الفصل الثاني

الدوال
FUNCTIONS

تعد الدوال من المواضيع الأساسية عند دراسة موضوع التفاضل والتكامل. في هذا الفصل سوف نقوم بتعريف الدوال ونذكر خصائصها وأنواعها.

(٢,١) تعاريف أساسية
Basic Definitions

تعريف (٢,١) الدالة الحقيقية

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ وغير خاليتين. نقول عن f أنها دالة من A إلى B (نرمز لذلك بالرمز $f : A \to B$) إذا كانت f تحدد لكل عنصر من A عنصراً وحيداً في B.

في التعريف السابق المجموعة A هي مجال (domain) الدالة f ويرمز لها بالرمز D_f والمجموعة B هي المجال المقابل (codomain) للدالة f.

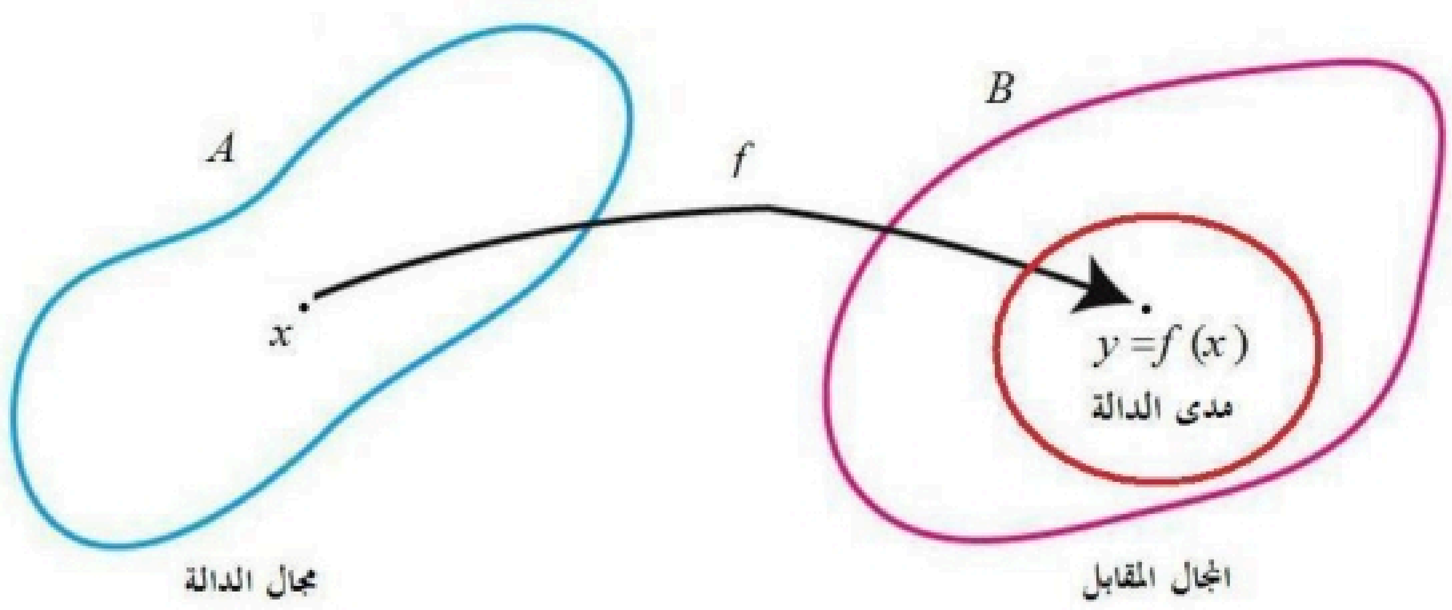
إذا كانت الدالة f تقرن العنصر $x \in A$ بالعنصر $y \in B$ فإننا نرمز لـ y بالرمز $y = f(x)$ ونقول إن y هي صورة x تحت تأثير الدالة f.

تعريف (٢,٢) المدى

لتكن $f : A \to B$ دالة. يعرف مدى (range) الدالة f بأنه جميع العناصر في المجال المقابل التي هي عبارة عن صور لعناصر المجال، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل B ، ويرمز للمدى بالرمز R_f. أي أن

$$R_f = \{f(x) : x \in A\}$$

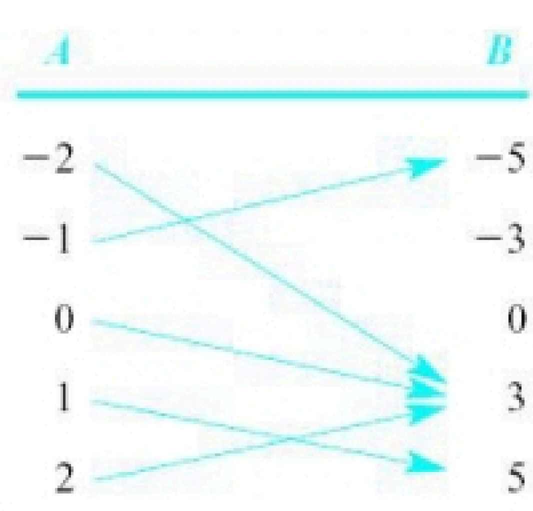
يوضح الشكل (٢,١) العلاقة بين المجال ، المجال المقابل والمدى



الشكل (٢,١).

مثال (٢,١)

لتكن لدينا الدالة $f : A \to B$ معرفة كما في الشكل (٢,٢)



الشكل (٢,٢).

في هذه الحالة يكون لدينا مجال f هو $D_f = A = \{-2,-2,0,1,2\}$ والمجال المقابل هو $B = \{-5,-3,0,3,5\}$ والمدى $R_f = \{-5,3,5\}$ كما أن $f(-2)=3$ ، $f(-1)=-5$ ، $f(0)=3$ ، $f(1)=5$ و $f(2)=3$. □

سيكون اهتمامنا مركزاً على الدوال الحقيقية التي فيها كل من A و B مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

مثال (٢,٢)

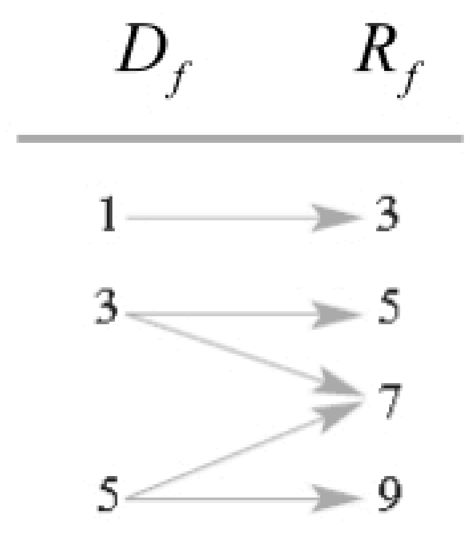
١- لتكن لدينا الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x)=2x$ ، في هذه الدالة نجد أن $f(1)=2$ و $f(2)=4$.

٢- لتكن $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x)=x^2+1$ ، في هذه الدالة نجد أن $f(1)=2$ و $f(3)=10$. □

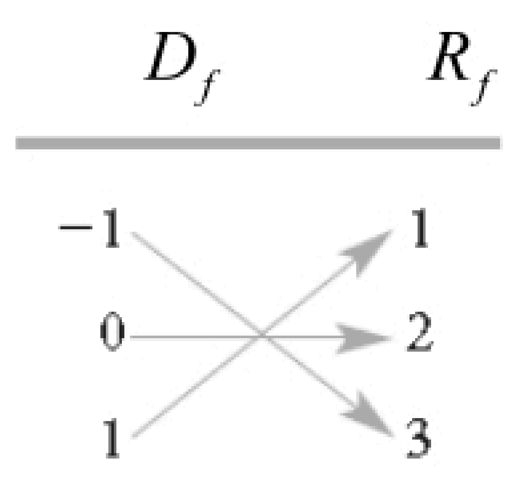
تمارين (٢,١)

١- بين أي مما يلي يمثل دالة

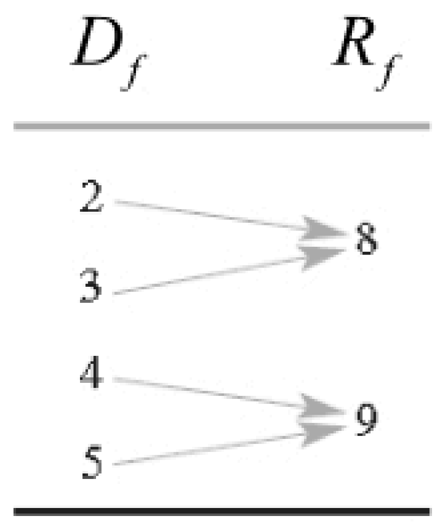
أ)



ب)



ج)



٢- لتكن لدينا الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2 + 2x$، أوجد:

. $f(-\frac{1}{2}), f(4), f(0)$

٣- لتكن لدينا الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة :

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 11 & x < -2 \\ 3 & -2 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} & 1 < x \end{cases}$$

أوجد : $f(-4),\ f(-2),\ f(1),\ f(2)$.

