a\neq 1$ ويكون مجال تعريف الدالة اللوغاريتمية هو $\mathbb{R}^+$ ومداها هو $\mathbb{R}$ ، أي أن :

$$\log_a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$

يسمى العدد a أساس اللوغاريتم.

من خواص الدالة العكسية نجد أن :

$$1-\qquad y=\log_a x\quad\Leftrightarrow\quad x=a^y$$

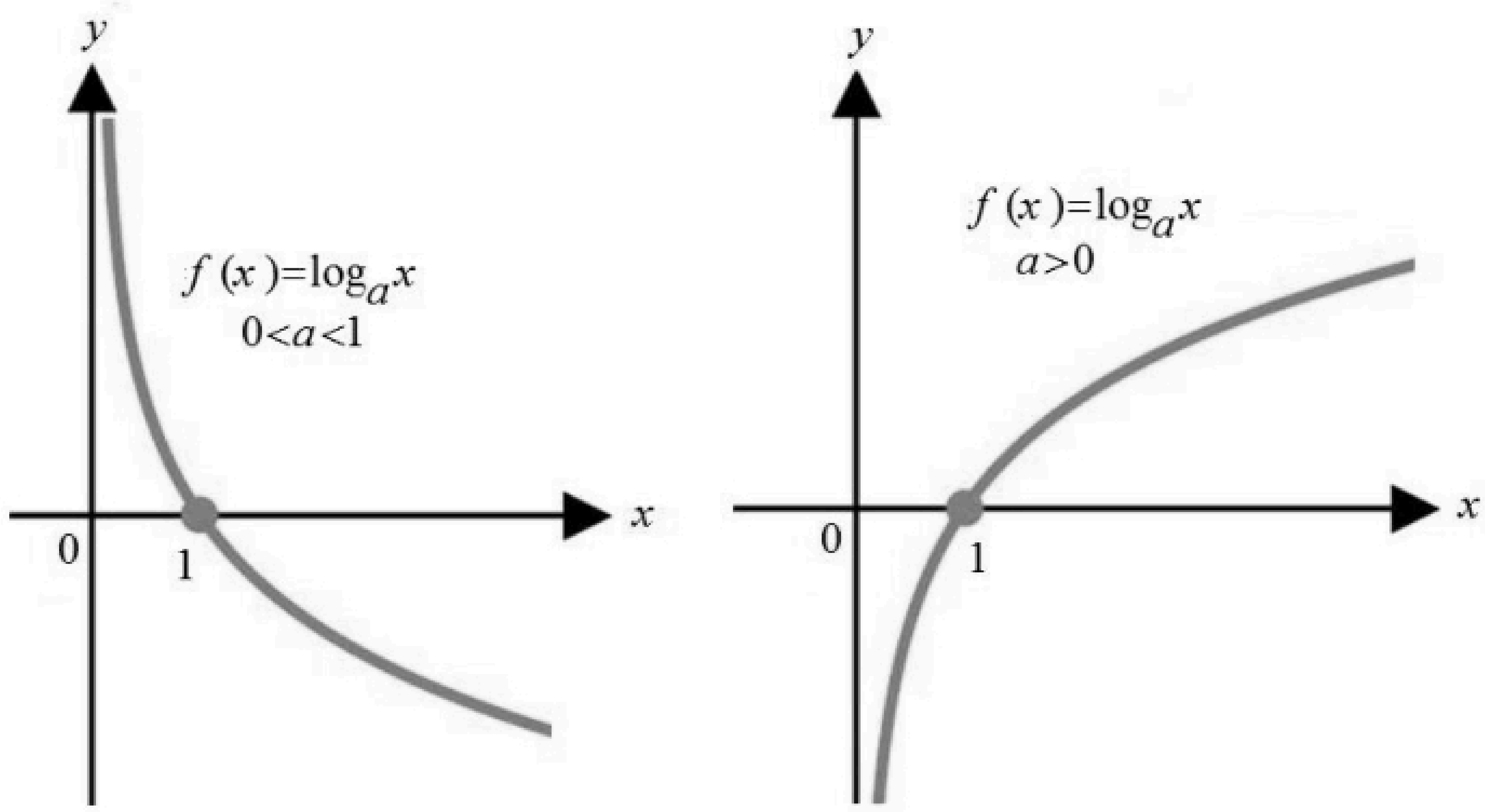
$$2-\qquad \log_a\left(a^x\right)=x\quad\forall\ x\in\mathbb{R},$$

$$3-\qquad a^{\log_a x}=x\qquad\forall\ x>0.$$

لرسم منحنى الدالة اللوغاريتمية يمكن الاستفادة من المعلومات التالية :

١- منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1,0)$ وذلك لأن $a^0=1$ وبالتالي $\log_a(1)=0$

٢- تكون الدالة متزايدة إذا كان $a>1$ وتكون تناقصية إذا كان $0<a<1$ ، كما هو موضح في الشكل (٦,٢).



الشكل (٦,٢).

