الفصل الثالث

النهايات
LIMITS

إن مفهوم النهاية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي وحساب التفاضل والتكامل. سوف نهتم في هذا الفصل بمفهوم النهاية وهي القيمة التي تسعى (تقترب) لها الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من عدد ما a دون أن تساويه.

(٣,١) تعريف نهاية الدالة
Definition of Function Limits

نقوم في هذا القسم بتعريف نهاية دالة عند قيمة معطاة، ولعلنا نبدأ بإعطاء مثال تمهيدي لتوضيح مفهوم النهاية.

مثال (٣,١)

بالقرب من النقطة $x = 2$ ، ادرس قيم الدالة

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \;; \qquad x \neq 2$$

الحل

نلاحظ أن $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. ندرس الآن قيم $f(x)$ بالقرب من النقطة $x = 2$ باستخدام الجدول التالي

$x < 2$	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	$x > 2$	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
1.9	3.9	2.1	4.1
1.99	3.99	2.01	4.01
1.999	3.999	2.001	4.001
1.9999 $\downarrow$	3.9999 $\downarrow$	2.0001 $\downarrow$	4.0001 $\downarrow$
2^-	4	2^+	4

من الجدول نلاحظ أنه عندما تقترب x من العدد 2 من جهة اليمين ($x > 2$) أو من جهة اليسار ($x < 2$)، فإن الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 4. عندما تقترب x إلى العدد 2 ، وتكون $x > 2$ فإننا نقول إن x تقترب من 2 من جهة اليمين ونرمز لذلك بالرمز $x \to 2^+$. أما عندما تقترب x إلى العدد 2 ، وتكون $x < 2$ فإننا نقول إن x تقترب من 2 من جهة اليسار ونرمز لذلك بالرمز $x \to 2^-$. وفي هذه الحالة يقال أن الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد 2 ونعبر عن ذلك بالرمز $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. ونرمز للنهاية من اليمين ومن اليسار بالرموز $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ و $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ على التوالي. $\square$

ملاحظات

في المثال (٣,١)، وعلى الرغم من أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 2$ إلا أنه أمكن دراسة نهاية الدالة عند هذه النقطة، وذلك لأننا نبحث عن قيمة الدالة عندما تقترب x تقترب من 2 وليس عند $x = 2$.

فيما يلي نقوم بتعريف نهاية الدالة

تعريف (٣,١) تعريف نهاية الدالة

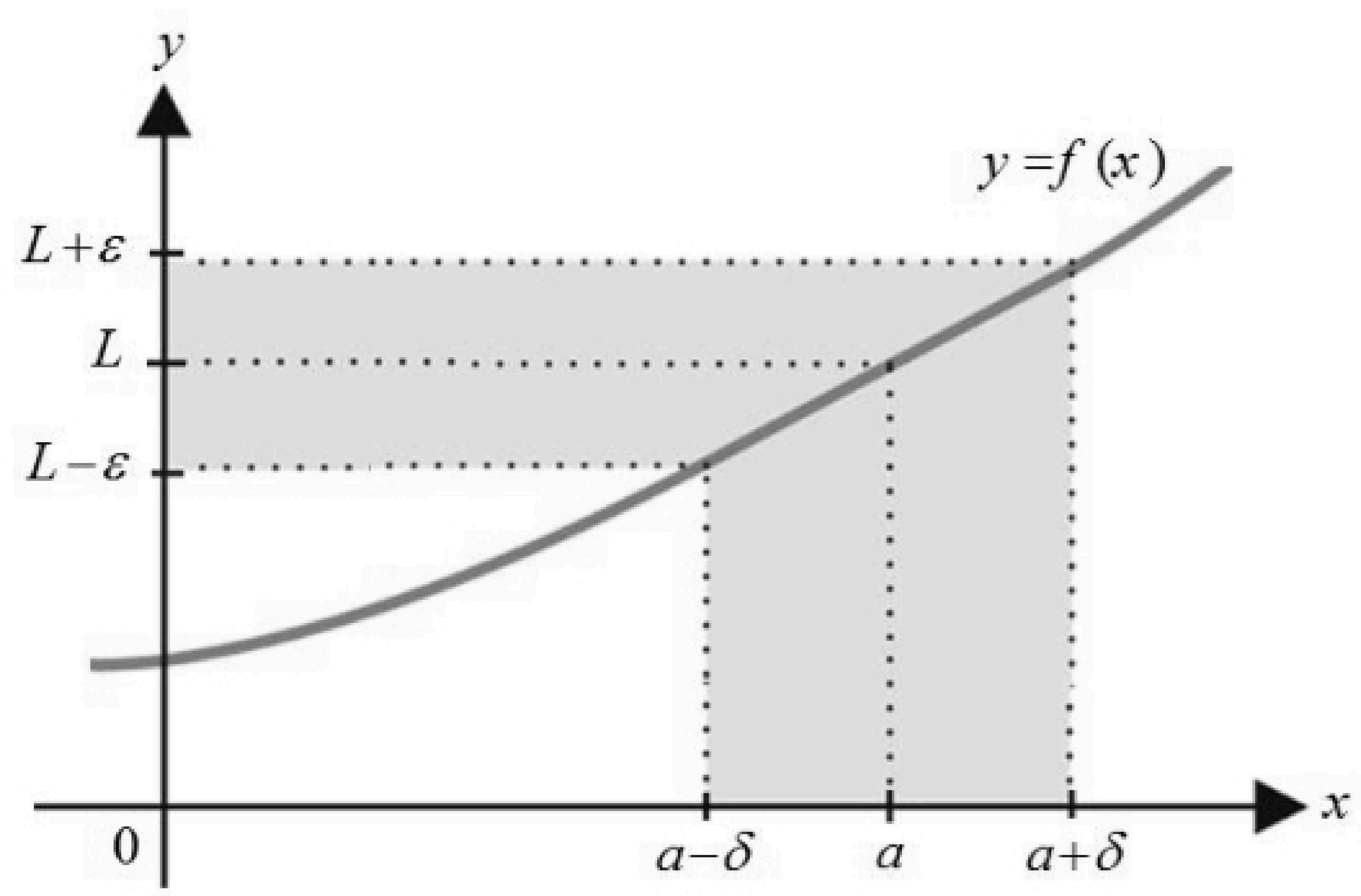
لتكن $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ دالة قد لا تكون معرفة عند $x=a$ يقال أن العدد الحقيقي L هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب النقطة x من العدد a إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عددا $\delta>0$ بحيث

$$0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-L|<\varepsilon$$

والتي يمكن كتابتها اختصاراً

$$\forall\;\varepsilon>0\quad\exists\;\delta>0\;:\;0<|x-a|<\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-L|<\varepsilon$$

هذا التعريف يعني أن L نهاية للدالة f عند النقطة a إذا كانت قيم الدالة قريبة جداً من العدد L عندما تكون x قريبة قربا كافيا من a كما هو مبين في الشكل (٣,١).



الشكل (٣,١).

نظرية (٣,١) وحدانية النهاية

إذا وجدت نهاية للدالة f عند a فإنها تكون وحيدة .

مثال (٣,٢)

أثبت باستخدام التعريف أن :

$$\lim_{x \to a} c = c$$

حيث c عدد ثابت.

الحل

لتكن $f(x) = c$ لجميع قيم x. إذاً المطلوب أثباته أنه

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \quad \exists \;\; \delta > 0 \;:\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

بما أن

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \delta$$

إذاً لأي قيمة δ فإن

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \quad \exists \;\; \delta > 0 \;:\; 0 < |x - a| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \qquad \square$$

مثال (٣,٣)

أثبت باستخدام التعريف أن : $\lim_{x \to a} x = a$.

الحل

لتكن $f(x) = x$، والمطلوب إثباته أن

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \quad \exists \;\; \delta > 0 \;:\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \varepsilon$$

بما أن

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$$

باختيار $\delta = \varepsilon$ نحصل على

$$\forall \;\; \varepsilon > 0 \quad \exists \;\; \delta = \varepsilon > 0 \;:\; 0 < |x - a| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - a| < \delta = \varepsilon \qquad \square$$

مثال (٣,٤)

أثبت باستخدام التعريف أن :

$$\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$$

الحل

لتكن $f(x)=3x+4$ في هذه الحالة $L=10$ و $a=2$. والمطلوب إثباته أن

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0\ :\ 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

أي أن

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0\ :\ 0<|x-2|<\delta \ \Rightarrow\ |(3x+4)-10|<\varepsilon$$

الآن

$$|f(x)-L|=|(3x+4)-10|=|3x-6|=|3(x-2)|=3|x-2|<\varepsilon$$

إذاً $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

نختار $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ ، فنحصل على

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{3}>0\ :\ 0<|x-2|<\delta$$

$$\Rightarrow\ |f(x)-L|=3|x-2|<3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon. \qquad \square$$

مثال (٣,٥)

أثبت باستخدام التعريف أن :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2+2x-4)}{(x-1)}=6$$

الحل

لتكن $f(x)=\dfrac{(2x^2+2x-4)}{(x-1)}$ فيصبح المطلوب إثباته

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0\ :\ 0<|x-1|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-6|<\varepsilon$$

نحسب الآن $|f(x)-6|$

$$|f(x)-6| = \left|\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6\right| = \left|\frac{(2x^2+2x-4)-6(x-1)}{x-1}\right|$$
$$= \left|\frac{2(x^2-2x+1)}{x-1}\right| = 2\left|\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)}\right| = 2|x-1| < \varepsilon$$

إذاً نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ وبالتالي

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ : \ 0 < |x-1| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| = |2x-1| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \qquad \square$$

(٣,٢) خواص النهايات

Properties of Limits

قمنا في القسم السابق بتعريف النهايات ثم عرض التعريف الأولي لنهاية الدالة باستخدام (ε, δ). في هذا الفصل نقوم بعرض خواص النهايات والتي تساعدنا في إيجاد النهايات دون الاعتماد على التعريف الأولي.