٤- لتكن لدينا الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 16 + 3x - x^2$، أوجد:

. $f(7), f(k)$

٥- بين أي من المعادلات الآتية يمثل داله :

أ) $x + y = 1$ ب) $x^2 + y = 16$

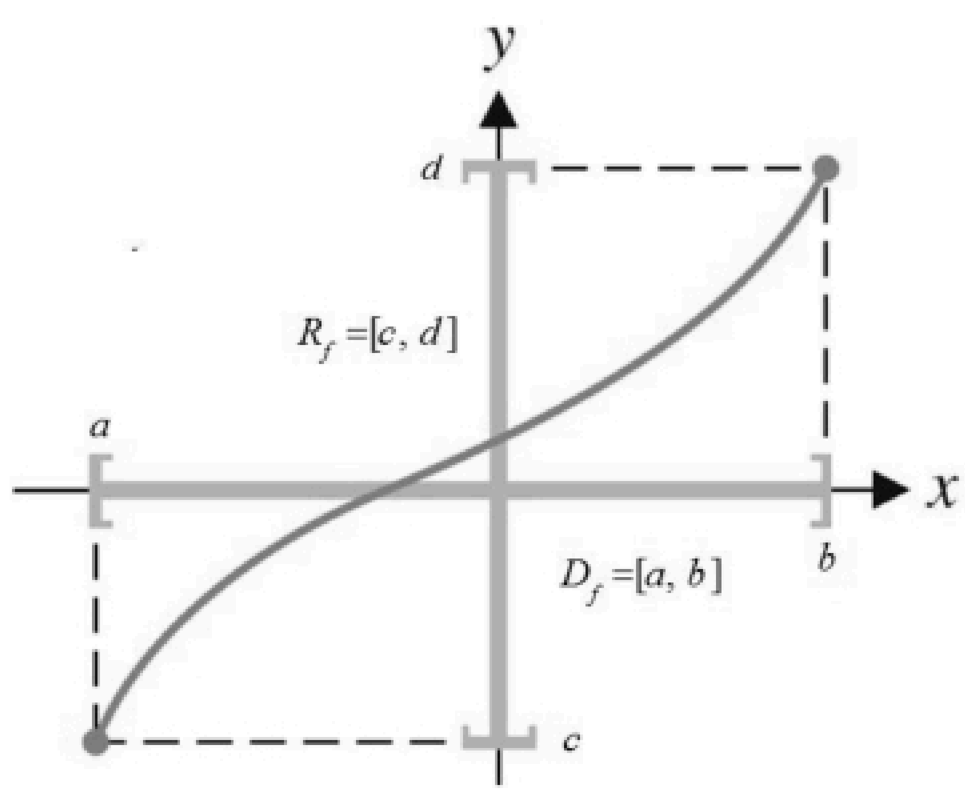
ج) $x + y^2 = 16$ د) $x^2 + y^2 = 4$

(٢,٢) مجال الدالة الحقيقية ومداها

Domain and Range of Real Functions

قمنا في القسم السابق بتعريف مجال الدالة الحقيقية ومداها. في هذا القسم نبين كيف يمكن إيجاد مجال ومدى دالة حقيقية. لإيجاد مجال دالة حقيقية فإننا نوجد مجموعة

النقاط $x \in \mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة معرفة عند هذه النقاط، فمثلاً إذا كان لدينا دالة كسرية فإننا نستبعد أصفار المقام؛ لأن الدالة الكسرية غير معرفة عند أصفار المقام. أما إذا كانت الدالة تحتوي على جذر فإن ما تحت الجذر لابد أن يكون غير سالب. يوضح الشكل (٢,٣) المجال والمدى للدالة f.



الشكل (٢,٣).

مثال (٢,٣)

عين مجال ومدى الدوال الآتية، ثم ارسم بيان كل منها:

١- $f(x) = 3x - 2$

٢- $g(x) = x^2$

٣- $h(x) = |x|$

٤- $f(x) = \sqrt{x}$

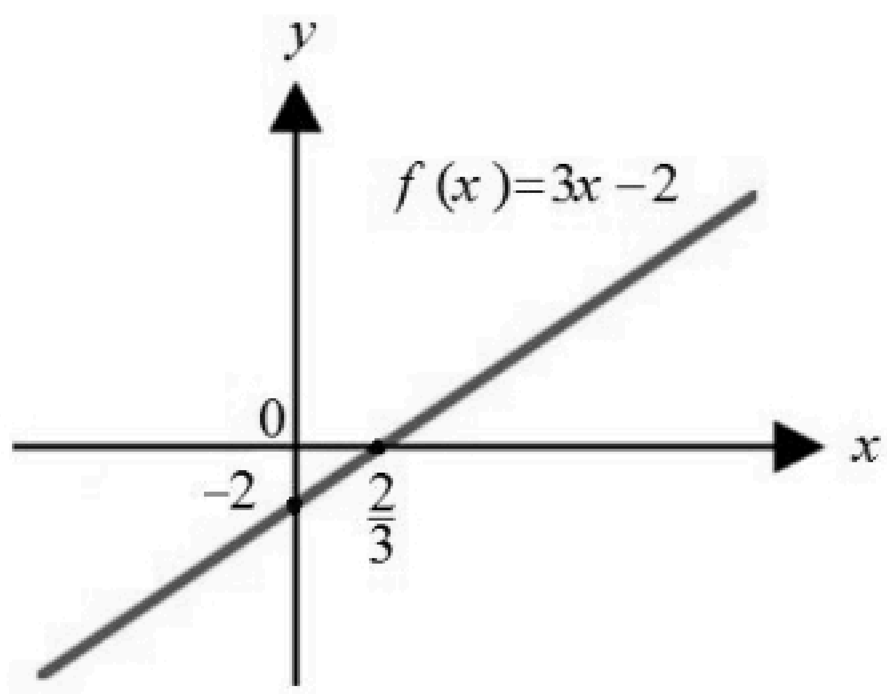
الحل

١- الدالة $f(x) = 3x - 2$ تمثل كثيرة حدود من الدرجة الأولى وبالتالي فإن مجال تعريفها هو $\mathbb{R}$. أما مدى الدالة فهو $\mathbb{R}$ كذلك لأن f كثيرة حدود من الدرجة

الأولى وهي تمثل معادلة خط مستقيم. لرسم بيان الدالة نقوم بالتعويض ببعض النقاط كما في الجدول التالي

x	-1	0	1
$f(x)$	-5	-2	1

يوضح الشكل (٢.٤) بيان منحنى الدالة.

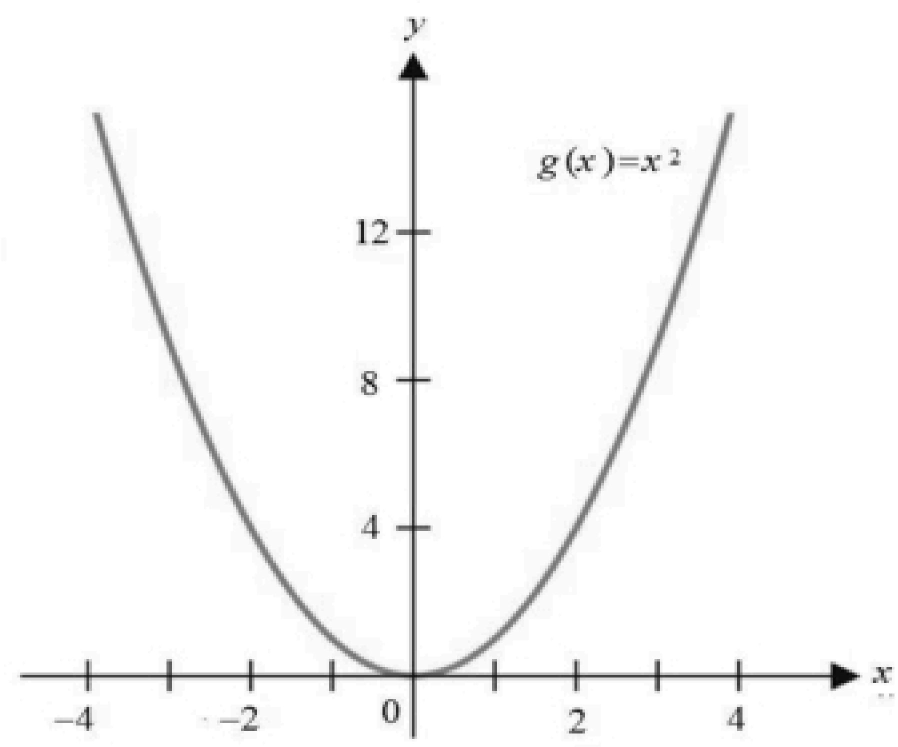


الشكل (٢,٤).