نظرية (٦,٢) خواص الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $a>0$ و $a\neq 1$ و $x,y>0$ فإن:

١- $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ ٢- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

٣- $\log_a\left(x^y\right)=y\log_a x$ ٤- $\log_a a=1$

٥- $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ ٦- $(\log_b a)(\log_a b)=1$

٦- إذا كان $a>1$ فإن

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty,$$

إذا كان $0<a<1$ فإن

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty,$$

ملاحظة

إذا كانت $a=10$ فإننا نكتب: $\log_{10}x\equiv\log x$.

مثال (٦,٣)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\log(x+3)+\log x=1$.

الحل

$$\log(x+3)+\log x=1 \quad\Rightarrow\quad \log\left[(x+3)x\right]=1$$

وبما أن $1=\log 10$ ، إذاً

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad \log\left[(x+3)x\right]=\log 10\\
&\Rightarrow\quad (x+3)x=10\\
&\Rightarrow\quad x^2+3x-10=0\\
&\Rightarrow\quad (x+5)(x-2)=0\\
&\Rightarrow\quad x=-5,\ \ x=2.
\end{aligned}$$

وحيث إن الدالة $\log x$ معرفة فقط لجميع قيم $x > 0$. إذن $x = -5$ لا تقع في مجال حل المعادلة و يكون الحل هو $x = 2$. □

مثال (٦,٤)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\log(x-15) = 2 - \log x$.

الحل

$$\begin{aligned}
\log(x-15) = 2-\log x \quad &\Rightarrow \quad \log(x-15)+\log x = 2\log 10\\
&\Rightarrow \quad \log\left[(x-15)x\right] = \log 10^2\\
&\Rightarrow \quad (x-15)x = 10^2\\
&\Rightarrow \quad x^2-15x-100=0\\
&\Rightarrow \quad (x+5)(x-20)=0\\
&\Rightarrow \quad x=-5,\ \ x=20,
\end{aligned}$$

وبما أن $x > 0$ فالإجابة المسموح بها هي $x = 20$.

مثال (٦,٥)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\log(x^2) = (\log x)^2$.

الحل

$$\begin{aligned}
\log(x^2) = (\log x)^2 \quad &\Rightarrow \quad 2\log x - (\log x)^2 = 0\\
&\Rightarrow \quad \log x\,(2-\log x) = 0\\
&\Rightarrow \quad \log x = 0, \qquad \log x = 2\\
&\Rightarrow \quad \log x = \log 1, \qquad \log x = \log 10^2\\
&\Rightarrow \quad x = 1, \qquad x = 100. \qquad \square
\end{aligned}$$

(٦,٣) العدد e واللوغاريتم الطبيعي

The e Number and the Natural Logarithm

تعرفنا في القسم السابق على الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$ حيث $a > 0$، $a \neq 1$. إذا كان $a = e$ حيث e الأساس الطبيعي المعرف كما يلي:

تعريف (٦,٢)

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

قيمة e تساوي تقريباً $e\approx 2.71828169$ ، انظر الجدول (٦,١)

الجدول (٦,١).

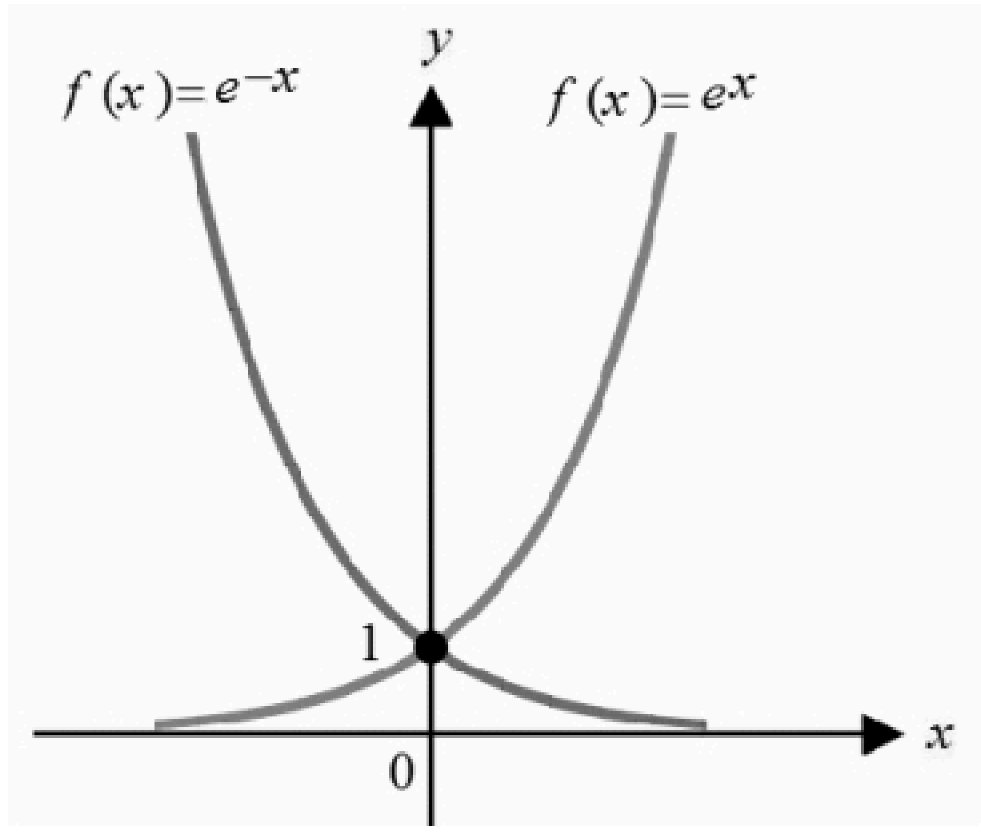
x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481384
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71828047
0.000001	2.71828169
$\downarrow$	$\downarrow$
0	e