نظرية (٣,٢) بعض النهايات الأساسية

إذا كان c عدداً حقيقياً و n عدداً طبيعياً فإن:

$$1- \quad \lim_{x \to c} c = c \ ,$$
$$2- \quad \lim_{x \to c} x = c,$$
$$3- \quad \lim_{x \to c} x^n = c^n$$

نفترض فيما يلي أن f , g دالتان معرفتان على الفترة المفتوحة $A \subseteq \mathbb{R}$ التي تحتوي النقطة a وليس بالضرورة أن تكونا معرفتين عند a.

نظرية (٣,٣)

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ ، $L,\ M\in\mathbb{R}$ و c عدد حقيقي ، فإن :

$$1-\quad \lim_{x\to a}\left[c\,f(x)\right]=c\,\lim_{x\to a} f(x)=c\,L,$$

$$2-\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]+\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L+M,$$

$$3-\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]-\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L-M,$$

$$4-\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\ \lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L\ M,$$

$$5-\quad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]}=\frac{L}{M},\qquad M\neq 0,$$

$$6-\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

نظرية (٣,٤)

لتكن $P_n(x)$ ، $Q_n(x)$ كثيرات حدود من الدرجة n ، أي أن :

$$P_n(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0,\quad Q_n(x)=b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0$$

حيث $a_n,\ a_{n-1},\cdots,\ a_1,\ a_0,\ b_n,\ b_{n-1},\cdots,\ b_1,\ b_0$ ثوابت حقيقية ، فإن :

$$1-\quad \lim_{x\to a} P_n(x)=P_n(a),$$

$$2-\quad \lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_n(a)}{Q_n(a)},\qquad Q_n(a)\neq 0$$

نظرية (٣,٥)

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\qquad \forall\ n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$$

وإذا كان $a>0$ فإن

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$$

فيما يلي نستعرض عدداً من الأمثلة المختلفة لبيان كيفية حساب النهايات.

مثال (٣,٦)

أوجد $\lim_{x\to 2}(3x^2+4)$

الحل

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+4)=3(2)^2+4=(3)(4)+4=12+4=16 \qquad \square$$

مثال (٣,٧)

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2+2x+4)}{(x+1)}$

الحل

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2+2x+4)}{(x+1)}=\frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+2x+4)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}$$

$$=\frac{2\lim_{x\to 1}x^2+2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4}{\lim_{x\to 1}(x)+\lim_{x\to 1}(1)}$$

$$=\frac{2(1^2)+2(1)+4}{(1)+(1)}=\frac{8}{2}=4 \qquad \square$$

مثال (٣,٨)

أوجد

١- $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$

٢- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

٣- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

٤- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

الحل

١- بالتعويض المباشر نجد $\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1$ ، $\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$ بما أن نهاية البسط ونهاية المقام تساوي صفراً، إذاً يوجد عامل مشترك بين البسط والمقام، وبالتحليل نحصل على

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1) \qquad \forall \quad x \neq 1$$

إذاً

$$.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

٢- بالتعويض المباشر نجد ناتج النهاية هو الكمية غير المعينة $\left(\frac{0}{0}\right)$. يمكن إعادة كتابة الدالة بصورة مختلفة وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق البسط ($\sqrt{4+x}+2$)، فنحصل على

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{4+x}-2)}{x}&=\frac{(\sqrt{4+x}-2)}{x}\frac{(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x}+2)}\\&=\frac{(4+x)-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}\\&=\frac{1}{(\sqrt{4+x}+2)} \qquad \forall \quad x\neq 0\end{aligned}$$

ويكون

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{4}$$

٣- بالتعويض المباشر نجد ناتج النهاية هو الكمية غير المعينة $\left(\frac{0}{0}\right)$. إذاً نستطيع تحليل المقدار الثلاثي في البسط فينتج

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=(x^2+x+1) \quad \forall \ x\neq 1$$

ويكون

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

٤- بالتعويض المباشر نجد ناتج النهاية هو الكمية غير المعينة $\left(\frac{0}{0}\right)$. إذاً نستطيع تحليل البسط و المقام فنحصل على

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}=\frac{2}{3} \qquad \square$$

نظرية (٣,٦) نظرية الحصر

إذا كانت $f\,,g\,,h$ ثلاث دوال معرفة على فترة مفتوحة A تحوي a (ماعدا ربما عند النقطة a) بحيث

$$f(x)\le g(x)\le h(x) \quad \forall\ x\in A$$

وكان

$$\lim_{x\to a}f(x)=L=\lim_{x\to a}h(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to a}g(x)=L$$

مثال (٣,٩)

أوجد $\lim_{x\to0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

الحل

نعلم أن الدالة $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ دالة محدودة وأن $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ لكل $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. أي أن:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1 \qquad \forall\ x\ne0$$

بضرب طرفي المتباينة في x^2 نجد أن

$$-x^2\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$$

بأخـذ $f(x)=x^2$ ، $h(x)=-x^2$ ، $g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ كمـا في النظريـة (٣,٦) نجد أن

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} h(x)$$

ومن ثم فإن :

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \square$$

مثال (٣,١٠)

أوجد $\lim_{x\to 0} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

الحل

نعلم أن الدالة $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ دالة محدودة وأن $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$ لكل $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

أي أن :

$$-1\le\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le 1 \qquad \forall\ x\ne 0$$

بضرب طرفي المتباينة في x^3 وفرض أن $0<x$ نجد أن

$$-x^3\le x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le x^3$$

أما إذا كان $x<0$ ، فإن

$$-x^3\ge x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ge x^3$$

بما أن $\lim_{x\to 0} x^3=\lim_{x\to 0}(-x^3)=0$ ، إذاً

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \square$$

(٣,٣) نهايات الدوال المثلثية

Limits of Trigonometric Functions

فيما يلي نعطي أهم النظريات والنتائج في نهايات الدوال المثلثية بدون برهان.

نظرية (٣,٧)

ليكن a عددا حقيقيا يقع في مجال تعريف الدالة المعطاة. فنحصل على

1. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$
2. $\lim_{x \to a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$
3. $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$
4. $\lim_{x \to a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a$
5. $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$
6. $\lim_{x \to a} \tan^{-1} x = \tan^{-1} a$
7. $\lim_{x \to a} \cot x = \cot a$
8. $\lim_{x \to a} \cot^{-1} x = \cot^{-1} a$

نتيجة (٣,١)

إذا كانت x مقاسة بالتقدير الدائري، فإن:

1. $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$
2. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

نظرية (٣,٨)

إذا كانت x مقاسة بالتقدير الدائري، فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتيجة (٣,٢)

إذا كانت x مقاسة بالتقدير الدائري، فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

مثال (٣,١١) أوجد النهايات الآتية :

١- $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

٢- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

٣- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

٤- $\lim_{x \to 0} \sin^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

٥- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

٦- $\lim_{x \to 0} x \cot x$

٧- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x}$

٨- $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

الحل

١- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

٢- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} \\ &= 3\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right) \\ &= (3)(1) = 3.\end{aligned}$$

٣- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\ \cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}\right)=(1)\left(\frac{1}{1}\right)=1.$$

٤- بالتعويض المباشر نحصل على

$$\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{0+1}{2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

٥- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}}{4\frac{\sin 4x}{4x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}}{4\frac{\sin 4x}{4x}}\right)$$

$$=\left(\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}\right)=\left(\frac{3(1)}{4(1)}\right)=\frac{3}{4}.$$

٦- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$.

$$\lim_{x\to 0}x\ \cot x=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cos x$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}\cos x=(1)(1)=1.$$

٧- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{2x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{(2x)}\\ &= (2)(0)=0.\end{aligned}$$

٨- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$. بضرب بسط ومقام الدالة في $(1+\cos x)$ نحصل على

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\ &= (1).(1).(2)=2. \qquad \square\end{aligned}$$

(٣,٤) النهايات عند اللانهاية
Infinite Limits

نبحث في هذا القسم نهاية الدالة عندما تزداد قيمة x وتؤول إلى ما لانهاية أو تقل قيمة x وتؤول إلى سالب ما لا نهاية.