٢- مجال تعريف الدالة $g(x)=x^2$ هو $\mathbb{R}$ ؛ لأنها تمثل كثيرة حدود من الدرجة الثانية. لرسم الدالة نعوض ببعض النقاط كما في الجدول التالي

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	4	1	0	1	4

نلاحظ أن الدالة $x^2 \geq 0$ ، وبالتالي فإن مدى الدالة هو $[0,\infty)$. يوضح الشكل (٢.٥) بيان منحنى الدالة.



الشكل (٢,٥).

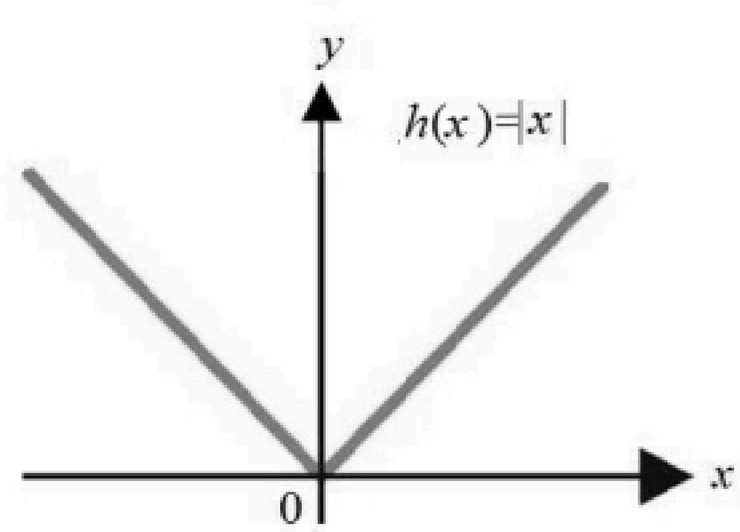
٣- يمكن كتابة الدالة $h(x)=|x|$ بالصورة :

$$h(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

مجال تعريف الدالة h هو $\mathbb{R}$ ومداها $[0,\infty)$ لأن $|x|\geq 0$. لرسم منحنى الدالة نقوم بالتعويض ببعض القيم، فنحصل على الجدول التالي

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	2	1	0	1	2

يوضح الشكل (٢,٦) بيان الدالة.

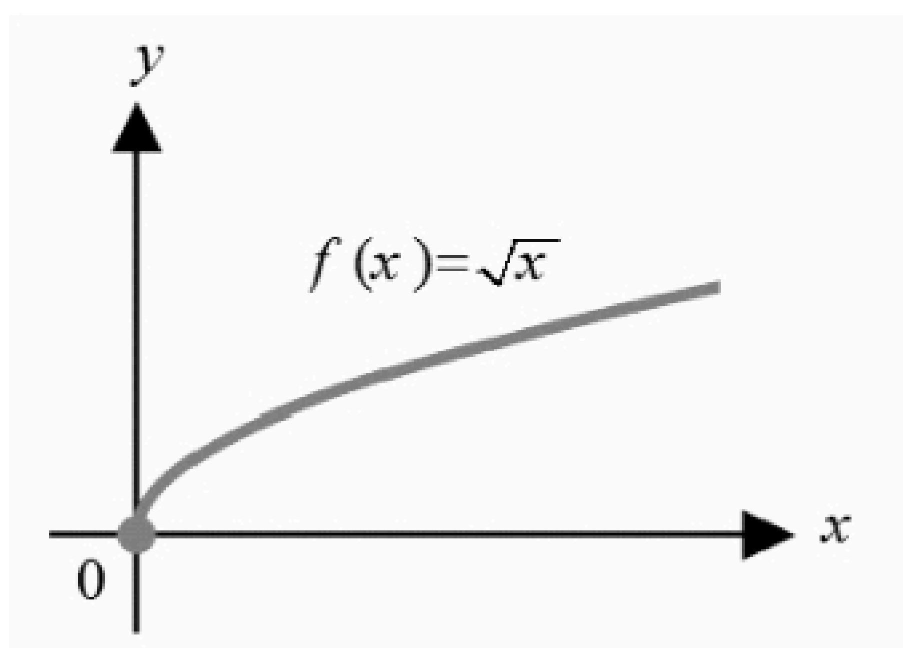


الشكل (٢,٦).

٤- لإيجاد مجال تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ نلاحظ أن الشرط على قيم x الموجودة تحت الجذر أن تحقق $x \geq 0$ ، وبالتالي فإن مجال الدالة هو $[0,\infty)$. لرسم منحنى الدالة نقوم بالتعويض ببعض القيم كما هو موضح في الجدول التالي

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

أما مدى الدالة فهو $[0,\infty)$. يوضح الشكل (٢،٧) بيان الدالة. □



الشكل (٢،٧).

مثال (٢،٤)

أوجد مجال تعريف الدوال الآتية :

١- $f(x)=3x^2+1$ ٢- $g(x)=\dfrac{2}{x-3}$

٣- $h(x)=\sqrt{x-4}$ ٤- $k(x)=\sqrt{x^2-4}$

٥- $m(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$

الحل

١- بما أن f كثيرة حدود، إذاً $D_f = \mathbb{R}$.

٢- بما أن g دالة كسرية، إذاً يشترط أن المقام لا يساوي صفراً وبالتالي

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

٣- بما أن h دالة جذرية، إذاً يشترط أن يكون ما بداخل الجذر غير سالب، وبالتالي

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} \\ &= [4, \infty) \end{aligned}$$

٤- بما أن k دالة جذرية، إذاً يشترط أن يكون ما داخل الجذر غير سالب، وبالتالي

$$\begin{aligned} D_k &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ or } x \leq -2\} \\ &= (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \end{aligned}$$

٥- بما أن m دالة كسرية، إذاً يشترط أن المقام لا يساوي صفراً وبالتالي

$$\begin{aligned} D_m &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 , x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} - \{-1, 3\} \quad \square \end{aligned}$$

تمارين (٢,٢)

في التمارين من (١) إلى (١٠) عين مجال ومدى الدالة

١- $f(x) = 1 + x + x^2$

٢- $f(x) = 1 + |x|$

٣- $f(x) = |x - 2|$

٤- $f(x)=\dfrac{3x-12}{2x+4}$

٥- $f(x)=\dfrac{x^2+11}{x+5}$

٦- $f(x)=\begin{cases} x & -2\le x<1 \\ -x+2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$

٧- $f(x)=\begin{cases} 1 & -2\le x<2 \\ -3 & 2\le x\le 5 \end{cases}$

٨- $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

٩- $f(x)=\dfrac{3x-12}{x(x-1)(x+1)}$

١٠- $f(x)=\sqrt{x(x-1)(x+1)}$

(٢,٣) العمليات على الدوال
Operations on Functions

تعريف (٢,٣)

يعرف جمع وطرح وضرب وقسمة دالتين f و g بالصورة:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\qquad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\qquad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\qquad x\in D_f\bigcap D_g,\ g(x)\neq 0,$$

ويكون مجال الدوال السابقة كما يلي

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\bigcap D_g,$$
$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\bigcap D_g\right)-\{x:g(x)=0\}$$

مثال (٢,٥)

أوجد حاصل جمع وطرح وضرب وقسمة الدالتين، $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ ، مع تعيين مجال الدوال الناتجة.