(٦,٣,١) الدالة الأسية للأساس الطبيعي e

تعريف (٦,٣)

الدالة $f(x)=e^{x}$ تعرف الدالة الأسية للأساس e لكل $x\in\mathbb{R}$.

بيان منحى الدالتين $f(x)=e^{x}$ ، $f(x)=e^{-x}$ موضح في الشكل (٦,٣)



الشكل (٦,٣)

نظرية (٦,٣) خواص الدالة الأسية

إذا كان x, y أعداداً حقيقية و t عدداً نسبياً فإن:

١- $\dfrac{e^t}{e^y}=e^{t-y}$ ٢- $e^t\, e^y=e^{t+y}$

٣- $e^0=1$ ٤- $\left(e^t\right)^y=e^{ty}$

٥- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty,$

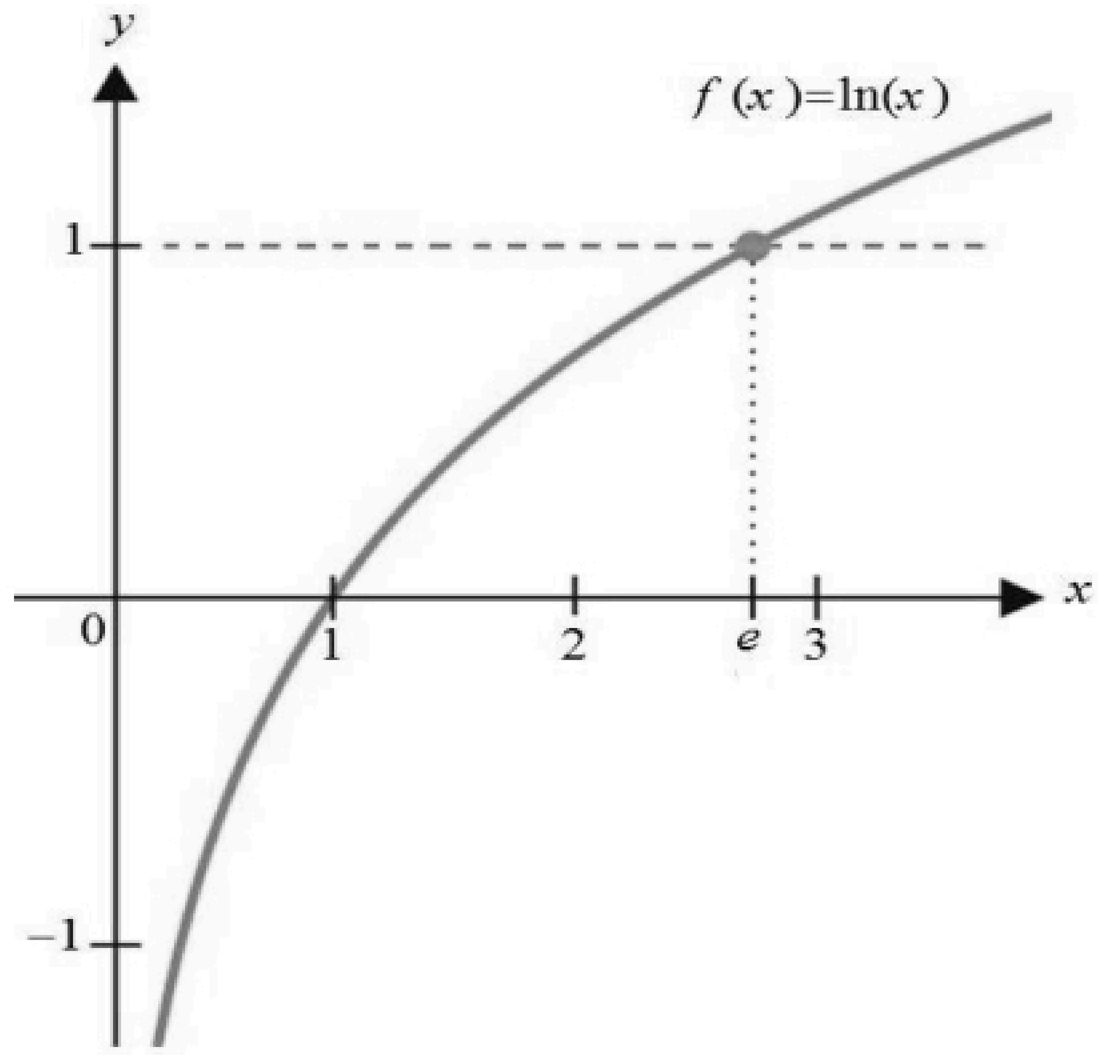
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0,$