تعريف (٣,٢)

إذا كانت الدالة f معرفة على فترة مفتوحة A ، فإنه

- يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد L عندما تؤول x إلى ∞ إذا كان:

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ k>0 :\ x>k \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

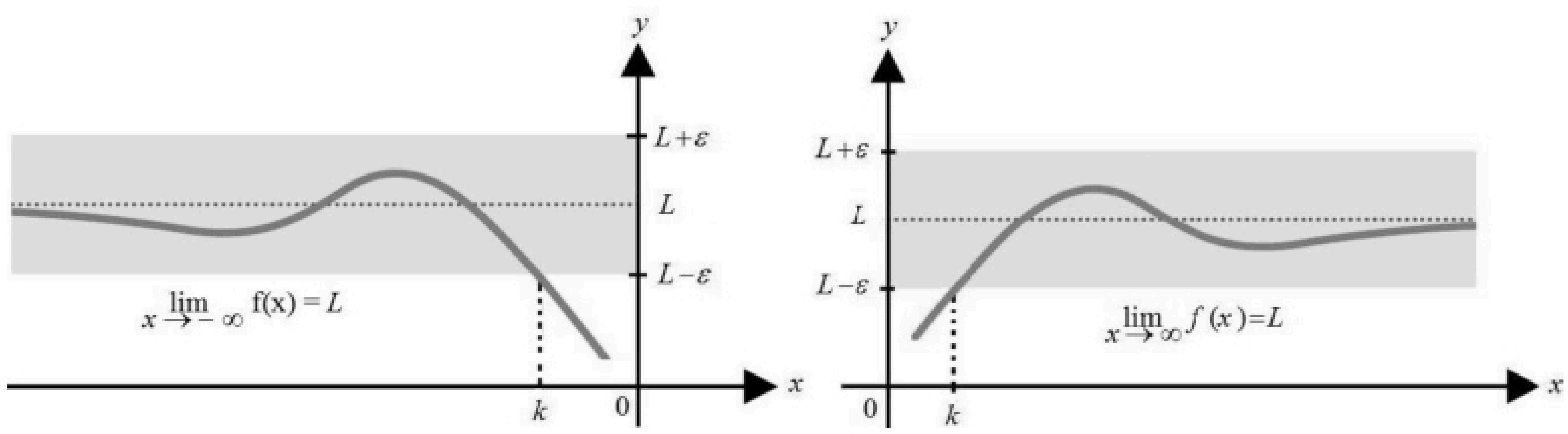
ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

• يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد L عندما تؤول x إلى $-\infty$ إذا كان:

$$\forall \ \varepsilon>0 \quad \exists \ k<0 \ : \ x<k \ \Rightarrow \ |f(x)-L|<\varepsilon$$

ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

يوضح الشكل (٣,٢) التعريف (٣,٢)



الشكل (٣,٢).

نظرية (٣,٩)

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad 2.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نتيجة (٣,٣)

إذا كان n عدداً طبيعياً فإن:

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0, \qquad 2.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

مثال (٣,١٢) أوجد النهايات الآتية:

١- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)$

٤- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

٢- $\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ٥- $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{4+x^2}}$

٣- $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+4}{2x-1}$ ٦- $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^3-3x-1}$

الحل

١- $\lim_{x \to \infty}\left(3+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty}(3) + \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 3+0 = 3$

٢- بوضع $y = \frac{1}{x}$ ، نجد أنه إذا كانت $(x \to \infty)$ فإن $(y \to 0)$ ويكون

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}\sin(y) = 1$$

٣- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم التعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. بقسمة البسط والمقام على x (وهو أكبر أس موجود في المقام) نحصل على

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+4}{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x+4}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

٤- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم التعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{4}{x}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{|x|\sqrt{\left(\frac{4}{x}+1\right)}}$$

وبما أن $x \to \infty$ فإن $|x| = x$ إذاً

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\sqrt{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}} = \frac{-1}{\sqrt{0+1}} = -1$$

٥- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم التعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{4}{x}+1\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{|x|\sqrt{\left(\frac{4}{x}+1\right)}}$$

وبما أن $x \to -\infty$ فإن $|x| = -x$ إذاً

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\sqrt{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}} = \frac{2}{\sqrt{0+1}} = 2$$

٦- بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم التعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. بقسمة البسط والمقام على x^3 نجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3-3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{4-0-0}=\frac{0}{4}=0 \qquad \square$$

تعريف (٣,٣)

- يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ∞ عندما تؤول x إلى a إذا كان:

$$\forall\ k>0 \quad \exists\ \delta>0:\ 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow f(x)>k$$

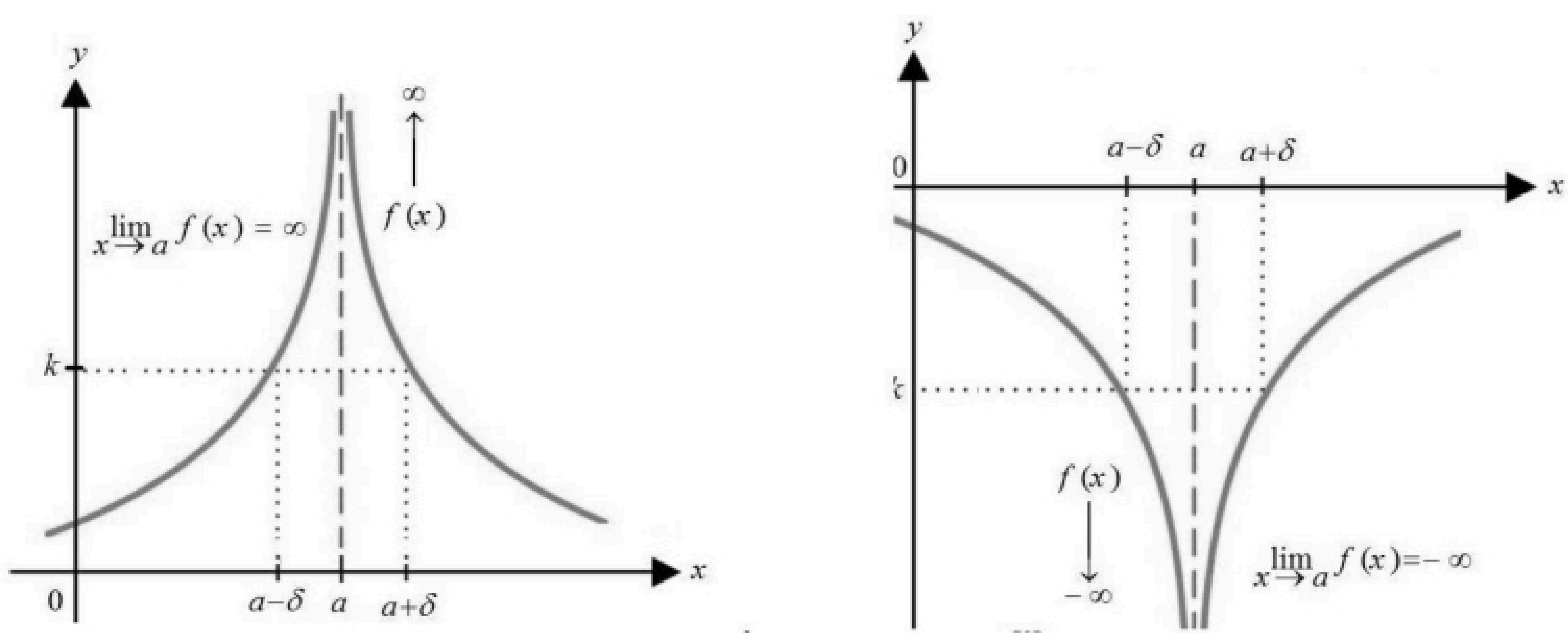
ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

- ويقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما تؤول x إلى a إذا كان:

$$\forall\ k<0 \quad \exists\ \delta>0:\ 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow f(x)<k$$

ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

يوضح الشكل (٣,٣) التعريف (٣,٣)



الشكل (٣,٣).

نظرية (٣,١٠)

١- إذا كان n عدداً زوجياً فإن:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

٢- إذا كان n عدداً فردياً فإن:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty,$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$$

(٣,٥) النهاية اليمنى واليسرى

Right and Left Limits

نتطرق في هذا القسم لتعريف النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند نقطة، ثم نبين أن النهاية تكون موجودة إذا تساوت النهاية اليمنى واليسرى.