الحل

مجال تعريف كل من $f\ ,\ g$ هو:

$$D_f=\{x:4-x\geq 0\}=\{x:4\geq x\}=(-\infty,4],$$
$$D_g=\{x:3+x\geq 0\}=\{x:-3\leq x\}=[-3,\infty)$$

حاصل الجمع والطرح والضرب

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+3}\ ;$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{x+3}\ ;$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}\right)$$

مجال حاصل الجمع والطرح والضرب هو

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=(-\infty,4]\cap[-3,\infty)=[-3,4]$$

حاصل القسمة

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+3}},\quad \mathrm{x}\neq -3,$$

مجال حاصل القسمة

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x:g(x)=0\}=[-3,4]-\{-3\}=(-3,4]\qquad\square$$

مثال (٢,٦)

أوجد مجال الدالة $\qquad f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2+x}$

الحل

هـذه الدالـة عبـارة عـن حاصـل جمـع دالـتين $f(x)=g(x)+h(x)$ حيـث $h(x)=\sqrt{2+x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$. مجال الدالة g هو $\mathbb{R}-\{1\}$ ومجال الدالة h هـو $[-2,\infty)$ وبالتالي

$$\begin{aligned} D_f &= D_g \bigcap D_h \\ &= \mathbb{R}-\{-1\} \bigcap [-2,\infty) \\ &= [-2,\infty)-\{1\} \\ &= [-2,1) \bigcup (1,\infty) \qquad \square \end{aligned}$$

تعريف (٢,٤) تحصيل الدوال (تركيب الدوال)

يرمز لتحصيل الدالة f مع الدالة g بالرمز $f\circ g$ وتعرف كما يلي:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

ومجال دالة التحصيل هو

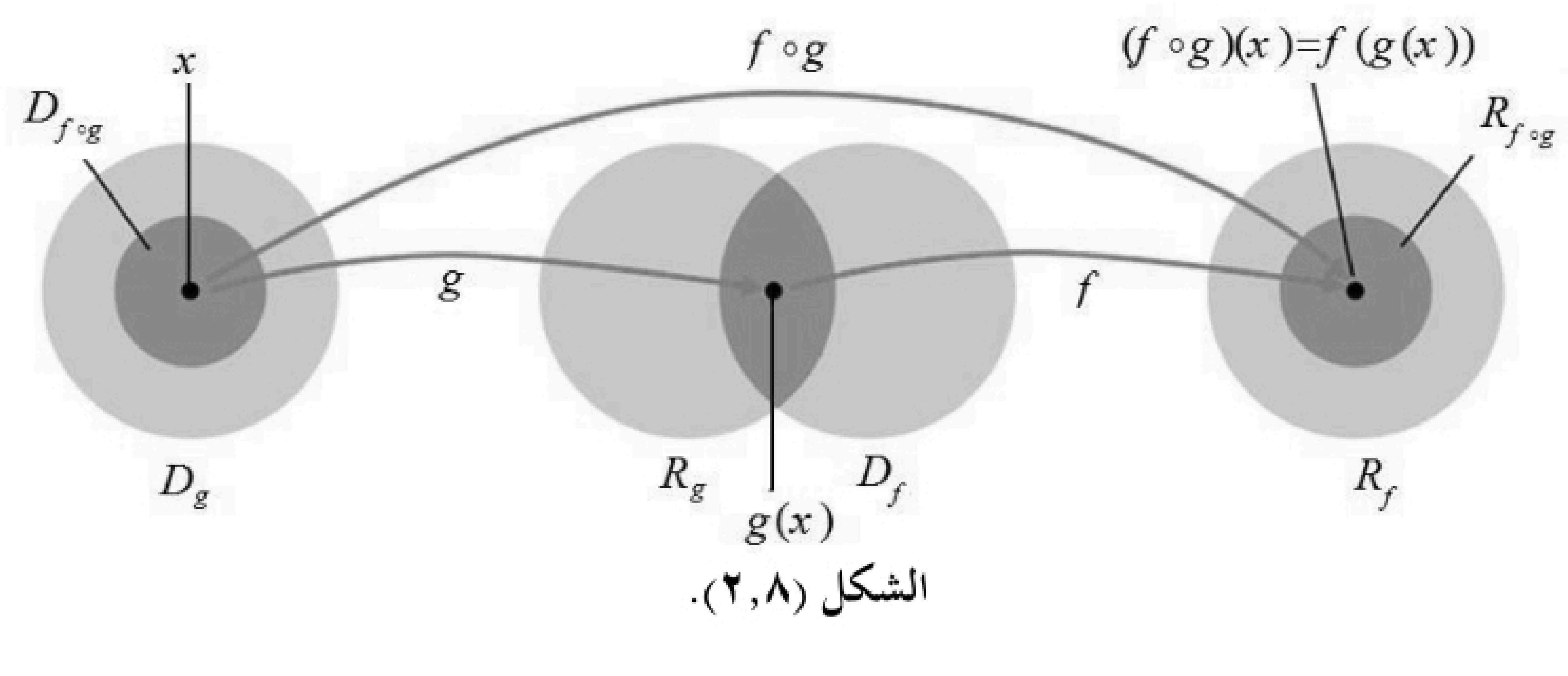
$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$$

ملاحظة

لإيجاد مجال دالة التحصيل $f\circ g$ نبحث قيم x التي تحقق

١- x تكون في مجال الدالة g.

٢- $g(x)$ تكون في مجال الدالة f. كما هو موضح في الشكل (٢,٨)



الشكل (٢,٨).

مثال (٢,٧)

إذا كان $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، أوجد:

١- $(f \circ g)(x)$ ٢- $(g \circ f)(x)$

الحل

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x + 1) \\
&= 2(\frac{1}{2}x + 1) + 1 = x + 2 + 1 = x + 3, \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) \\
&= \frac{1}{2}(2x + 1) + 1 = x + \frac{1}{2} + 1 = x + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

يتضح من هذا المثال أن عملية تحصيل الدوال ليست إبدالية وذلك لأن $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. □

مثال (٢,٨)

إذا كان $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{3 - x}$ ، أوجد $f \circ g$ وحدد مجالها.

الحل

أولاً: حساب $(f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{3 - x}) \\
&= \sqrt{4 - (\sqrt{3 - x})^2} \\
&= \sqrt{4 - 3 + x} = \sqrt{x + 1},
\end{aligned}
$$

ثانياً: مجال الدالة $f \circ g$

$$
\begin{aligned}
D_f &= \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\} \\
&= [-2, 2],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}D_g &= \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}\\ &= (-\infty, 3],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g,\ g(x) \in D_f\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ \sqrt{3-x} \in [-2, 2]\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ -2 \leq \sqrt{3-x} \leq 2\}\end{aligned}$$

وبما أن الجذر دائما غير سالب إذاً

$$\begin{aligned}D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ 0 \leq \sqrt{3-x} \leq 2\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ 0 \leq 3 - x \leq 4\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ -3 \leq -x \leq 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 3],\ 3 \geq x \geq -1\}\\ &= [-1, 3] \qquad \square\end{aligned}$$

تمارين (٢,٣)

في التمارين من (١) إلى (٤) أوجد الدوال $f+g,\ \ f-g,\ \ f.g,\ \ f/g$ ومجال تعريف كل منها

١- $f(x) = 4x$ و $g(x) = x + 1$

٢- $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = x^2 - 1$

٣- $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = \sqrt{2+x}$

٤- $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$

في التمارين من (٥) إلى (٨) أوجد الدوال $f \circ g,\ \ g \circ f$ ومجال تعريف كل منها

٥- $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2 - x + 1$

٦- $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$

٧- $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2$

٨- $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-4}{x}$

(٢,٤) تصنيف الدوال

Clasification of Functions

تعريف (٢,٥) الدالة الزوجية والدالة الفردية

تكون الدالة $f : A \to B$ زوجية، إذا كان:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall \quad x \in A$$

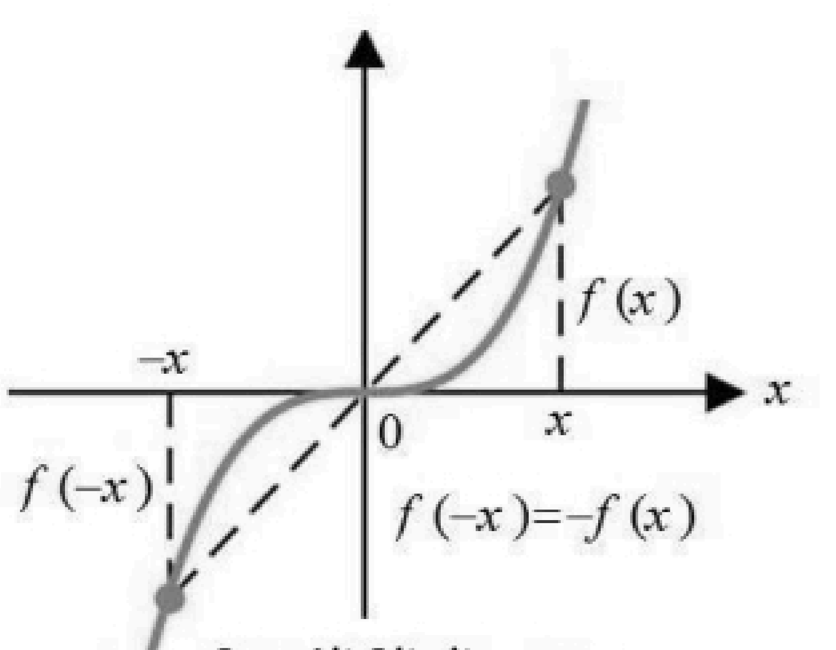
وتكون الدالة فردية، إذا كان :