(٦,٣,٢) الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e

الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e تسمى اللوغاريتم الطبيعي ويرمز لها بالرمز

$$f(x)=\log_e x \equiv \ln x, \quad x>0, \qquad y=\ln x \quad \Leftrightarrow \quad x=e^y$$

يمثل الشكل (٦,٤) بيان الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e.



الشكل (٦,٤).

بوضع $a=e$ في خواص الدالة اللوغاريتمية، يمكن كتابة خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية كما يلي:

نظرية (٦,٤) خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

لكل $x,\ y>0$ فإن:

١- $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ ٢- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

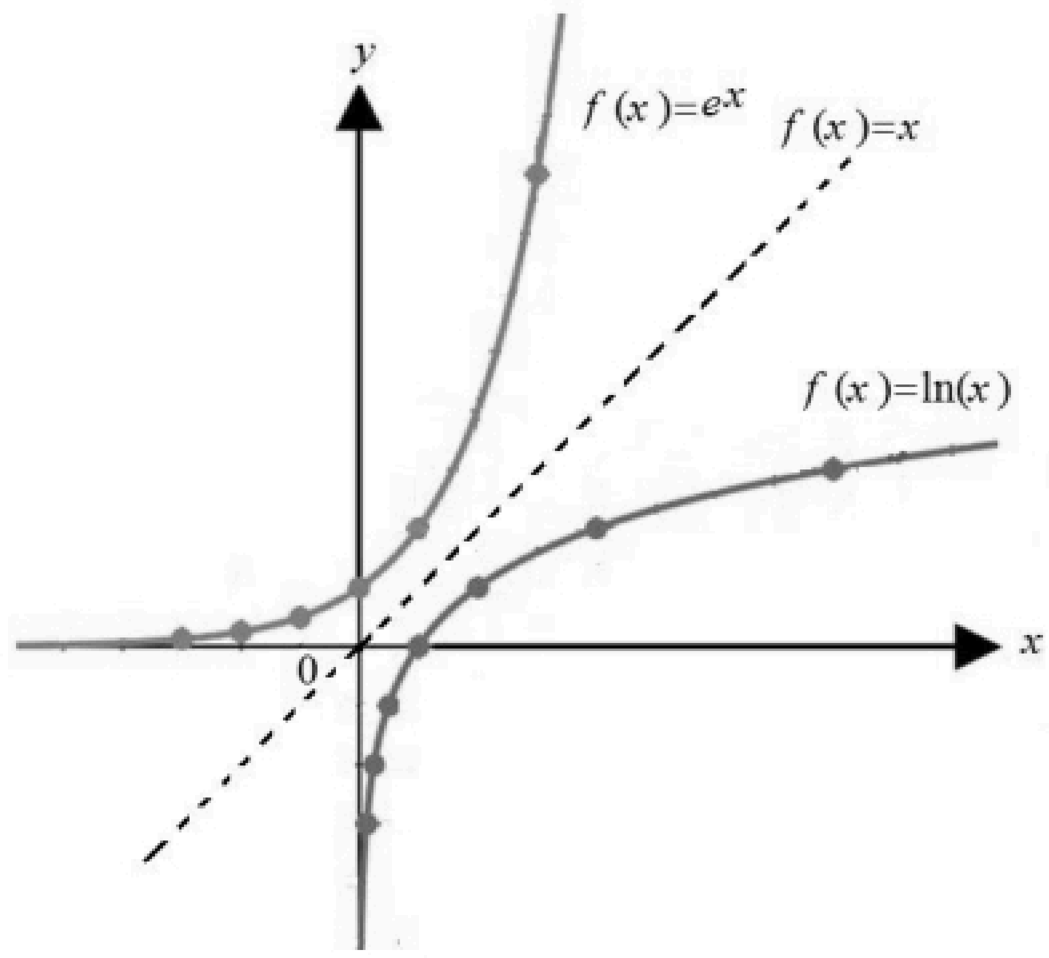
٣- $\ln\left(x^{y}\right)=y\ln x$ ٤- $\ln e=1$

٥- $\log_b x=\dfrac{\ln x}{\ln b}$ ٦- $\ln(1)=0$

٧- $\ln e^{x}=x\ln e=x,\ \ x\in\mathbb{R}$ ٨- $e^{\ln(x)}=x,\quad x>0$

٩- $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln(x)=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$

بيان منحنى الدالة الأسية $f(x)=e^{x}$ ودالتها العكسية $f(x)=\ln(x)$ موضح في الشكل (٦,٥).