تعريف (٣,٤)

- لتكن $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ دالة، يقال إن العدد L هو النهاية اليمني للدالة f عندما تقترب x من النقطة a إذا كان:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta > 0 : \ 0 < x - a < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

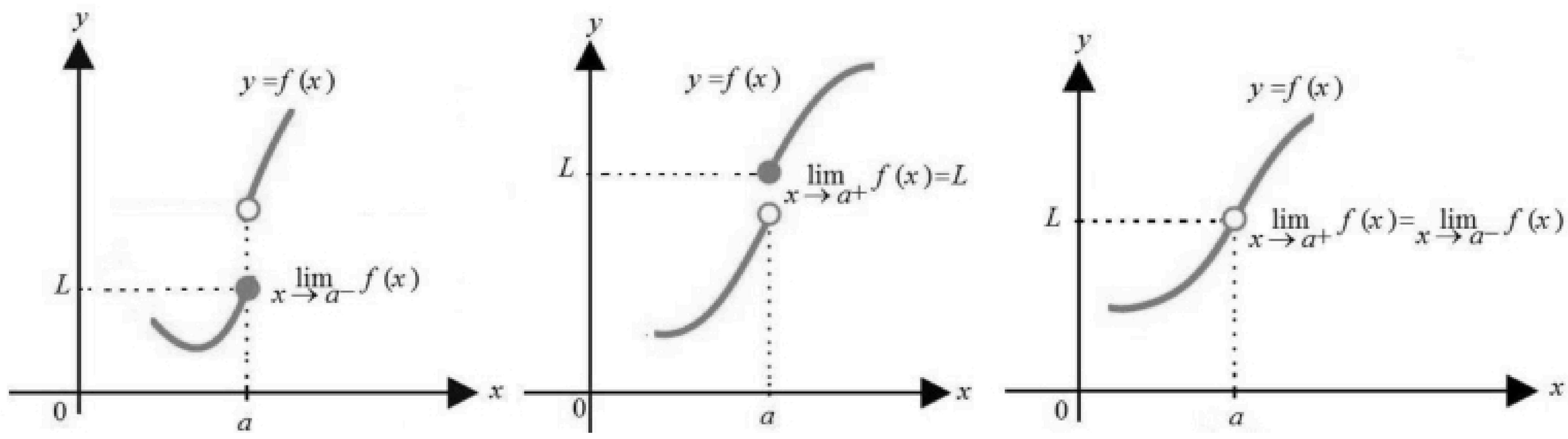
ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

- لتكن $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ دالة، يقال إن العدد L هو النهاية اليسرى للدالة f عندما تقترب x من النقطة b إذا كان:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta > 0 : \ -\delta < x - b < 0 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

ونعبر عن ذلك بالرمز: $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$

يوضح الشكل (٣,٤) التعريف (٣,٤)



الشكل (٣,٤).

نظرية (٣,١١)

إذا كانت f معرفة على فترة مفتوحة (b,c) تحوي a (وربما عدا النقطة a)، إي أن $f:(b,c)\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=L$ إذا وإذا فقط كان

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L=\lim_{x\to a^-} f(x)$$

مثال (٣,١٣) ادرس النهايات التالية

١- $\lim_{x\to 1}|x-1|$ ٢- $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

الحل

١- حيث إن

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & x\ge 1\\ 1-x & x<1\end{cases}$$

إذاً

$$\lim_{x\to 1^+}|x-1|=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0,\qquad \lim_{x\to 1^-}|x-1|=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1}|x-1|=0 .$$

٢- حيث إن

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

إذاً

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1)=1,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

إذاً النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ غير موجودة ، لأن $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$. □

(٣,٦) تمارين عامة

في التمارين من (١) إلى (٤) أثبت باستخدام التعريف أن :

١- $\lim_{x\to 2}(2x+1)=5$

٢- $\lim_{x\to -3}3=3$

٣- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

٤- $\lim_{x\to 1}(x+3)=4$

في التمارين من (٥) إلى (١٦) أوجد النهايات :

٥- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$

٦- $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$

٧- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

٨- $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x^2-1)}$

٩- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1}{x-4}+1\right)$

١٠- $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

١١- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

١٢- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

١٣- $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

١٤- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

١٥- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

١٦- $\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

في التمارين من (١٧) إلى (٢٦) أوجد النهايات

١٧- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

١٨- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(kx)}{x}$

١٩- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$

٢٠- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$

٢١- $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin^{-1} x}{3x}$

٢٢- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

٢٣- $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

٢٤- $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

٢٥- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$

٢٦- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$

٢٧- أوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$ إن وجدت، حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

٢٨- أوجد $\lim_{x \to 0} g(x)$ إن وجدت، حيث

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 & x > 0 \end{cases}$$

٢٩- أوجد $\lim_{x \to 1} h(x)$ إن وجدت، حيث

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 3x + 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

٣٠- أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{|x-2|}$

ج) $\lim_{x \to 0} x^2 |x|$

د) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$

هـ) $\lim_{x \to -1} \frac{|x|}{x}$

و) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$

الفصل الرابع

الاتصال

CONTINUITY

بينا في الفصل السابق أن الدالة يكون لها نهاية عند نقطة إذا كانت قيمة النهاية من اليمين تساوي قيمة النهاية من اليسار، ولم نتطرق إلى قيمة الدالة عند النقطة. في هذا الفصل سوف نتعرف على مفهوم وخصائص الاتصال والذي يهتم بقيمة النهاية عند النقطة التي يتم بحث الاتصال عندها وكذلك قيمة الدالة عند النقطة.

(٤,١) تعريف الاتصال

Definition of Continuity

يقال عن دالة إنها متصلة على فترة إذا كان بيان الدالة يمكن رسمه بدون أن يتم رفع القلم عن الورقة، أي بدون انقطاع.

تعريف (٤,١)

لتكن $f\ :I\ \to \mathbb{R}$ دالة، حيث I فترة مفتوحة و $a\in \mathbb{R}$. يقال إن الدالة f متصلة عند $x\ =a$ إذا تحققت الشروط التالية:

١- الدالة معرفة عند $x\ =a$، أي أن $f\ (a)$ موجودة.

٢- $\lim\limits_{x\to a} f\ (x)$ موجودة.

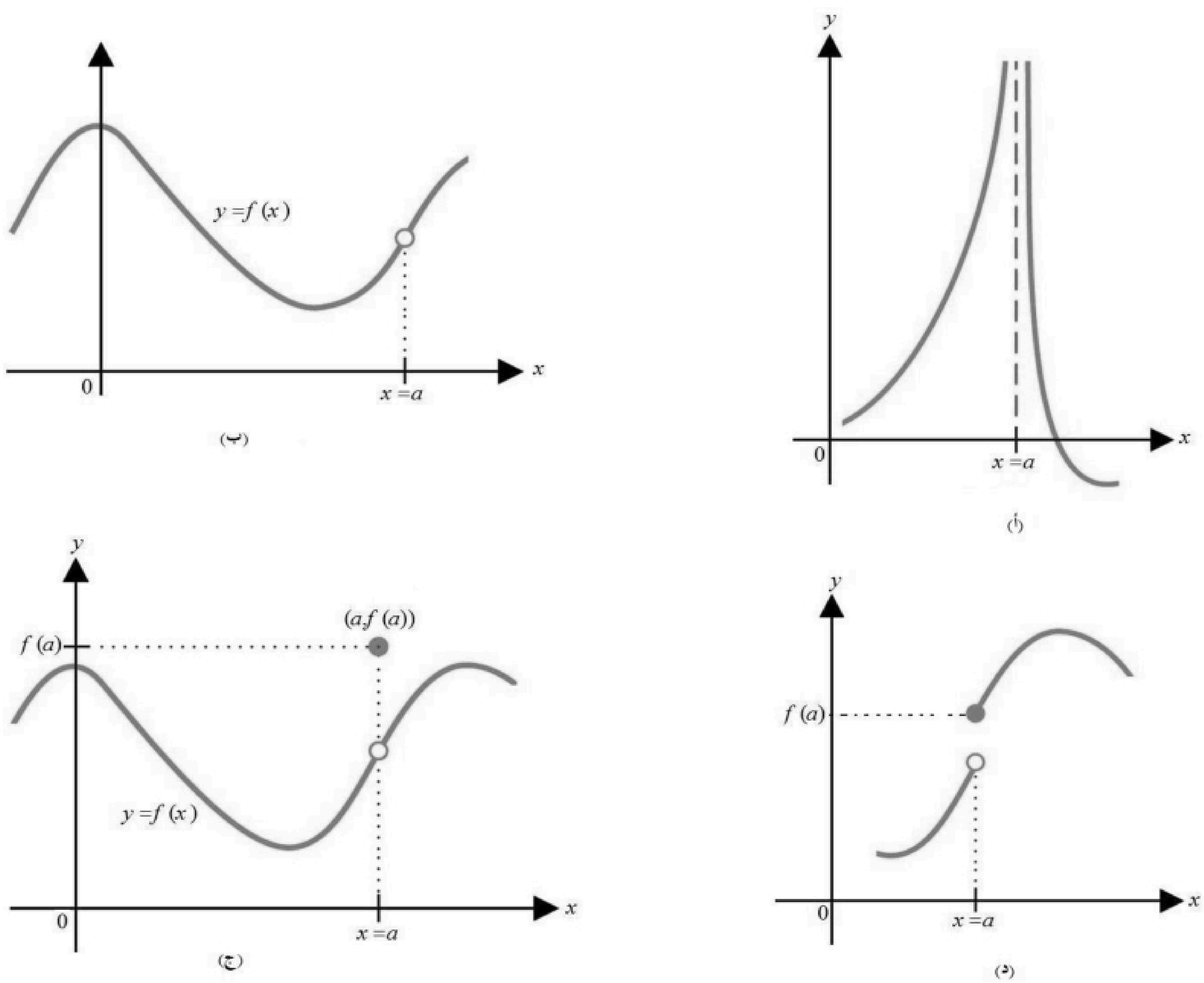
٣- $\lim\limits_{x\to a} f\ (x)=f\ (a)$

وإذا لم يتحقق أحد الشروط السابقة يقال إن الدالة غير متصلة عند $x\ =a$.

