# المرحلة الأولى / التفاضل

المصادر المعتمدة:

## الأعداد الحقيقية (Real Numbers):

### ١- الأعداد الطبيعية (Natural Numbers):

يرمز لها بالرمز $N$، وتشمل الأعداد التي تستخدم في العد ويمكن كتابتها كمجموعة بالشكل التالي:

$$N=\{1, 2, 3, \dots\}.$$

### ٢- الأعداد الصحيحة (Integers):

يرمز لها بالرمز $Z$، وهي الأعداد $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ أي أن

$$Z=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

### ٣- الأعداد النسبية (Rational Numbers):

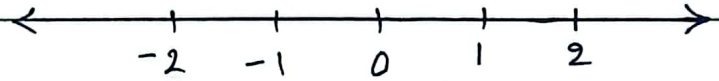
يرمز لها بالرمز $Q$، وتشمل الأعداد التي يمكن كتابتها كحاصل قسمة عددين صحيحين بحيث لا يكون المقام صفراً، وتعرف كالتالي:

$$Q=\left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

CamScanner ile tarandı

٤- الأعداد غير النسبية Irrational Numbers :-
يرمز لها بالرمز I ، وتشمل الأعداد التي لا يمكن كتابتها كحاصل قسمة عددين صحيحين مثل $\sqrt{2}$ , $\pi$ .

٥- الأعداد الحقيقية Real Numbers :-
يرمز لها بالرمز R ، وتشمل الأعداد النسبية وغير النسبية، ويمكن تمثيلها بخط الأعداد حيث تمثل النقطة 0 نقطة الأصل (origion) ثم تمثيل الأعداد الموجبة عن يمين 0 والسالبة عن يساره.




خواص الأعداد الحقيقية :-
ليكن $(a,b,c \in R)$ فإن :

١- خاصية الانغلاق :- $\forall a,b \in R, a+b \in R \not\Leftrightarrow a \times b \in R$

٢- الخاصية التبديلية :- $a+b=b+a \not\Leftrightarrow a \times b = b \times a$

٣- الخاصية التجميعية :- $(a+b)+c = a+(b+c) \not\Leftrightarrow (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

٤- الخاصية التوزيعية :- $a \times (b+c) = ac+bc$ or $(a+b) \times c = ac+bc$

٥- خاصية العنصر المحايد : العنصر المحايد لعملية الجمع هو (0) والعنصر المحايد لعملية الضرب هو (1) حيث أن :-
$a+0=0+a=a \not\Leftrightarrow a \times 1 = 1 \times a = a$

٦- خاصية النظير : النظير الجمعي هو نفس العدد عكس الإشارة والنظير الضربي هو مقلوب العدد حيث أن :
$a+(-a)=0 \not\Leftrightarrow a \times \frac{1}{a} = 1$

CamScanner ile tarandı

## الفترات (Intervals):-

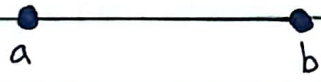
ليكن $a,b$ عددين حقيقيين $(a,b\in R)$ بحيث $a<b$. تسمى المجموعات الجزئية التالية من $R$ بالفترات، ونعرفها كما يلي:-

١- الفترة المفتوحة $(a,b)$:

$$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$$

٢- الفترة المغلقة $[a,b]$:

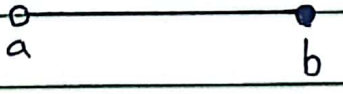
$$[a,b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}$$




٣- الفترات نصف المفتوحة (أو نصف مغلقة) $[a,b)$, $(a,b]$:

$$[a,b)=\{x\in R: a\leq x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\in R: a<x\leq b\}$$