الشكل (٦,٥).

تمارين (٦,٣)

في التمارين من (١) إلى (١٣) أوجد قيم x

١- $4^{x-3}=8$

٢- $27^{x+1}=9$

٣- $4^{4x+1}=4^{2x-2}$

٤- $5^{x^2-5}=5^{2x+2}$

٤- $3^{x^2}=9^{x+4}$

٥- $(2x-1)^5=-32$

٦- $\log_3 x=2$

٧- $\log_8 x=\dfrac{2}{3}$

٨- $\log(5+x)=2\log 3$

٩- $\ln(x+8)-\ln x=3\ln 2$

١٠- $\ln x+\ln(x+2)=\dfrac{1}{2}\ln 9$

١١- $\ln x+\ln 4=1$

١٢- $\ln(\ln x)=1$

١٣- $3^{\log x}=3x$

(٦,٤) مشتقات الدوال اللوغاريتمية والأسية

Derivatives of Logarithmic and Exponential Functions

نظرية (٦,٥)

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية $f(x)=\ln(x)$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,\infty)$ ومشتقتها تعطى بالعلاقة

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right)=\frac{1}{x},\quad 0<x<\infty.$$

عموما ، إذا كانت $y=u(x)$ فإن :

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left[u(x)\right]\right)=\frac{1}{u(x)}u'(x),\quad u(x)>0$$

مثال (٦,٦)

أوجد مشتقة الدوال الآتية

١- $f(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}$ ٢- $f(x)=x^3\ln(x)$

٣- $f(x)=\left(\ln(x^3+3x)\right)^3$ ٤- $f(x)=\ln(\sec x)$

الحل

١-

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\ln(x)+\frac{1}{x}\right]\\ &=\frac{d}{dx}\ln(x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

٢-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^3 \ln(x)\right] \\ &= \left(x^3\right)\frac{d}{dx}\ln(x) + \ln(x)\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= \left(x^3\right)\left(\frac{1}{x}\right) + (3x^2)\ln(x) \\ &= x^2 + 3x^2\ln(x). \end{aligned}$$

٣-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\left(\ln(x^3+3x)\right)^3\right] \\ &= 3\left(\ln(x^3+3x)\right)^2 \frac{d}{dx}\left[\ln(x^3+3x)\right] \\ &= 3\left(\ln(x^3+3x)\right)^2 \frac{1}{(x^3+3x)}\frac{d}{dx}(x^3+3x) \\ &= \frac{3\left(\ln(x^3+3x)\right)^2(3x^2+3)}{(x^3+3x)}. \end{aligned}$$

٤-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\ln(\sec x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sec x}\right)\frac{d}{dx}(\sec x) \\ &= \left(\frac{1}{\sec x}\right)(\sec x \tan x) \\ &= \tan x. \quad \square \end{aligned}$$

مثال (٦,٧)

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \ln(|x|)$.

الحل

إذا كانت $x > 0$ فإن $f(x) = \ln(x)$ ويكون $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، أما إذا كانت $x < 0$
فإن $f(x) = \ln(-x)$ و يكون

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\ln(-x)\right]=\frac{1}{-x}\frac{d}{dx}[-x]=\frac{1}{-x}[-1]=\frac{1}{x}$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|x|\right]=\frac{1}{x}$$

عموماً إذا كانت $y=u(x)$ فإن :

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|u(x)|)\right]=\frac{1}{u(x)}\;u'(x)\qquad u(x)\neq 0$$

مثال (٦,٨)

أوجد مشتقة الدالة $f(x)=\ln(|\sin x|)$

الحل

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\ln(|\sin x|)\right]\\&=\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{d}{dx}(\sin x)\\&=\frac{\cos x}{\sin x}=\tan x.\qquad\square\end{aligned}$$

نظرية (٦,٦)

مشتقة الدالة $f(x)=e^x$ تعطي بالعلاقة :

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

البرهان

حيث إن الدالة الأسية $y=e^x$ هي معكوس الدالة $x=\ln y$ ، فإن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\;\Rightarrow\;\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\ln y)}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x.\qquad\square$$

عموماً إذا كانت $y = u(x)$ فإن :

$$\left[e^{u(x)}\right]' = e^{u(x)}\ \left[u(x)\right]'$$

مثال (٦,٩)

أوجد مشتقة الدوال

١- $f(x) = 3x + e^x$

٢- $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{e^x}$

٣- $f(x) = xe^{-x^2}$

٤- $f(x) = e^x + x^e$

الحل

١-
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[3x + e^x\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[3x\right] + \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = 3 + e^x .$$

٢-
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x}{2} + \frac{1}{e^x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[e^x\right] + \frac{d}{dx}\left[e^{-x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^x + e^{-x}\frac{d}{dx}\left[-x\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^x - e^{-x} .$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[xe^{-x^2}\right]=x\,\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right]+e^{-x^2}\,\frac{d}{dx}[x]$$
$$=xe^{-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[-x^2\right]+e^{-x^2}(1)$$