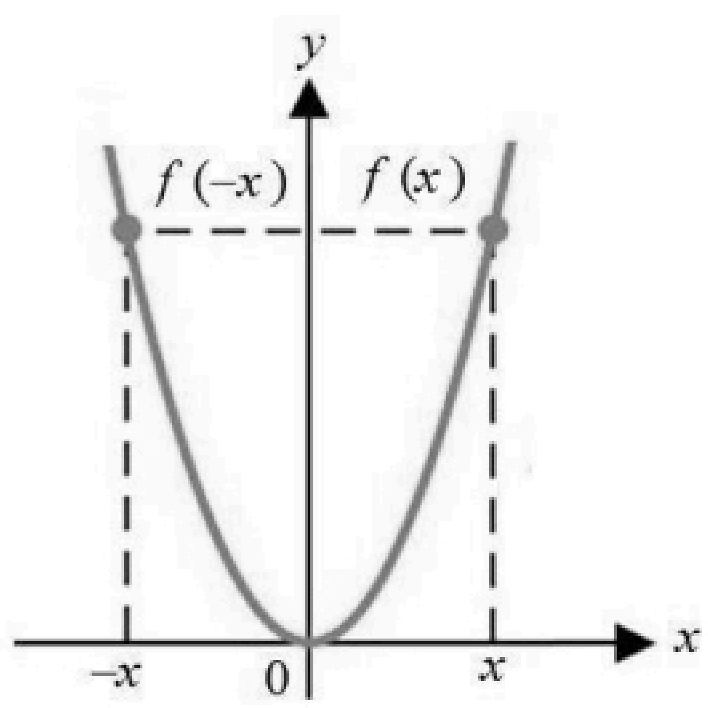
$$f(-x) = -f(x) \quad \forall \quad x \in A$$

حيث A مجال متماثل أي أن $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.

ملاحظة

بيان منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الأصل، أما بيان الدالة الزوجية فإنه يكون متماثلاً حول محور y ، يوضح الشكل (٢,٩) بيان منحنى دالة زوجية ودالة فردية.





الشكل (٢,٩).

مثال (٢,٩)

ابحث فيما إذا كانت الدوال الآتية زوجية أو فردية على مجالها:

١- $f(x)=3x^2+1$ ٢- $g(x)=x^3+x$

٣- $h(x)=|x|$ ٤- $k(x)=x^2+x$

الحل

١- $D_f=\mathbb{R}$ ، مجال متماثل، الآن نحسب $f(-x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x)&=3(-x)^2+1\\ &=3x^2+1\\ &=f(x) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

إذاً الدالة زوجية.

٢- $D_g=\mathbb{R}$ ، مجال متماثل، الآن نحسب $g(-x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(-x)&=(-x)^3+(-x)\\ &=-x^3-x\\ &=-(x^3+x)\\ &=g(x) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

إذاً الدالة فردية.

٣- $D_h=\mathbb{R}$ ، مجال متماثل

$$h(-x)=|-x|=|x|=h(x) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}$$

إذاً الدالة زوجية.

٤- $D_k=\mathbb{R}$ ، مجال متماثل

$$\begin{aligned} k(-x)&=(-x)^2+(-x)\\ &=x^2-x\end{aligned}$$

واضح أن $k(-x)\neq k(x)$ كما أن $k(-x)\neq -k(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة k ليست زوجية ولا فردية. $\square$

تعريف (٢,٦) الدالة الأحادية (المتباينة)

تكون الدالة $f: A \to B$ أحادية (متباينة) إذا كان: لكل $x_1, x_2 \in A$ بحيث $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 = x_2$

مثال (٢,١٠)

بين ما إذا كانت الدوال الآتية أحادية أم لا؟.

١- $f(x) = 2x + 3$ لكل $x \in \mathbb{R}$

٢- $f(x) = x^2$ لكل $x \in [-10,10]$

٣- $f(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}$

الحل

١- باستخدام التعريف (٢,٦) نجد أن

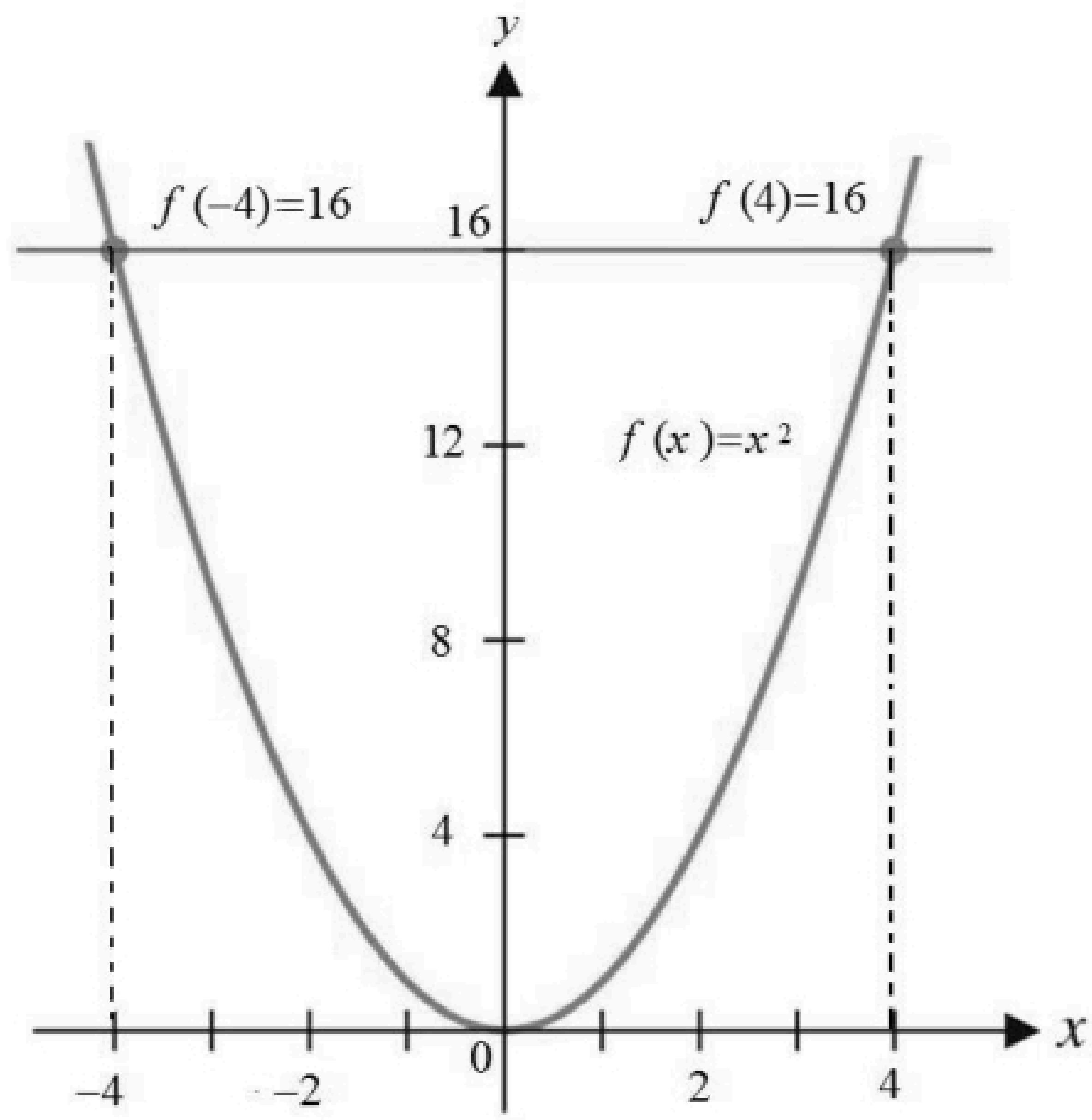
$$\begin{aligned} \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}:\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

إذاً الدالة أحادية.

٢- باستخدام التعريف (٢,٦) نجد أنه لكل $x_1, x_2 \in [-10,10]$ بحيث $f(x_1) = f(x_2)$ فإن

$$\begin{aligned} x_1^2 = x_2^2 &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2) = 0 \ \text{ or } \ (x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \ \text{ or } \ x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

إذاً الدالة ليست أحادية. فمثلاً $f(-4) = f(4) = 16$ كما هو موضح في الشكل (٢,١٠).



الشكل (٢,١٠).