٤- الفترات غير المنتهية $[a,\infty)$, $(a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$:

$$[a,\infty)=\{x\in R: x\geq a\}$$

$$(a,\infty)=\{x\in R: x>a\}$$

$$(-\infty,b]=\{x\in R: x\leq b\}$$

CamScanner ile tarandı

$(-\infty, b) = \{x \in R : x < b\}$

$(-\infty, \infty) = R$

## تقاطع الفترات واتحادها

يعرف تقاطع الفترتين A , B بأنه المجموعة التي تحتوي على العناصر الموجودة في كل من A , B ويرمز له بالرمز $A \cap B$ أي أن :-

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

كما يعرف اتحاد الفترتين A , B بأنه المجموعة التي تحتوي على العناصر الموجودة في A أو B ويرمز له بالرمز $A \cup B$ أيضاً :-

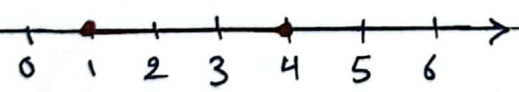
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

مثال :- إذا كانت $B = (2,6)$ ، $A = [1,4]$ ، أوجد

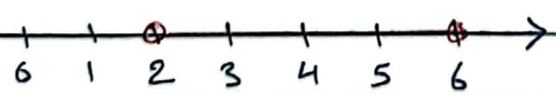
1- $A \cap B$ ، $A \cup B$

الحل :- في البداية نرسم كل فترة على حدة

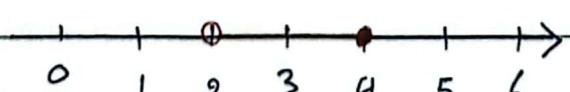
$[1,4]$:



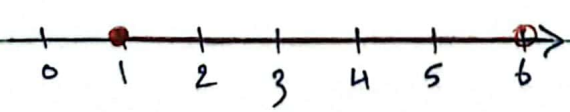

$(2,6)$:




$A \cap B = (2,4]$:




$A \cup B = [1,6)$:




CamScanner ile tarandı

## القيمة المطلقة:-

تعريف:- لأي عدد حقيقي x يمكن تعريف القيمة المطلقة والتي يرمز لها بالرمز $|x|$ كما يلي:-

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

مثال:- أوجد قيمة $|3|$ , $|-2|$ , $|3x-2|$

الحل:-

1- $|3| = 3$

2- $|-2| = 2$

3- $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & , 3x-2 \geq 0 \\ -(2x-2) & , 3x-2 < 0 \end{cases}$

نظرية:- خواص القيمة المطلقة:-

إذا كان $x, y \in R$ فإن:-

1- $|x| \geq 0$

2- $|x| = |-x|$

3- $|x| = \sqrt{x^2}$

4- $|xy| = |x||y|$

5- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ , $y \neq 0$

6- $|x+y| \leq |x|+|y|$

CamScanner ile tarandı

# المتباينات وحلولها

تعريف المتباينة: تسمى العبارة من الشكل $f(x) < g(x)$ أو $f(x) \leq g(x)$ متباينة. وتعرف مجموعة حل المتباينة بأنها جميع الأعداد $x \in R$ التي تحقق المتباينة، أي التي تكون عندها المتباينة صحيحة.

ملاحظات لحل المتباينات:

١- حل المتباينات هو ايجاد قيمة أو قيم (x) التي تحققها.

٢- عند ضرب طرفي المتباينة بقيمة سالبة فأن اشارة المتباينة تنقلب.

٣- عندما يكون احد طرفي الفترة يساوي ما لا نهاية (سواء بالموجب او السالب) فأن الفترة تكون مفتوحة دائما عند ما لا نهاية.

٤- حتى نقوم بإيجاد حل متباينة، فأننا نقوم بعمل خطوات معينة لنحصل على متباينات مكافئة للمتباينة الاصلية يكون حلها أسهل من المتباينة الاصلية. هذه الخطوات تعتمد على نوع المتباينة من حيث كونها خطية، كثيرة حدود، كسرية أو تحوي قيمة مطلقة فيما يلي نبين كل نوع من هذه الانواع على حدة.