يمكن تعريف الاتصال بطريقة أخرى كما يلي: لتكن I فترة مفتوحة تحوي a، تكون الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ متصلة عند a، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

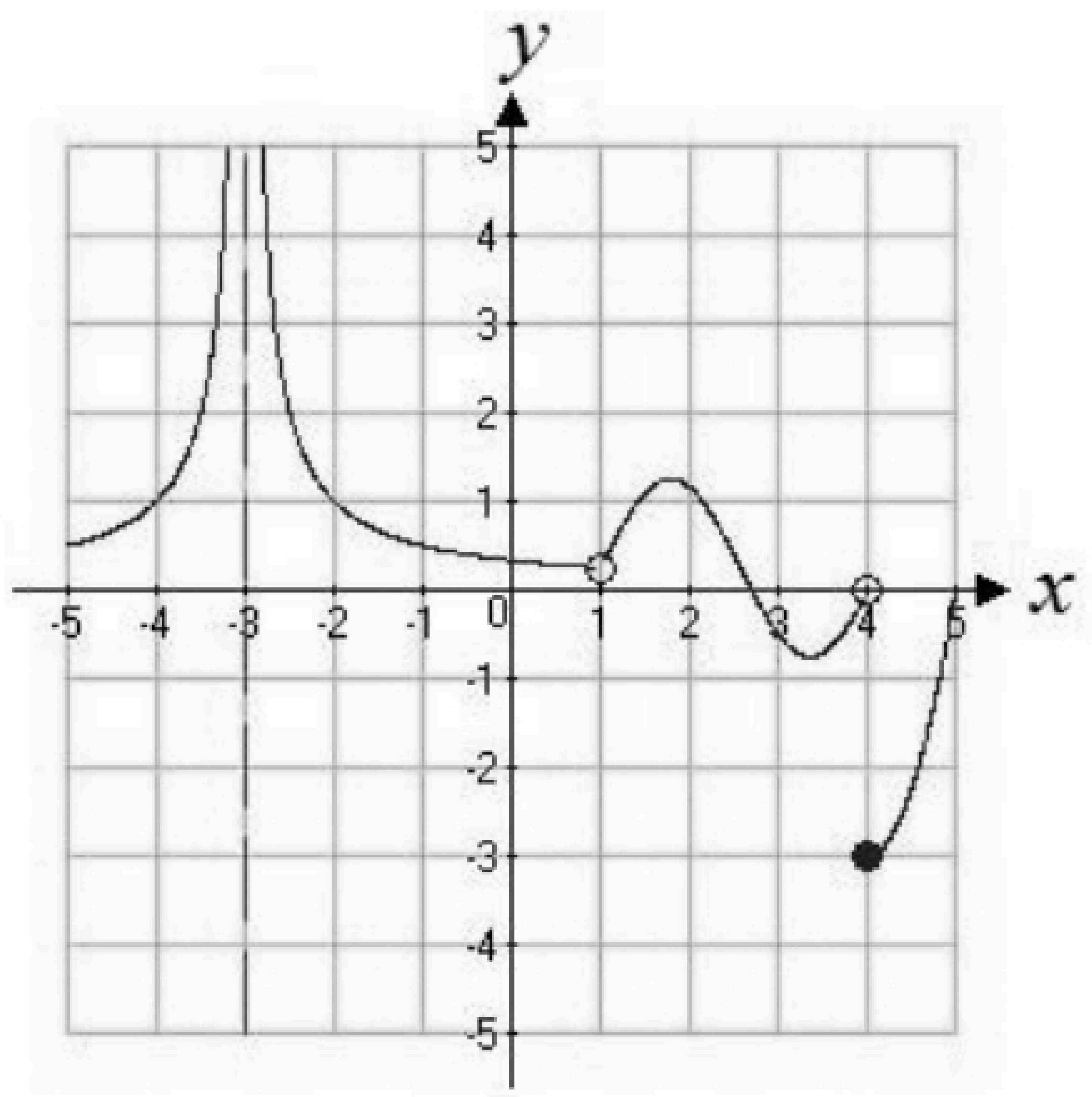
الأشكال الآتية تبين الحالات المختلفة لعدم اتصال دالة. في الشكل (٤,١-أ)، نهاية الدالة $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة. في الشكل (٤,١-ب)، الدالة غير معرفة عند $x = a$. في الشكل (٤,١-ج)، الدالة معرفة عند $x = a$ وكذلك $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ولكن $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. في الشكل (٤,١-د)، نهاية الدالة $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة ولكن الدالة معرفة عند $x = a$.



الشكل (٤,١).

مثال (٤,١)

لتكن الدالة f معرفة كما في الشكل (٤,٢)، من خلال بيان منحنى الدالة أوجد نقاط عدم الاتصال مع بيان السبب.



الشكل (٤,٢).

الحل

لنفرض أننا نود رسم الدالة f، نقاط عدم الاتصال هي النقاط التي نضطر فيها لرفع القلم عن الورقة. ونلاحظ من خلال الشكل (٤,٢) أن الدالة غير متصلة عند النقاط التالية:

١- $x=-3$ (وذلك لأن $\lim_{x \to -3} f(x)$ غير موجودة).

٢- $x=1$ (لأن الدالة غير معرفة عند $x=1$).

٣- $x=4$ (لأن $\lim_{x \to 4} f(x)$ غير موجودة). □

مثال (٤,٢)

بين ما إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 3$ أم لا.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3,\\ 6 & x=3.\end{cases}$$

الحل

١- الدالة معرفة عند $x = 3$، وقيمتها $f(3)=6$.

٢- $$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

٣- من (١) و (٢) نجد $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=6$

إذاً الدالة متصلة عند $x = 3$. □

مثال (٤,٣)

أوجد قيمة a التي تجعل الدالة الآتية متصلة عند $x = 0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & x\neq 0,\\ a & x=0.\end{cases}$$

الحل

لكي تكون الدالة متصلة عند $x = 0$ يجب أن يكون $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

من تعريف الدالة نجد أن $f(0)=a$، وقيمة النهاية تساوي

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}$$
$$=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin(3x)}{(3x)}=3(1)=3$$

وبمساواة قيمة النهاية مع قيمة الدالة نحصل على

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\quad\Rightarrow\quad a=3$$ □

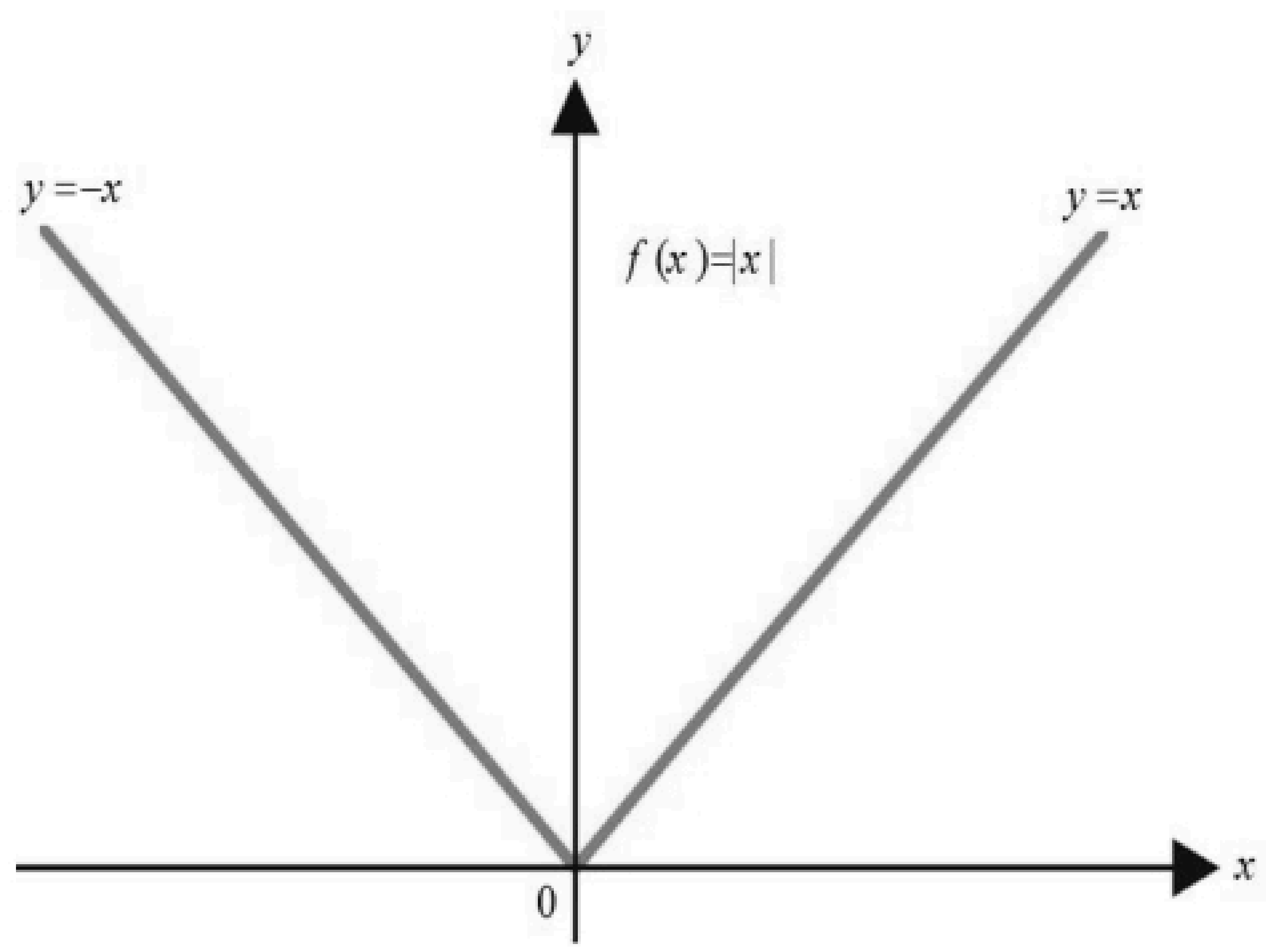
مثال (٤,٤)

ادرس اتصال الدالة $f(x)=|x|$ عند $x=0$.