٣- لتكن $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^3=x_2^3$$
$$\Rightarrow x_1^3-x_2^3=0$$
$$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0$$

وحيث إن المقدار $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$ لا يمكن تحليله، إذاً

$$(x_1-x_2)=0 \quad \Rightarrow x_1=x_2$$

إذاً الدالة أحادية. □

تعريف (٢,٧) الدالة الشاملة (الغامرة)

يقال أن $f: A \to B$ دالة شاملة إذا كان مدى الدالة f هو المجال المقابل، أي $R_f=B$. أي أنه $\forall y\in B: \quad \exists x\in A: \quad y=f(x)$

تعريف (٢,٨) التقابل

تكون الدالة $f: A \to B$ دالة تقابل إذا كانت f أحادية وشاملة.

مثال (٢,١١)

الدالة $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ هي دالة تقابل (تأكد من ذلك.) □

تمارين (٢,٤)

في التمارين من (١) إلى (٦)، بين هل الدالة زوجية أم فردية

١- $f(x) = x^2 + 1$ ٢- $f(x) = x^4 + 1$

٣- $f(x) = x^5 + x$ ٤- $f(x) = x\,|x|$

٥- $f(x) = x^2 + x - 3$ ٦- $f(x) = x^4 - 4$

في التمارين من (٧) إلى (١٢)، بين هل الدالة أحادية أم لا.

٧- $f(x) = 4 - x^2$ ٨- $f(x) = 4 - 2x$

٩- $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ ١٠- $f(x) = \sqrt{4 - x}$

١١- $f(x) = 4x - x^2$ ١٢- $f(x) = \frac{x - 4}{x + 2}$

في التمارين من (١٣) إلى (١٨)، أثبت أن الدالة تقابل على مجالها.

١٣- $f(x) = 3x$ ١٤- $f(x) = \sqrt{x - 1}$

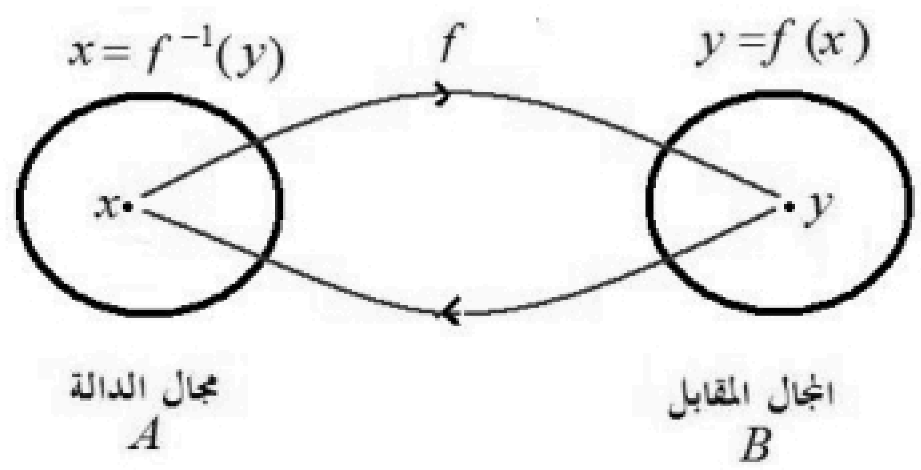
١٥- $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ ١٦- $f(x) = \sqrt{x} + 3$

١٧- $f(x) = 2 + \sqrt{5 - x}$ ١٨- $f(x) = \frac{1}{x}$

(٢,٥) الدالة العكسية

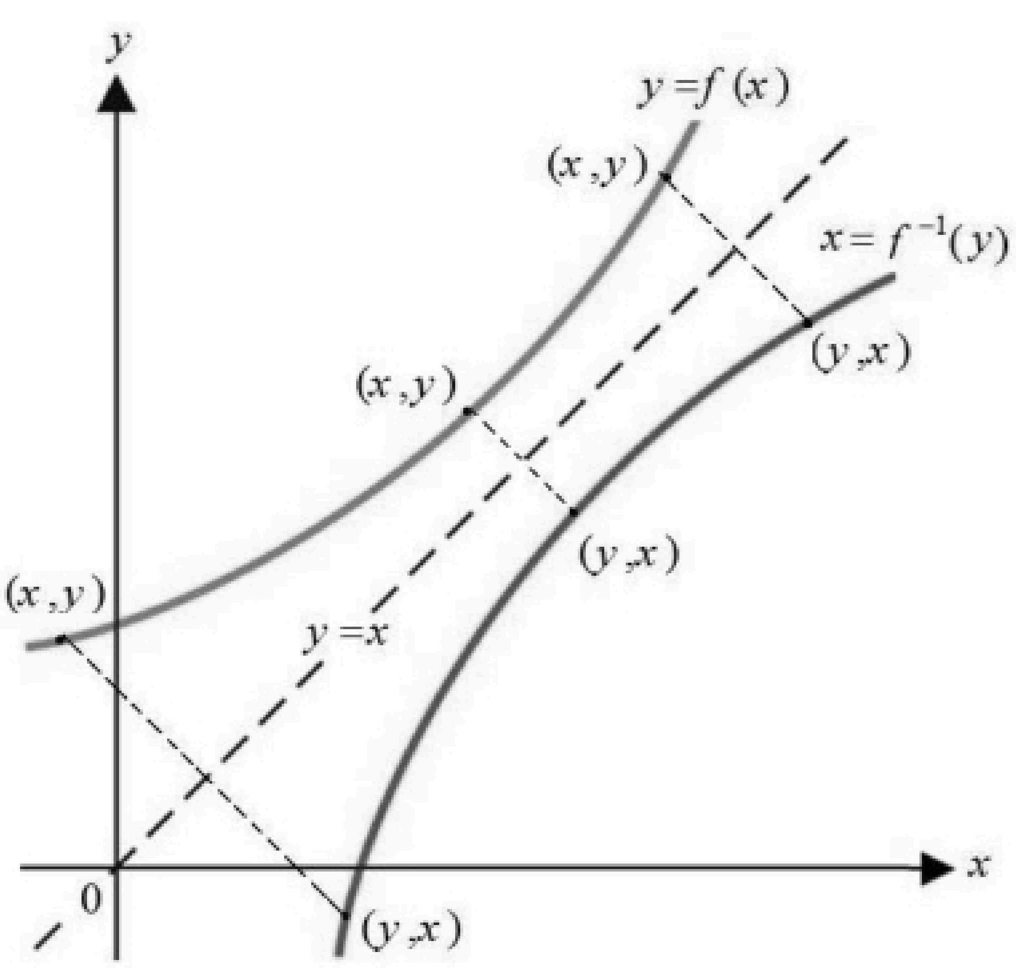
Inverse Function

عندما تكون الدالة $f: A \to B$ تقابل فإن كل عنصر من عناصر المجال المقابل يرتبط فقط بعنصر وحيد من عناصر المجال وفي هذه الحالة يمكن إيجاد دالة أخرى تسمى الدالة العكسية للدالة f، نرمز لها بالرمز f^{-1}، ويكون مجالها B ومجالها المقابل A، أي أن $f^{-1}: B \to A$. إذا كانت f معرفة بالقاعدة $f(x) = y$ فإن الدالة العكسية تعرف بالقاعدة $f^{-1}(y) = x$، كما في الشكل (٢,١١).



الشكل (٢,١١).

يمكن استنتاج بيان منحني الدالة العكسية $y = f^{-1}(x)$ من بيان منحنى الدالة الأصلية $y = f(x)$ وذلك بالتناظر حول المستقيم $y = x$ ، كما هو موضح في الشكل (٢,١٢).



الشكل (٢,١٢).

مثال (٢,١٢)

أوجد معكوس الدالة $f(x)=x^3$ ، ومن ثم ارسم بيان الدالة.