## أولاً: حل المتباينة الخطية:

المتباينة الخطية يمكن التعبير عنها بالطريقة التالية:

$$ax + b < 0 \quad , \quad a \neq 0$$

ويمكن استبدال إشارة $<$ بأحد الاشارات التالية $\leq, >, \geq$.

CamScanner ile tarandı

* عند القيام بحل متباينة خطية نقوم بوضع الاعداد في طرف والمجهول في طرف ثم نقسم على معامل المجهول مع ملاحظة الخواص التالية:-

نظرية:- إذا كان $a,b \in R$ ، كان $a<b$ فإن:-

١. لأي عدد $c \in R$ نجد أن $a+c<b+c$ وكذلك $a-c<b-c$

٢. إذا كانت $c>0$ ، فأن $ac<bc$ وكذلك $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

٣. إذا كانت $c<0$ ، فأن $ac>bc$ ، وكذلك $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

مثال:- أوجد حل المتباينة $2x-4 \leq 8$

الحل:- $2x-4 \leq 8$ (بأضافة 4 الى الطرفين)

$2x \leq 8+4$

$2x \leq 12$ (بتقسيم الطرفين على 2)

$x \leq \frac{12}{2}$

$x \leq 6$

من الواضح أن مجموعة الحل ستكون:

$x=\{x: x \in R, x \in (-\infty, 6]\}$

CamScanner ile tarandı

مثال2: جد حل المتباينة $4(1-x) \leq 8$

Sol: $4(1-x) \leq 8$ (نقسم الطرفين على 4)

$\Rightarrow 1-x \leq 2$ (نطرح 1 من الطرفين)

$\Rightarrow -x \leq 1$ (نضرب طرفي المتباينة بـ $-1$ نلاحظ اشارة المتباينة تقلب)

$\Rightarrow x \geq -1$

$\therefore$ مجموعة الحل تساوي $x = \{x : x \in R, x \in [-1, \infty)\}$

مثال3: جد حل المتباينة $3x - 7 < 5x + 3$

Sol:

$3x - 7 < 5x + 3$

$-7 - 3 < 5x - 3x$ (نجمع الاعداد بطرف والمتغيرات بطرف آخر)

$-10 < 2x$

$\frac{-10}{2} < x$

$-5 < x \Rightarrow x > -5$

$\therefore$ مجموعة الحل تساوي $x = \{x : x \in R, x \in (-5, \infty)\}$

طريقة أخرى للحل

$3x - 7 < 5x + 3$

$3x - 5x < 3 + 7$

$-2x < 10$

$-x < \frac{10}{2} \Rightarrow -x < 5$ (نضرب المتباينة بـ $-1$)

$\Rightarrow x > -5$

CamScanner ile tarandı

مثال 4: جد حل المتباينة: $2x - 1 > 11x + 9$

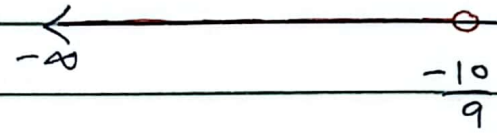
Sol:-

$$2x - 1 > 11x + 9$$

$\Rightarrow 2x - 11x > 9 + 1$ (نجمع الاعداد بطرف والمتغيرات بطرف)

$\Rightarrow -9x > 10$ $\quad] \div -9$

$\Rightarrow x < -\frac{10}{9}$




$\therefore$ مجموعة الحل $= \{x : x \in R, x \in (-\infty, -\frac{10}{9})\}$

مثال 5: جد حل المتباينة: $3 \leq 2x - 4 < 7$

Sol:- $3 \leq 2x - 4 < 7$

$\Rightarrow 3 + 4 \leq 2x < 7 + 4$

$\Rightarrow 7 \leq 2x < 11$ $\quad] \div 2$

$\Rightarrow \frac{7}{2} \leq x < \frac{11}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{x : x \in R, x \in [\frac{7}{2}, \frac{11}{2})\}$

CamScanner ile tarandı

## ثانياً :- حل المتباينات من الدرجة الثانية

المتباينة من الدرجة الثانية يمكن التعبير عنها بالطريقة التالية :-

$$ax^2+bx+c<0 \quad , \quad a\neq 0 \quad \text{حيث}$$

ويمكن أستبدال إشارة $<$ بأحد الاشارات التالية $\leq , > , \geq$.