-٣
$$=xe^{-x^2}(-2x)+e^{-x^2}$$
$$=-2x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}$$
$$=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right).$$

-٤
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[e^x+x^e\right]$$
$$=e^x+ex^{e-1}.\qquad\square$$

نظرية (٦,٧)

مشتقة الدالة الأسية تعطي بالعلاقة :

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\ \ln a,\qquad a>0.$$

البرهان

إذا كانت $y=f(x)=a^x$ ، فإن $y=a^x=e^{\ln(a^x)}=e^{x\ln(a)}$ ويكون

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x\ln(a)}\right)$$
$$=e^{x\ln(a)}\,\frac{d}{dx}\left(x\ \ln(a)\right)$$
$$=e^{x\ln(a)}\,\ln(a)\frac{d}{dx}(x)$$
$$=e^{x\ln(a)}\,\ln(a)=a^x\ \ln a.\qquad\square$$

عموماً إذا كان $y=u(x)$ فإن :

$$\frac{d}{dx}\left[a^{u(x)}\right]=a^{u(x)}\ \ln a\ u'(x),\qquad a>0,\quad a\neq 1.$$

مثال (٦,١٠)

أوجد مشتقة الدوال

١- $f(x)=x^2+2^x$ ٢- $f(x)=2^{x^2}+3^{\ln(x-1)}$

٣- $f(t)=\pi^{t^3}$ ٤- $f(x)=5^{\tan x}$

الحل

١-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^2+2^x\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[x^2\right]+\frac{d}{dx}\left[2^x\right] \\ &= 2x+2^x \ln 2. \end{aligned}$$

٢-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[2^{x^2}+3^{\ln(x-1)}\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[2^{x^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[3^{\ln(x-1)}\right] \\ &= 2^{x^2}\ln(2)\frac{d}{dx}\left[x^2\right]+3^{\ln(x-1)}\ln(3)\frac{d}{dx}\left[\ln(x-1)\right] \\ &= 2^{x^2}(2x)\ln(2)+3^{\ln(x-1)}\ln(3)\left(\frac{1}{(x-1)}\right)\frac{d}{dx}\left[(x-1)\right] \\ &= 2^{x^2}(2x)\ln(2)+3^{\ln(x-1)}\ln(3)\left(\frac{1}{(x-1)}\right)(1) \\ &= (2x)2^{x^2}\ln(2)+\frac{3^{\ln(x-1)}\ln(3)}{(x-1)}. \end{aligned}$$

٣-
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\pi^{t^3}\right] \\ &= \pi^{t^3}\ln(\pi)\frac{d}{dt}\left[t^3\right] \\ &= 3t^2\pi^{t^3}\ln(\pi). \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[5^{\tan x}\right]$$

$$= 5^{\tan x}\ \ln(5)\frac{d}{dx}\left[\tan x\right] \qquad -٤$$

$$= \sec^2 x\ \ 5^{\tan x}\ \ln(5). \quad \square$$

مثال (٦,١١)

أوجد $f'(1)$ حيث $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

الحل

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2\frac{d}{dx}(\ln x)-\ln x\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-(2x)\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{(1-2\ln x)}{x^3},$$

$$\Rightarrow \quad f'(1)=\frac{(1-2\ln 1)}{1^3}=1. \quad \square$$

مثال (٦,١٢)

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \ln(x)$ عند النقطة $(e,1)$.