الحل

في المثال (٢,١٠) الفقرة ٣ بينا أن الدالة f متباينة. وحيث إن مدى الدالة يساوي مجالها المقابل $\mathbb{R}$ ، إذا الدالة تقابل. لإيجاد الدالة العكسية نتبع الخطوات الآتية :

١- نكتب الدالة بدلالة y

$$y=x^3$$

٢- نستبدل كل x بـ y والعكس

$$x=y^3$$

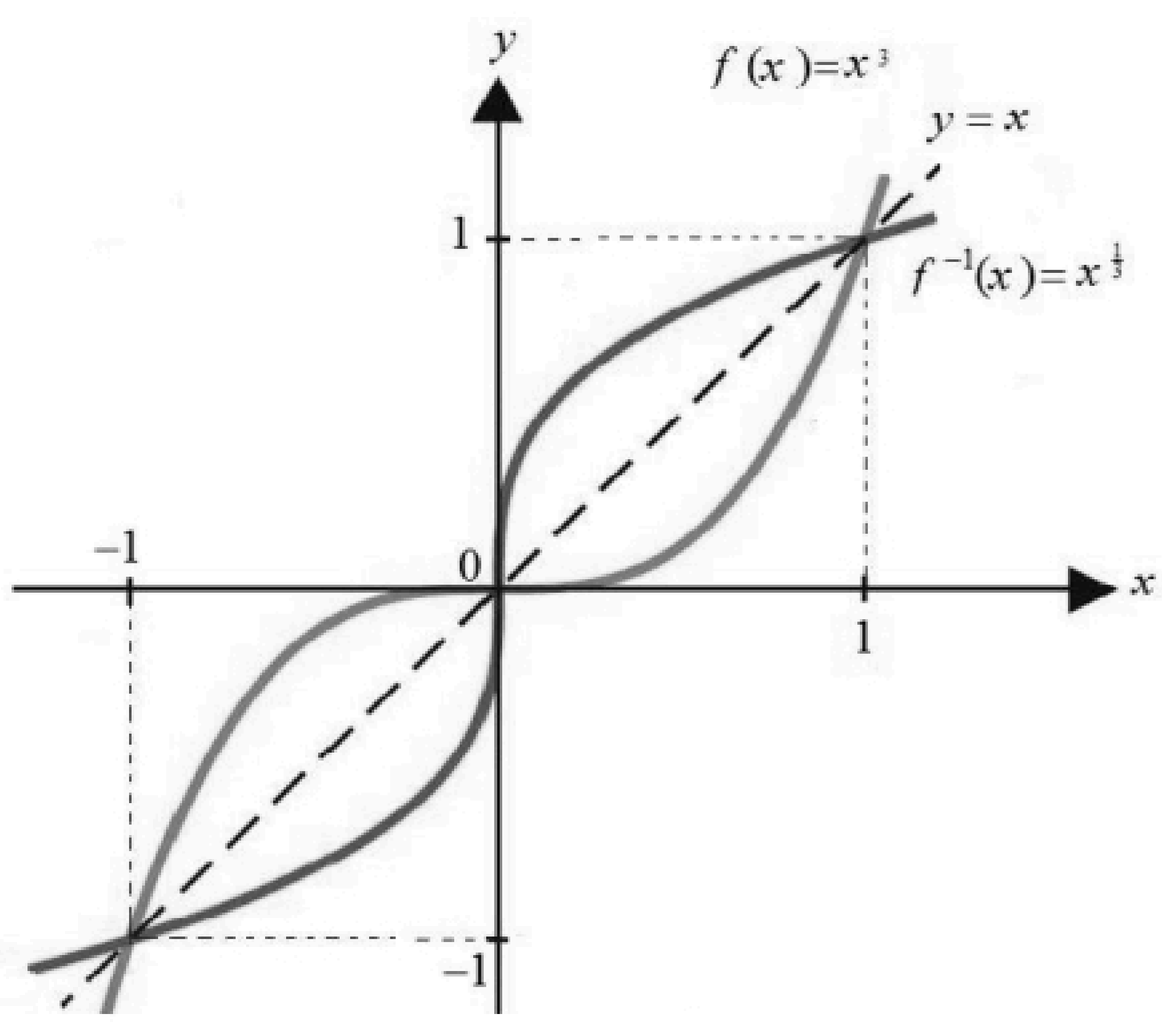
٣- نوجد قيمة y بدلالة x بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$

٤- نستبدل y بـ $f^{-1}(x)$ فنحصل على الدالة العكسية

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

من بيان الدالة الأصلية $f(x)=x^3$ نوجد بيان الدالة العكسية $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ بالتناظر حول المستقيم $y=x$ كما يوضحه الشكل (٢,١٣). □



الشكل (٢,١٣).

مثال (٢,١٣)

بين أن الدالة $f(x) = 3x - 2$ دالة أحادية ثم أوجد معكوسها .

الحل

مجال تعريف الدالة ومداها هو $\mathbb{R}$ ؛ لأنها دالة خطية (كثيرة حدود من الدرجة الأولى).

أولاً : إثبات أن الدالة أحادية :

$$\begin{aligned} \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}:\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \\ &\Rightarrow \quad 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

إذاً الدالة أحادية.

ثانياً : لإيجاد معكوس الدالة $f(x) = 3x - 2$ نتبع الخطوات السابقة

١- نكتب الدالة بدلالة y

$$y = 3x - 2$$

٢- نستبدل كل x بـ y والعكس

$$x = 3y - 2$$

٣- نوجد قيمة y بدلالة x

$$x = 3y - 2 \Rightarrow x + 2 = 3y$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+2}{3}$$

٤- نستبدل y بـ $f^{-1}(x)$ فنحصل على الدالة العكسية

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \qquad \square$$

تمارين (٢,٥)

في التمارين من (١) إلى (١٢) أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة

١- $f(x) = 3x$ ٢- $f(x) = \sqrt{x-1}$

٣- $f(x)=2-\sqrt{x}$

٤- $f(x)=\sqrt{x}+3$

٥- $f(x)=2+\sqrt{5-x}$

٦- $f(x)=\dfrac{1}{x}$

٧- $f(x)=5+\dfrac{5}{x}$

٨- $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$

٩- $f(x)=\dfrac{9}{x+4}$

١٠- $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

١١- $f(x)=\dfrac{5-3x}{7-4x}$

١٢- $f(x)=\sqrt[3]{x+3}-2$

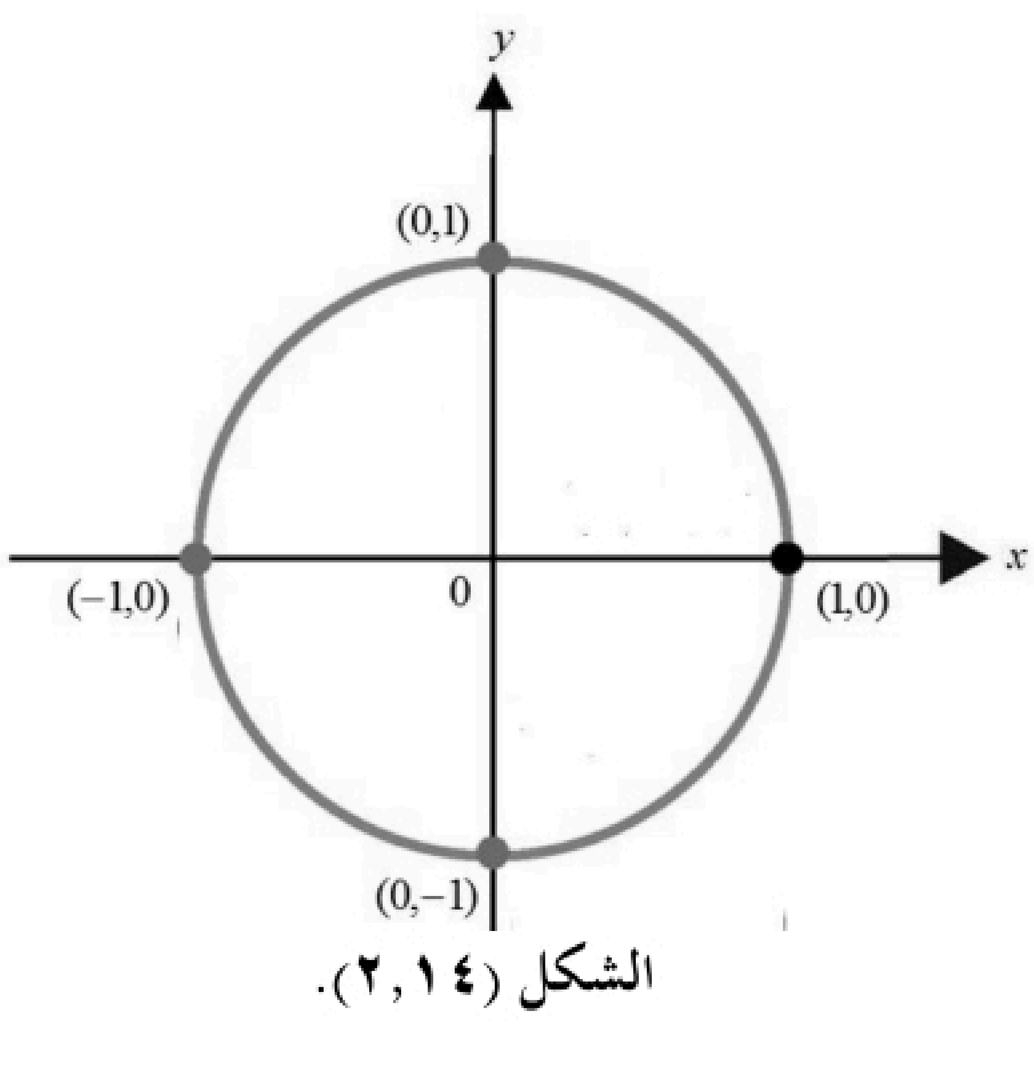
(٢,٦) الدوال المثلثية والمثلثية العكسية

Trigonometric Functions and Their Inverse

نتعرف في هذا القسم على الدوال المثلثية وطرق حسابها وكذلك نتطرق لقوانين مهمة في الدوال المثلثية. ثم بعد ذلك نعرف الدوال المثلثية العكسية ، ونبين خواصها وطرق حسابها.