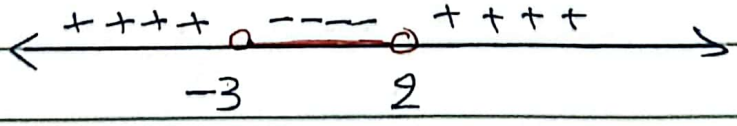
* عند القيام بحل متباينة من الدرجة الثانية نقوم بوضع جميع الحدود في طرف ويكون الطرف الاخر يساوي صفراً. بعد ذلك نقوم بتحليل المقدار بأحد طرق (تحليل المقادير الجبرية).

مثال 1 :- جد حل المتباينة $x^2+x<6$

Sol:-

$$x^2+x<6$$
$$\Rightarrow x^2+x-6<0$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-2)<0$$
$$x=-3 \text{ , or } x=2$$

بعد أستخراج قيم x نحدد القيم على خط الاعداد لإيجاد مجموعة الحل




∴ مجموعة الحل تساوي

$$X=\{x : x\in R ; x\in (-3,2)\}$$

CamScanner ile tarandı

مثال 2: أوجد حل المتباينة $x^2 \geq x + 20$

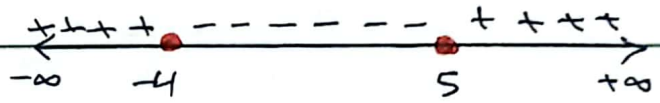
Sol:-

$$x^2 \geq x + 20$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 20 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+4) \geq 0$$

$$x = 5 \quad , \quad x = -4$$




∴ مجموعة الحل تساوي $x = \{x : x \in R ; x \in (-\infty, -4] \cup [5, \infty)\}$

مثال 3: أوجد حل المتباينة $\frac{1}{5}(x^2 - 3x - 4) \leq 0$

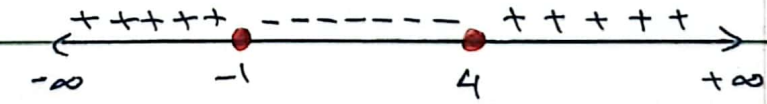
Sol:-

$$\frac{1}{5}(x^2 - 3x - 4) \leq 0 \quad ] \times 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) \leq 0$$

$$x = 4 \text{ or } x = -1$$




∴ مجموعة الحل تساوي $x = \{x : x \in R ; x \in [-1, 4]\}$

CamScanner ile tarandı

مثال 4:- أوجد حل المتباينة $x^2+3x-3<0$

Sol:-

$$x^2+3x-3<0$$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\mp\sqrt{9-4(1*-3)}}{2}=\frac{-3\mp\sqrt{9+12}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$$

∴ مجموعة الحل هي:

$$X=\left\{x : x\in R\ ;\ x\in\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2},\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$$

ثالثاً: حل المتباينات الكسرية

المتباينة الكسرية هي عبارة عن متباينة يكون أحد طرفيها أو كليهما عبارة عن دالة كسرية (كثيرة حدود على كثيرة حدود). لحل هذا النوع من المتباينات، ننقل جميع الحدود الى طرف ثم نقوم بتحليل كل من البسط والمقام ثم نبحث إشارة البسط والمقام ونوجد الحل بناء على نوع المتباينة مع الأخذ بعين الاعتبار استبعاد أصفار المقام.