الحل

أولاً : يمكن كتابة الدالة على الصورة

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0, \\ -x & x<0 \end{cases}$$



الشكل (٤,٣).

١- الدالة معرفة عند $x=0$ وقيمتها تساوي $f(0)=0$.

٢- نحسب الآن النهاية من جهة اليمين و اليسار

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0,$$

إذاً $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

٣- من (١) و(٢) نجد أن $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$. وبالتالي فإن الدالة متصلة عند $x=0$ ، كما هو موضح في الشكل (٤,٣). □

(٤,٢) الاتصال من اليمين ومن اليسار
Right and Left Continuity

في بعض الحالات تكون الدالة معرفة عن يمين $x = a$ فقط أو عن يسارها فقط. كما أنه في بعض الحالات تكون نهاية الدالة عن اليمين مختلفة عن نهاية الدالة عن اليسار. التعريف التالي يبين لنا ما هو شرط اتصال دالة من اليمين.

تعريف (٤,٢)

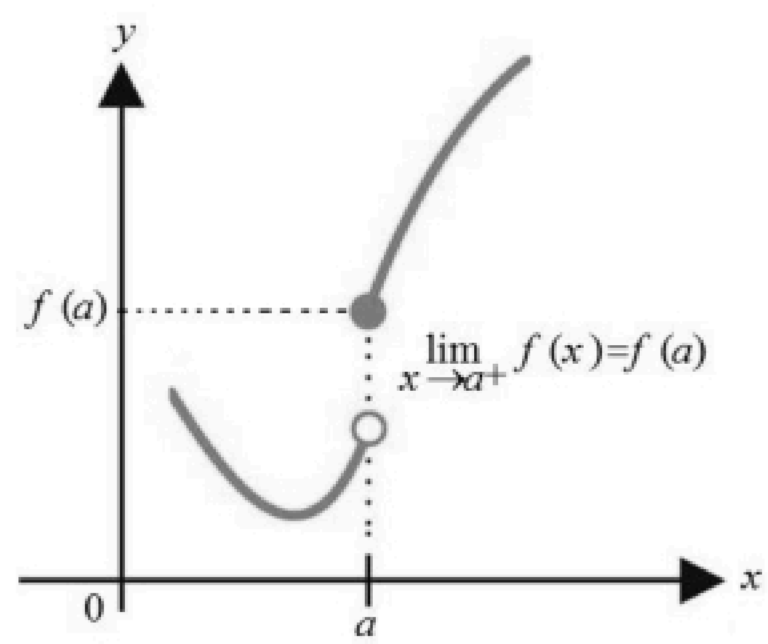
تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند $x = a$ من اليمين إذا تحقق:

١- الدالة معرفة عند $x = a$ ، أي أن $f(a)$ موجودة.

٢- $\lim_{x \to a^+} f(x)$ موجودة.

٣- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

يمثل الشكل (٤,٤) دالة متصلة من اليمين عند النقطة $x = a$.



الشكل (٤,٤).

تعريف (٤,٣)

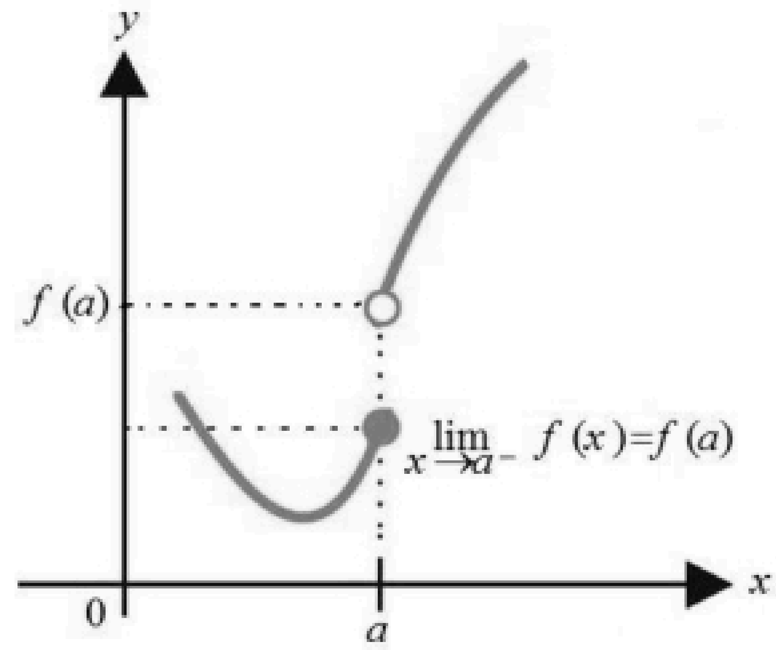
يقال أن الدالة $y = f(x)$ متصلة عند $x = a$ من اليسار إذا تحقق:

١- الدالة معرفة عند $x = a$ ، أي أن $f(a)$ موجودة.

٢- $\lim_{x \to a^-} f(x)$ موجودة.

٣- $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

يمثل الشكل (٤,٥) دالة متصلة من اليسار عند النقطة $x = a$.



الشكل (٤,٥).

مثال (٤,٥)

أوجد قيمة a التي تجعل الدالة الآتية متصلة عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 1, \\ 3-ax^2 & x > 1. \end{cases}$$

الحل

بما أن $f(1) = 1+1 = 2$ ، إذا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ 3-ax^2 & x > 1. \end{cases}$$

لكي تكون الدالة متصلة عند $x = 1$ ، لا بد أن يكون $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

من تعريف الدالة نجد $f(1) = 2$ ،

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3-ax^2) = 3-a,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2,$$

بما أن الدالة متصلة إذا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة وتساوي $f(1) = 2$ ؛ أي أن

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$
$$\Rightarrow \quad 3-a = 2$$
$$\Rightarrow \quad a = 1 \qquad \square$$

مثال (٤,٦)

ادرس اتصال الدالة الآتية عند $x = 0$

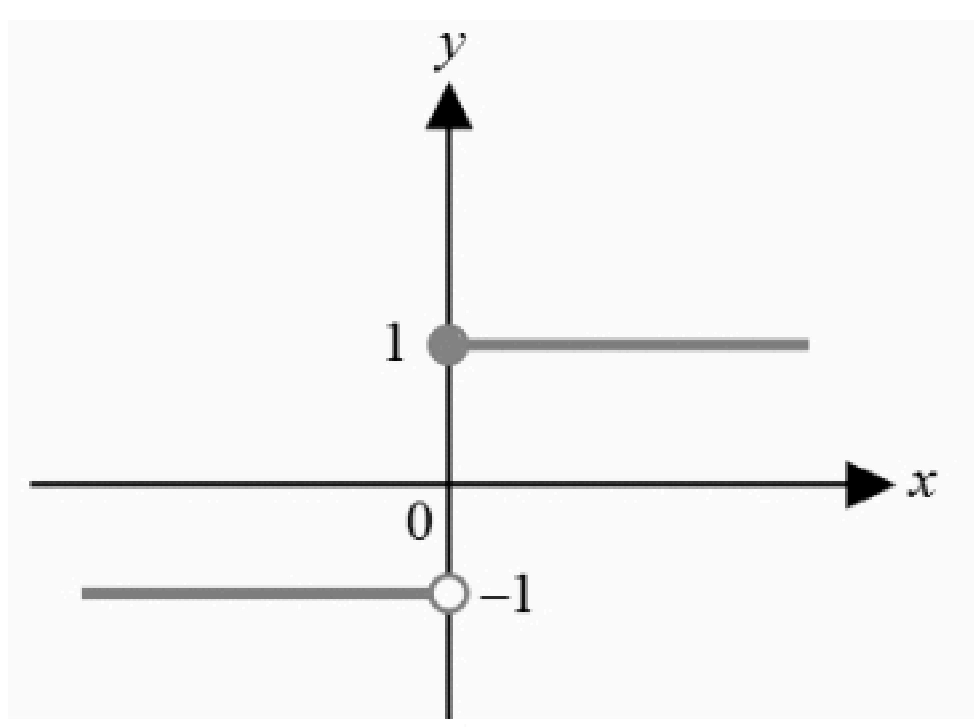
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

الحل

أولاً : يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

والتي يمكن رسمها كما هو موضح في الشكل (٤,٦)



الشكل (٤,٦).

ثانياً :

١- الدالة معرفة عند $x = 0$ ، لأن $f(0) = 1$.

٢- $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1) = -1,$$

وحيث إن $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ ، إذاً $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة.

٣- من (١) و(٢) نجد أن $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$ ، إذاً الدالة متصلة من اليمين عند $x = 0$. ولكن $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$ ، إذاً الدالة ليست متصلة من اليسار عند $x = 0$.