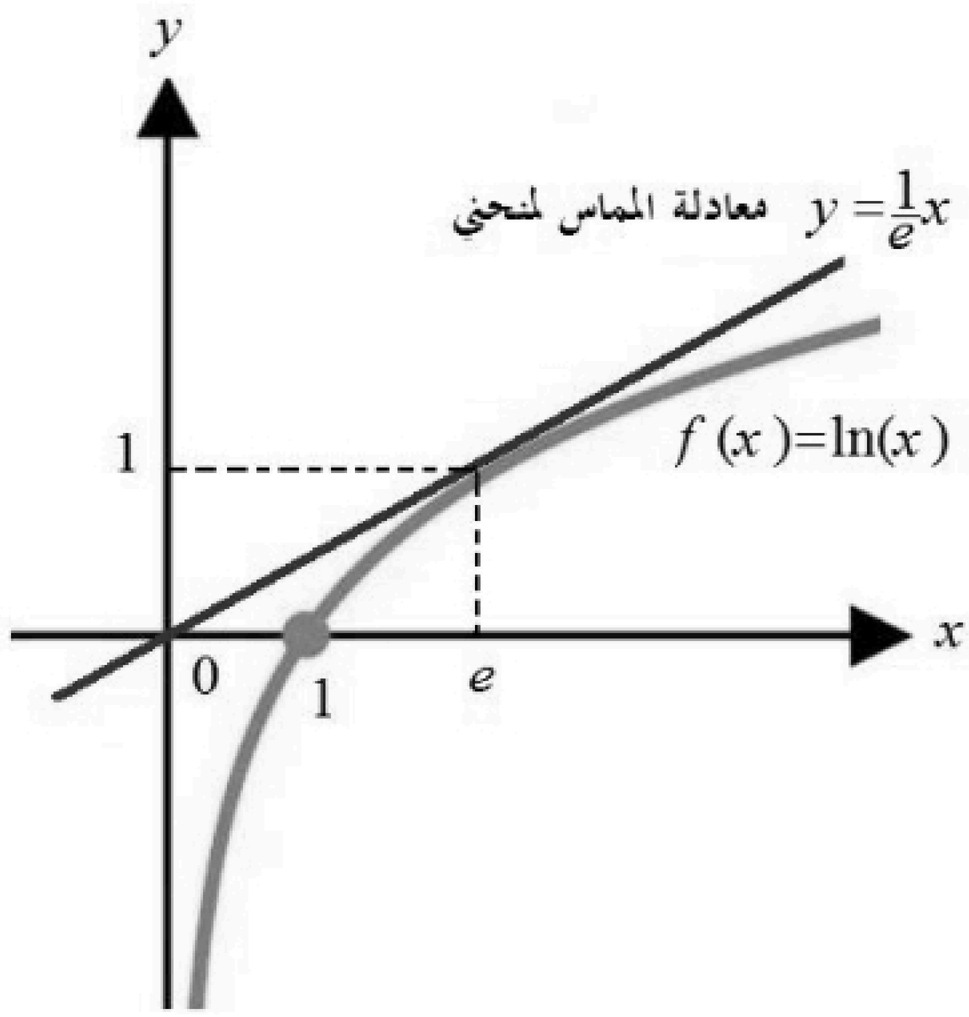
الحل

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \ \Rightarrow \quad m = f'(e) = \frac{1}{e}$$

وتكون معادلة المماس

$$(y-1) = \frac{1}{e}(x-e) \ \Rightarrow \quad y = \frac{1}{e}x$$

يوضح الشكل (٦,٦) معادلة المماس للدالة $f(x)$. □



الشكل (٦,٦).

مثال (٦,١٣)

أوجد المشتقة الثانية للدوال

١- $f(x)=x\ \ln(x)$

٢- $f(x)=\ln(\sec x+\tan x)$

الحل

١-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x\ \ln(x)\right]=x\ \frac{d}{dx}\ln(x)+\ln(x)\frac{d}{dx}(x)$$
$$=x\left(\frac{1}{x}\right)+(1)\ln(x)=1+\ln(x),$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[1+\ln(x)\right]=\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}\ln x\ =0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

٢-

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\ln(\sec x+\tan x)\right]=\frac{1}{(\sec x+\tan x)}\frac{d}{dx}(\sec x+\tan x)$$

$$=\frac{\sec^2 x+\sec x\ \tan x}{(\sec x+\tan x)}=\frac{\sec x\,(\sec x+\tan x)}{(\sec x+\tan x)}=\sec x\,,$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\sec x\right]=\sec x\ \tan x. \qquad \square$$

نظرية (٦,٨)

مشتقة الدالة اللوغاريتمية تعطى بالعلاقة

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a(x)\right)=\frac{1}{x\ \ln a},\quad x>0,\quad a>0,\quad a\neq 1.$$

البرهان

حيث إن الدالة اللوغاريتمية $y=\log_a x$ هي معكوس الدالة الأسية $x=a^y$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{\frac{d}{dy}\left(a^y\right)}=\frac{1}{a^y\ \ln a}=\frac{1}{x\ \ln a}. \qquad \square$$

عموما إذا كان $y=u(x)$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a u(x)\right]=\frac{1}{u(x)\ln a}\ u'(x)\,,\ u(x)>0,\quad a>0,\quad a\neq 1$$

مثال (٦,١٤)

أوجد مشتقة الدوال التالية

١- $f(x)=x^2+\log_2(x)$ ٢- $f(x)=\log_5(x^2-1)$

٣- $y=x^x$ ٤- $y=x^{\tan x}$

الحل

١-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^2 + \log_2(x)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[x^2\right] + \frac{d}{dx}\left[\log_2(x)\right] \\ &= 2x + \frac{1}{x\ln 2}. \end{aligned}$$

٢-
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\log_5(x^2-1)\right] \\ &= \frac{1}{(x^2-1)\ln 5}\frac{d}{dx}(x^2-1) \\ &= \frac{2x}{(x^2-1)\ln 5}. \end{aligned}$$

٣- لدينا في هذا المثال دالة أسها دالة، وبالتالي لا نستطيع إيجاد المشتقة مباشرة في هذه الحالة. لذلك نستخدم خواص الدالة اللوغاريتمية وكذلك الاشتقاق الضمني لحل مثل هذا النوع من المسائل أو كتابة الدالة في صورة الدالة الأسية.