مثال 1:- أوجد حل المتباينة $\frac{x+1}{x+3}\geq 2$

Sol:- $\frac{x+1}{x-3}\geq 2$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-3}-2\geq 0$$

CamScanner ile tarandı

$$\Rightarrow \frac{(x+1)-2(x+3)}{x+3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+1-2x-6}{x+3} \geq 0$$

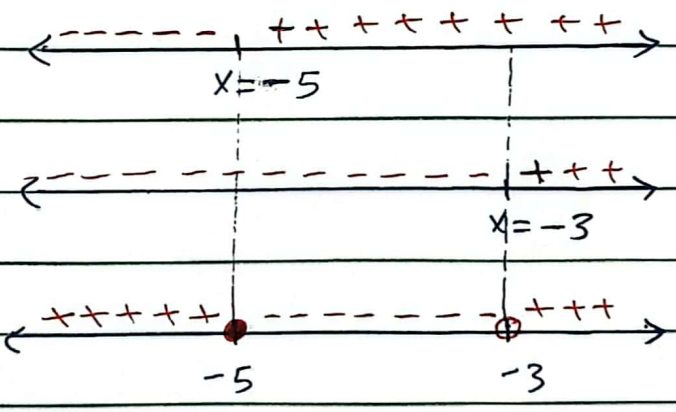
$$\Rightarrow \frac{-x-5}{x+3} \geq 0 \quad \text{(بضرب الطرفين في إشارة السالب)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{x+3} \leq 0$$

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

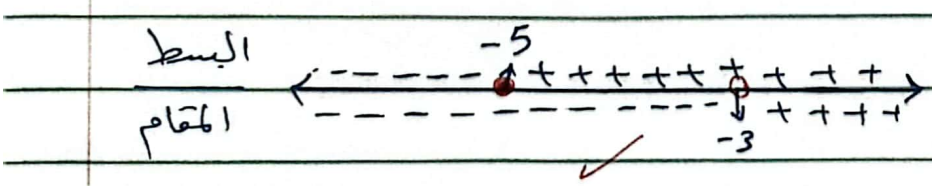
نمثل كل من البسط والمقام على حدة على خط الأعداد ثم نجد التقاطع




بما أن إشارة المتباينة أقل من أو يساوي الصفر، إذاً نأخذ الفترة التي تكون فيها إشارة المقدار سالبة.

$\therefore$ مجموعة الحل تساوي $X=\{x; x\in R; x\in [-5,-3)\}$

* طريقة أخرى




CamScanner ile tarandı

مثال 2 : أوجد حل المتباينة $\frac{x-1}{x^2+x-6} < 0$

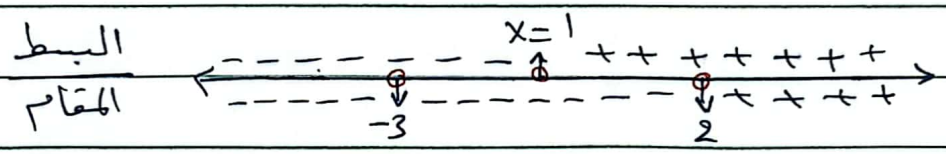
Soli:

نأخذ البسط $x-1=0 \Rightarrow x=1$

نأخذ المقام $x^2+x-6=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=-3 \quad , \quad x=2$




∴ مجموعة الحل تساوي

$X=\{x : x\in R ; x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)\}$

مثال 3 : أوجد حل المتباينة $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{x-1}$

Soli: $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} < 0$

$\Rightarrow \frac{(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$

$\Rightarrow \frac{x-1-2x-2}{(x+1)(x-1)} < 0$

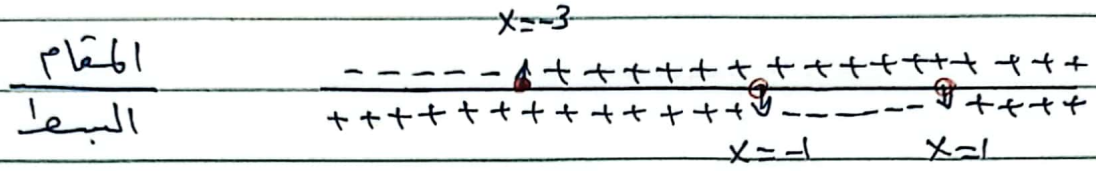
$\Rightarrow \frac{-x-3}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad ]*-1$