وبالتالي فإن الدالة غير متصلة عند $x = 0$. □

(٤,٣) خواص الدوال المتصلة

Properties of Continuous Functions

نوضح في هذا القسم بعض الخواص المتعلقة بالدوال المتصلة. النظرية التالية تبين أن جمع وطرح وضرب دالتين متصلتين هي دالة متصلة، وقسمة دالة متصلة على دالة متصلة هي دالة متصلة ما عدا عند أصفار المقام.

نظرية (٤,١)

إذا كانت $f\,,\ g$ دالتين متصلتين عند $x = a$ وكان $c \in \mathbb{R}$ فإن الدوال التالية متصلة عند $x = a$.

١- $f + g$ ٢- $f - g$

٣- cf ٤- $f \cdot g$

٥- الدالة $\dfrac{f}{g}$ تكون متصلة عند $x = a$ إذا كان $g(a) \neq 0$.

نتيجة

١- كل كثيرة حدود تكون متصلة على $\mathbb{R}$.

٢- كل دالة كسرية تكون متصلة على مجالها.

مثال (٤,٧)

أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$

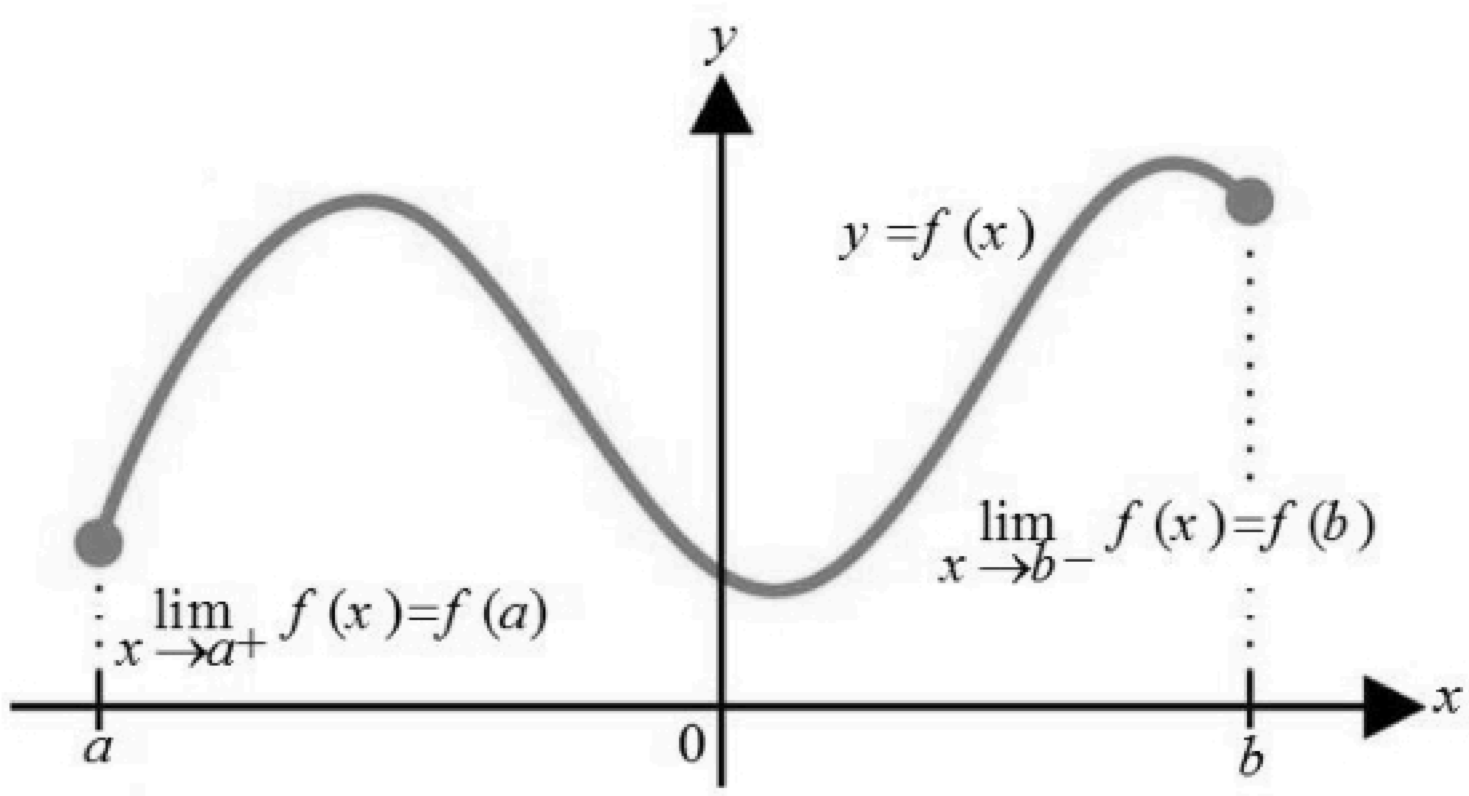
الحل

الدالة متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية ماعدا أصفار المقام وهي النقاط $x=-1,\ 1,\ 2$. □

تعريف (٤,٤)

تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة على الفترة (a,b) إذا كانت متصلة عند جميع نقاط هذه الفترة. وتكون متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا كانت متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) ومتصلة من اليمين عند $x=a$ ومن اليسار عند $x=b$.

يوضح الشكل (٤,٧) بيان دالة $y=f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$.



الشكل (٤,٧).

ملاحظة

تكون الدالة متصلة على $\mathbb{R}$، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في $\mathbb{R}$.

مثال (٤,٨)

ادرس اتصال الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ على مجال تعريفها.

الحل

مجال تعريف الدالة هو

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ 1 \geq x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ |x| \leq 1\} \\ &= [-1,1] \end{aligned}$$

الدالة تكون متصلة على الفترة $[-1,1]$ ، إذا كانت متصلة عند جميع نقاط الفترة المفتوحة $(-1,1)$ ومتصلة من اليمين عند $x = -1$ ومتصلة من اليسار عند $x = 1$.

لأي $a \in (-1,1)$ ، فإن

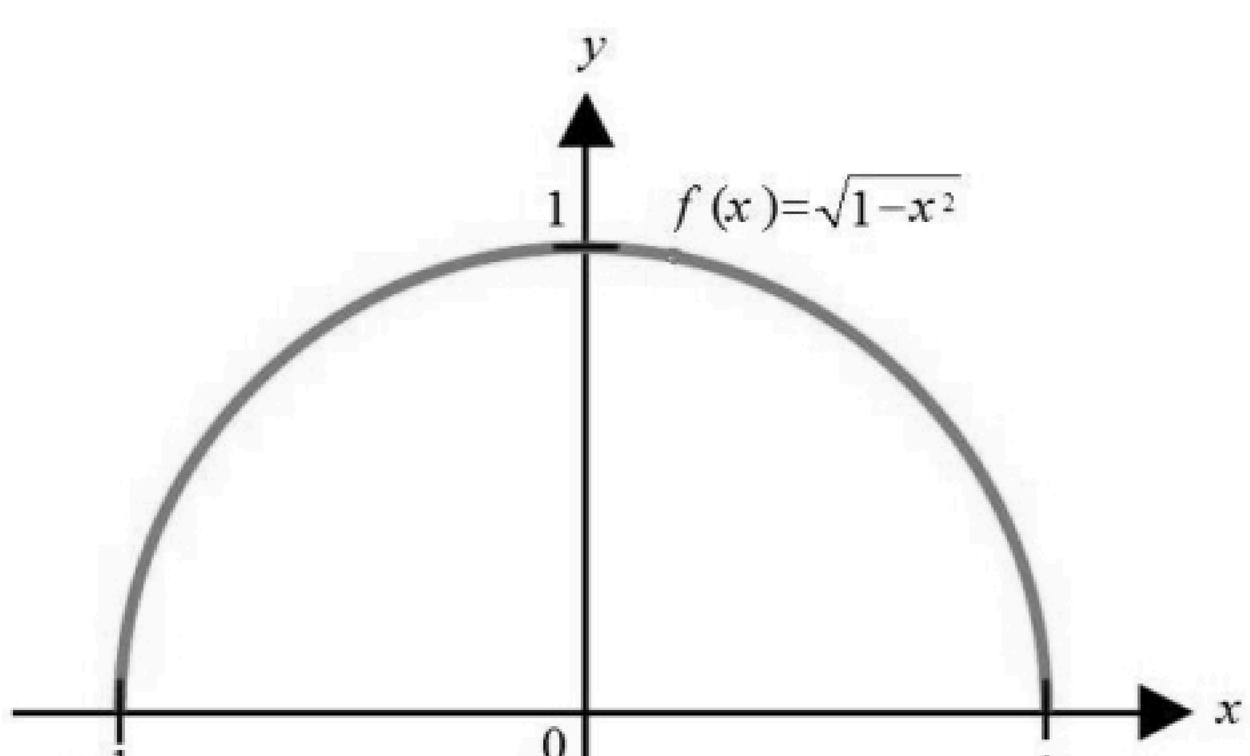
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-a^2} = f(a)$$

إذا الدالة متصلة على الفترة المفتوحة $(-1,1)$. كما أن الدالة متصلة من اليمين عند $x = -1$ ومن اليسار عند $x = 1$ لأن:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1),$$

إذا الدالة متصلة على الفترة المفتوحة $[-1,1]$. يوضح الشكل (٤,٨) بيان الدالة f. □



الشكل (٤,٨).