الطريقة الأولى (باستخدام الاشتقاق الضمني)

بالاشتقاق الضمني نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln x) &\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{y}}y' = x\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(x) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{y}}y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{y}}y' = 1 + (\ln x) \\ &\Rightarrow y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x). \end{aligned}$$

الطريقة الثانية (الصورة الأسية)

يمكن كتابة الدالة $y = x^x$ على الصورة الأسية $y = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$ ،
ويكون

$$y' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} \frac{d}{dx}\left[x \ln(x)\right]$$
$$= e^{x\ln(x)}\left[x \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) + \ln(x)\frac{d}{dx}(x)\right]$$
$$= e^{x\ln(x)}\left[x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)(1)\right]$$
$$= e^{x\ln(x)}\left[1 + \ln(x)\right] = x^x(1 + \ln x).$$

٤- باستخدام الطريقة الثانية في الفقرة (٣) نجد أن

$$y = x^{\tan x} = e^{\ln\left(x^{\tan x}\right)} = e^{\tan x \ \ln x}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan x \ \ln x}\right) = e^{\tan x \ \ln x} \frac{d}{dx}\left[\tan x \ \ln x\right]$$
$$= e^{\tan x \ \ln x}\left[\tan x \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) + \ln(x)\frac{d}{dx}(\tan x)\right]$$
$$= e^{\tan x \ \ln x}\left[\tan x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)(\sec^2 x)\right]$$
$$= x^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{x} + \ln(x)(\sec^2 x)\right]. \qquad \square$$

باستخدام الطريقة المتبعة في المثال السابق سوف نبرهن النظرية الآتية :

نظرية (٦,٩)

إذا كانت $y = x^r$ حيث $r \in \mathbb{R}$ ، $r \neq 0$. فإن $\frac{d}{dx}\left(x^r\right) = rx^{r-1}$

البرهان

عندما تكون $x>0$ نجد أن $y=x^r=e^{\ln(x^r)}=e^{r\ln(x)}$ ويكون

$$y'=\frac{d}{dx}\left(e^{r\ln x}\right)=e^{r\ln x}\frac{d}{dx}\left(r\ln x\right)=e^{r\ln x}\frac{d}{dx}\left(r\ln x\right)$$
$$=re^{r\ln x}\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)=rx^r\left(\frac{1}{x}\right)=rx^{r-1},$$

عندما تكون $x<0$ فإن $(-x)>0$ ويكون $y=x^r=\left[(-1)(-x)\right]^r=(-1)^r(-x)^r$ ، باستخدام الحالة الأولى نجد أن

$$y'=\frac{d}{dx}\left(x^r\right)=\frac{d}{dx}\left((-1)^r(-x)^r\right)=(-1)^r\frac{d}{dx}(-x)^r$$
$$=(-1)^r r(-x)^{r-1}\frac{d}{dx}(-x)=(-1)^r r(-x)^{r-1}(-1)$$
$$=(-1)^{r+1}r(-x)^{r-1}=rx^{r-1}.\ \square$$

مثال (٦,١٥)

أوجد مشتقة الدالة $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{\sin^5 x}}$

الحل

بالإمكان استخدام الدالة اللوغاريتمية لإيجاد المشتقة كما يلي

$$\ln y=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x^4}{\sin^5 x}}\right)=\ln\left(\frac{x^4}{\sin^5 x}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^4}{\sin^5 x}\right)=\frac{1}{3}\left[\ln\left(x^4\right)-\ln\left(\sin^5 x\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[4\ln x-5\ln\left(\sin x\right)\right]$$

ثم بالاشتقاق ضمنياً نحصل على

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[4\ \frac{1}{x}-5\ \frac{\cos x}{\sin x}\right] \Rightarrow y'=\frac{y}{3}\left[4\ \frac{1}{x}-5\ \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$\Rightarrow y'=\sqrt[3]{\frac{x^4}{\sin^5 x}}\left[\ \frac{4}{3x}-\ \frac{5\cos x}{3\sin x}\right]. \quad \square$$

تمارين (٦,٤)

في التمارين من (١) إلى (١٢) أوجد y'

١- $y=x^2\log_3 x$

٢- $y=\sqrt{\ln x}$

٣- $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

٤- $y=\dfrac{x}{4^x}$

٥- $y=(x^2-2x+3)e^x$

٦- $y=\sin(2^x)$

٧- $y=\tan^{-1}\left(\ln(ax+b)\right)$

٨- $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

٩- $y=e^{\sqrt{x+1}}$

١٠- $y=x^a a^x$

١١- $y=\dfrac{1}{\ln x}$

١٢- $y=x^2\log_3 x$

في التمارين (١٣) إلى (١٨) أوجد y'

١٣- $y=1+xe^y.$

١٤- $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x.$

١٥- $2^x+2^y=2^{x+y}.$

١٦- $y=2x^{\sqrt{x}}.$

١٧- $y^x=x^y.$

١٨- $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$

١٩- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=e^{-x}$ عند النقطة $(0,1)$.

٢٠- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=1+\ln x$ عند النقطة $(1,1)$.