$\Rightarrow \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} > 0$

CamScanner ile tarandı

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=-1 \text{ or } x=1$




الاقواس
السبعة

∴ مجموعة الحل تساوي

$x=\{x: x\in R ; x\in [-3,-1)\cup(1,\infty)\}$

رابعاً: متباينات القيمة المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } a\geq 0 \\ -x & \text{if } a<0 \end{cases}$$

ليكن (a) عدد حقيقي موجب فإن

1- $|x|<a \leftrightarrow -a<x<a$

2- $|x-c|<a \leftrightarrow -a<x-c<a$

3- $|x|>a \leftrightarrow x>a \text{ or } x\leq -a$

CamScanner ile tarandı

مثال ١: أوجد حل المتباينة $|2x-5|<3$

Sol:- $|2x-5|<3$

$\Rightarrow -3<2x-5<3$ (بأضافة 5 للطرفين)

$\Rightarrow -3+5<2x<3+5$

$\Rightarrow 2<2x<8$ (بالقسمة على 2)

$\Rightarrow 1<x<4$

$\therefore$ مجموعة الحل تساوي $x=\{x: x\in R; x\in(1,4)\}$

مثال ٢: أوجد حل المتباينة $6<|2x-6|<12$

Sol:-

الحالة الاولى:

$6<2x-6<12 \Rightarrow 12<2x<18$ $]\div 2$

$\Rightarrow 6<x<9$

$\Rightarrow x\in(6,9)$

الحالة الثانية:

$6<-2x+6<12 \Rightarrow 0<-2x<6$ $]\div -2$

$\Rightarrow 0>x>-3 \Rightarrow -3<x<0$

$\Rightarrow x\in(-3,0)$

$\therefore$ مجموعة الحل تكون من أتحاد الحالة الاولى والثانية

$x=\{x: x\in R; x\in(-3,0)\cup(6,9)\}$

CamScanner ile tarandı

مثال 3: أوجد حل المتباينة $|6-3x| \geq 12$

Sol:-

$6-3x \geq 12$ or $6-3x \leq -12$

$\Rightarrow -3x \geq 6 \quad ]\div -3$ or $-3x \leq -18 \quad ]\div -3$

$\Rightarrow x \leq -2$ or $x \geq 6$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -2]$ or $x \in [6, \infty)$

∴ مجموعة الحل هي

$x = \{x : x \in R ; x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)\}$

مثال 4:- أوجد حل المتباينة $|x+3| < |2x-3|$

Sol:-

$|x+3| < |2x-3|$ (نقسم على $|2x-3|$)

$\Rightarrow \frac{|x+3|}{|2x-3|} < 1$

$\Rightarrow \left|\frac{x+3}{2x-3}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x+3}{2x-3} < 1$

الحالة الأولى:-

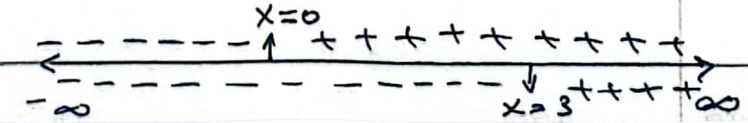
$-1 < \frac{x+3}{2x-3} \Rightarrow \frac{x+3}{2x-3} > -1$

$\Rightarrow \frac{x+3}{2x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x+3+2x-3}{2x-3} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{2x-3} > 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$2x-3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$




CamScanner ile tarandı

الحالة الثانية:

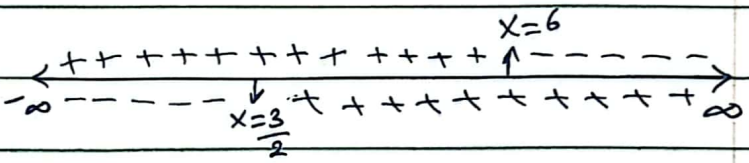
$$\frac{x+3}{2x-3} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{2x-3} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+3-(2x-3)}{2x-3} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3-2x+3}{2x-3} < 0 \Rightarrow \frac{-x+6}{2x-3} < 0$$