ملاحظة

١- الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^{+}\bigcup\{0\}=[0,\infty)$.

٢- الدوال $\sin x\,,\ \cos x\,,\ |x|$ متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (٤,٩)

ادرس اتصال الدالة الآتية على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0, \\ x & 0\le x<1, \\ -x^{2}+4x-2 & 1\le x<3, \\ 4-x & 3\le x \end{cases}$$

الحل

الدالة تكون متصلة على $(-\infty,\infty)$ ، إذا كانت متصلة على الفترات المفتوحة $(-\infty,0)$ و $(0,1)$ و $(1,3)$ و $(3,\infty)$ وعند النقاط $x=0,\ 1,\ 3$.

أولاً: الدالة متصلة على الفترات $(-\infty,0)$ و $(0,1)$ و $(1,3)$ و $(3,\infty)$ لأنها في كل فترة تمثل كثيرة حدود.

ثانياً: اتصال الدالة عند $x=0$.

١- الدالة معرفة عند $x=0$ ، وقيمتها تساوي $f(0)=0$.

٢- نحسب الآن النهاية اليمنى واليسرى للدالة

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}} 0=0,$$
$$\lim_{x\to 0^{-}} f(x)=\lim_{x\to 0^{-}} x=0$$

إذا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

٣- بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ ، إذاً الدالة f متصلة عند $x=0$.

ثالثاً: اتصال الدالة عند $x=1$.

١- الدالة معرفة عند $x=1$ ، وقيمتها تساوي

$$f(1)=-(1)^{2}+4(1)-2=-1+4-2=1$$

٢- نبحث النهاية عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} -x^2+4x-2=1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$$

إذا $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

٣- بما أن $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$ ، إذاً الدالة متصلة عند $x=1$.

رابعاً: اتصال الدالة عند $x=3$.

١- الدالة معرفة عند $x=3$ ، وقيمتها تساوي $f(3)=4-(3)=1$.

٢- نبحث النهاية عند $x=3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} (4-x)=4-3=1,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} (-x^2+4x-2)$$
$$=\lim_{x\to 3^-} (-(3)^2+4(3)-2)=-9+12-2=1,$$

إذا $\lim_{x\to 3} f(x)=1$

٣- بما أن $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=1$ ، إذاً الدالة متصلة عند $x=3$.

مما سبق يتضح أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$. $\square$

نظرية (٤,٢)

إذا كانت f دالة متصلة عند b وكانت $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، فإن:

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(b)$$

مثال (٤,١٠)

أوجد $\lim_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$

الحل

بما أن الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة على الفترة $[0,\infty)$ ، إذا من النظرية (٤,٢) نجد أن :

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\sqrt{2} \qquad \square$$

من النظرية السابقة يمكن استنتاج أن تحصيل دالتين متصلتين يكون دالة متصلة وهو ما توضحه النظرية التالية :

نظرية (٤,٣)

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=b$ وكانت f دالة متصلة عند $g(b)$ ، فإن الدالة $f\circ g$ تكون متصلة عند $x=b$ ، ويكون

$$\lim_{x\to b}f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to b}g(x)\right)=f\left(g(b)\right)$$

مثال (٤,١١)

ادرس اتصال الدالة $h(x)=|4x^2+3x-1|$ على $\mathbb{R}$.

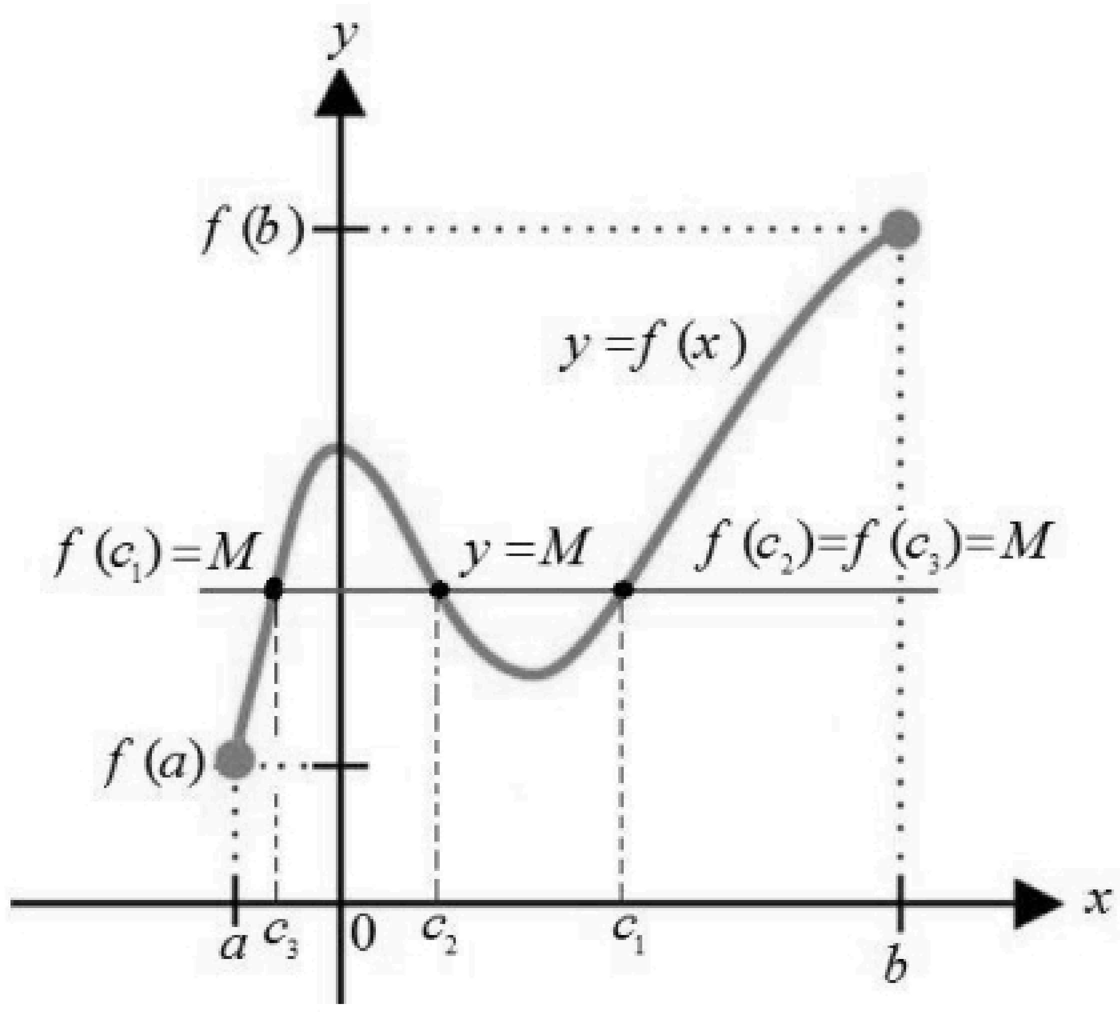
الحل

بما أن الدالة $h(x)=|4x^2+3x-1|$ تمثل تحصيل دالتين متصلتين $f(x)=|x|$ و $g(x)=4x^2+3x-1$ على $\mathbb{R}$ ، فإن الدالة $h(x)=f(g(x))=|4x^2+3x-1|$ تكون متصلة على $\mathbb{R}$. $\square$

نظرية (٤,٤) نظرية القيمة الوسيطية

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان العدد M يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=M$.

النظرية السابقة تؤكد على وجود نقطة واحدة على الأقل. في بعض الحالات قد يوجد أكثر من نقطة c تحقق $f(c)=M$ ، يوجد في الشكل (٤،٩) ثلاث نقاط تحقق النظرية.



الشكل (٤,٩).

(٤,٤) تمارين عامة

في التمارين من (١) إلى (٤) حدد نقاط عدم اتصال الدالة f :

١- $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

٢- $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

٣- $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

٤- $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

في التمارين من (٥) إلى (٩) أوجد قيمة a التي تجعل الدالة متصلة عند النقطة المحددة.

٥- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{2x} & x\neq 0, \\ a & x=0. \end{cases}$ عند $x=0$

٦- $f(x)=\begin{cases} 2+x & x<2 \\ a & x=2 \\ 6-x & x>2 \end{cases}$ عند $x=2$

٧- $f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ a & x=0 \\ \cos x & x>0 \end{cases}$ عند $x=0$

٨- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{2x} & x\neq 0, \\ a & x=0. \end{cases}$ عند $x=0$

٩- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x\neq 1, \\ a & x=1. \end{cases}$ عند $x=1$

١٠- أوجد قيمة a, b التي تجعل الدوال الآتية متصلة على $\mathbb{R}$

أ) $f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ ax+b & 0\leq x\leq 4 \\ 0 & x>4 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x & x<-1 \\ ax+b & -1\leq x\leq 2 \\ 2x-7 & 2<x \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} -2\sin x & x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2}\leq x \end{cases}$

١١- ادرس اتصال الدوال التالية على مجال تعريفها :

أ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ب) $f(x)=|1-x^2|$

ج) $f(x)=\sqrt{x-1}$ د) $f(x)=\tan x$