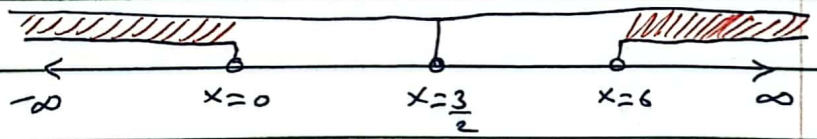
$$-x+6=0 \Rightarrow x=6$$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$




$$x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (6, \infty)$$

∴ مجموعة الحل تساوي تقاطع الحالتين الأولى والثانية.



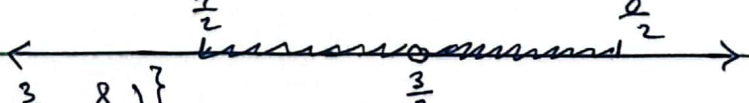

$$x = \{x : x \in R ; x \in (-\infty, 0) \cup (6, \infty)\}$$

مثال: أوجد حل المتباينة الآتية: $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow |2x-3| < \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow |2(x-\frac{3}{2})| < \frac{1}{5} \Rightarrow |2||x-\frac{3}{2}| < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow |x-\frac{3}{2}| < \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{1}{10} < x-\frac{3}{2} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5}$$




$$x = \{x : x \in R ; x \in (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{8}{2})\}$$

CamScanner ile tarandı

مثال 5: أوجد حل المتباينة $\left|\frac{x-12}{4}\right| \leq 9$

Sol:-

$$\frac{|x-12|}{|4|} \leq 9 \Rightarrow \frac{|x-12|}{4} \leq 9 \quad ] \times 4$$

$$\Rightarrow \frac{|x-12|}{4} \times 4 \leq 9 \times 4 \Rightarrow |x-12| \leq 36$$

$$\Rightarrow -36 \leq x-12 \leq 36$$

$$\Rightarrow -36+12 \leq x \leq 36+12$$

$$\Rightarrow -24 \leq x \leq 48$$

$$\therefore x = \{x : x \in R ; x \in [-24, 48]\}$$

مثال 6: أوجد حل المتباينة $|2x| + 7 \geq 8$

Sol:-

$$|2x| \geq 8-7$$

$$\Rightarrow |2x| \geq 1$$

$$\Rightarrow 2x \geq 1 \quad \text{or} \quad 2x \leq -1$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

$$x \in (\tfrac{1}{2}, \infty) \quad \text{or} \quad x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2})$$

$$\therefore x = \{x : x \in R ; x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, \infty)\}$$

CamScanner ile tarandı

تمارين: أوجد حل المتباينات الآتية:

(1) $2x - 4 < 8$

(2) $3 - 5x \geq 18$

(3) $4x - 2 \geq 2x - 4$

(4) $-3 \leq 2x - 1 < 6$

(5) $7 < 3 - 4x \leq 19$

(6) $x^2 + 3x < 4$

(7) $2x^2 + x < 15$

(8) $x^2 - x - 6 \geq 0$

(9) $-8 \leq 4(2x - 3) \leq 4$

(10) $(x - 4)(x + 3) \leq 0$

(11) $x^2 - x - 12 \leq 0$

(12) $-10 < 6x + 2 \leq 3$

(13) $\frac{2x - 1}{2x + 1} > 0$

(14) $\frac{2}{x - 3} > 3$

(15) $\frac{x + 3}{x - 3} < 0$

(16) $\frac{8x + 1}{4x - 1} < 0$

(17) $(x - 1)(3x - 4) \geq 0$

(18) $|4 - 3x| \leq 4$

(19) $|4x - 7| \geq 9$

(20) $|x - 5| \geq |x + 2|$

CamScanner ile tarandı