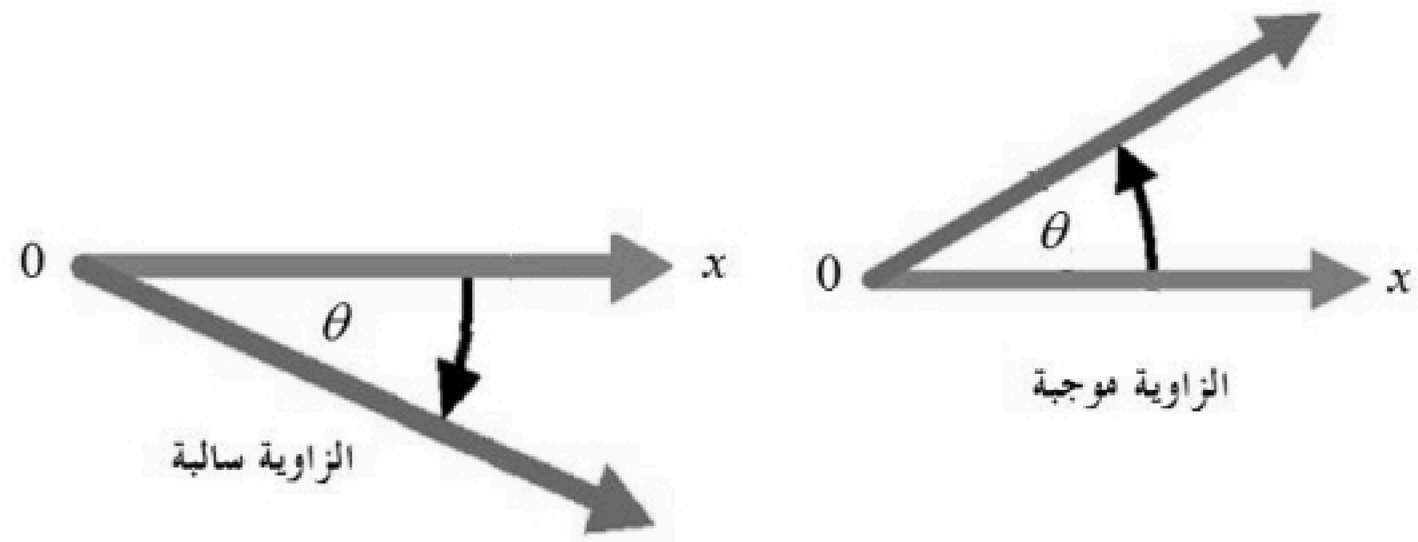
(٢,٦,١) الزوايا والتقدير الدائري

هناك طريقتان لقياس الزوايا: الطريقة الأولى باستخدام الدرجات والطريقة الثانية باستخدام التقدير الدائري (الراديان). في هذا القسم سوف نعتمد على دائرة الوحدة في حساب الدوال المثلثية وتعرف دائرة الوحدة بأنها الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها واحد كما في الشكل (٢,١٤) ومعادلتها $x^2+y^2=1$.



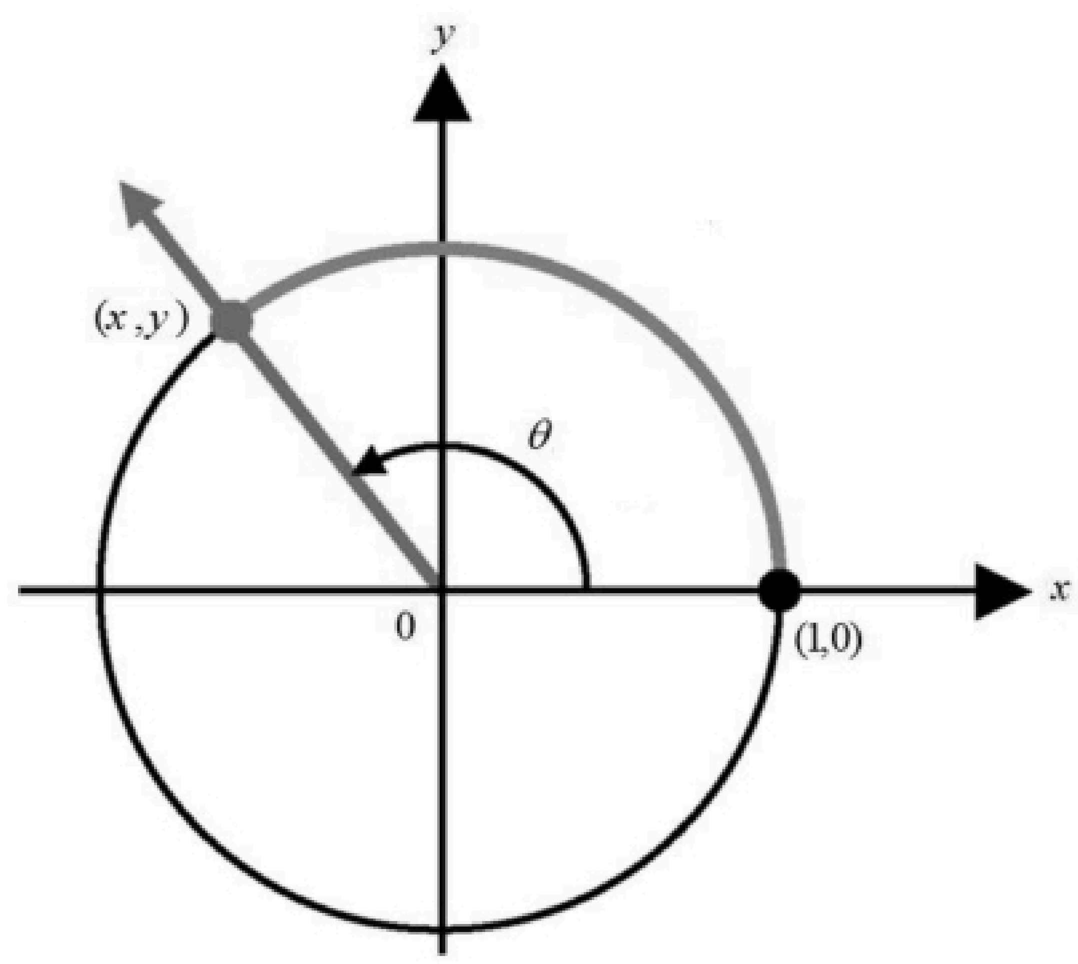
الشكل (٢,١٤).

عند قياس زاوية ما فإننا نبدأ من محور x وتكون الزاوية موجبة إذا كانت بعكس اتجاه عقارب الساعة وتكون سالبة إذا كانت باتجاه عقارب الساعة كما في الشكل (٢,١٥).



الشكل (٢,١٥).

يعرف الراديان بأنه قياس الزاوية المقابلة لقوس طوله 1 في دائرة الوحدة. وبالتالي فإن قياس الزاوية θ بالراديان هو طول القوس في دائرة الوحدة من النقطة $(1,0)$ إلى النقطة $(x\,,y)$ كما يوضح الشكل (٢,١٦).



الشكل (٢,١٦).

ما هي العلاقة بين التقدير الستيني (الدرجات) والتقدير الدائري (الراديان) ؟

نعلم أن قياس دورة كاملة بالتقدير الستيني هو 360° ومحيط الدائرة هو 2π ، إذاً الزاوية 360° تقابل 2π راديان وبالقسمة على 2 نحصل على 180° تقابل π راديان.

قاعدة: التحويل بين القياس الستيني والدائري

باستخدام القاعدة $180^\circ = \pi$ راديان نحصل على القاعدة التالية

١- للتحويل من درجات إلى راديان نضرب في $\dfrac{\pi}{180}$

٢- للتحويل من راديان إلى درجات نضرب في $\dfrac{180}{\pi}$

مثال (٢,١٤)

حول الزاويتين التاليتين إلى راديان

١- $\theta_1 = 30^\circ$ ٢- $\theta_2 = 90^\circ$

الحل

١- $\theta_1 = 30 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{30\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$

٢- $\theta_2 = 90 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{90\pi}{180} = \dfrac{\pi}{2}$ □

مثال (٢,١٥)

حول الزاويتين التاليتين من راديان إلى درجات

١- $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ ٢- $\theta_2 = \dfrac{-4\pi}{3}$

الحل

١- $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = \dfrac{180\pi}{3\pi} = 60^\circ$

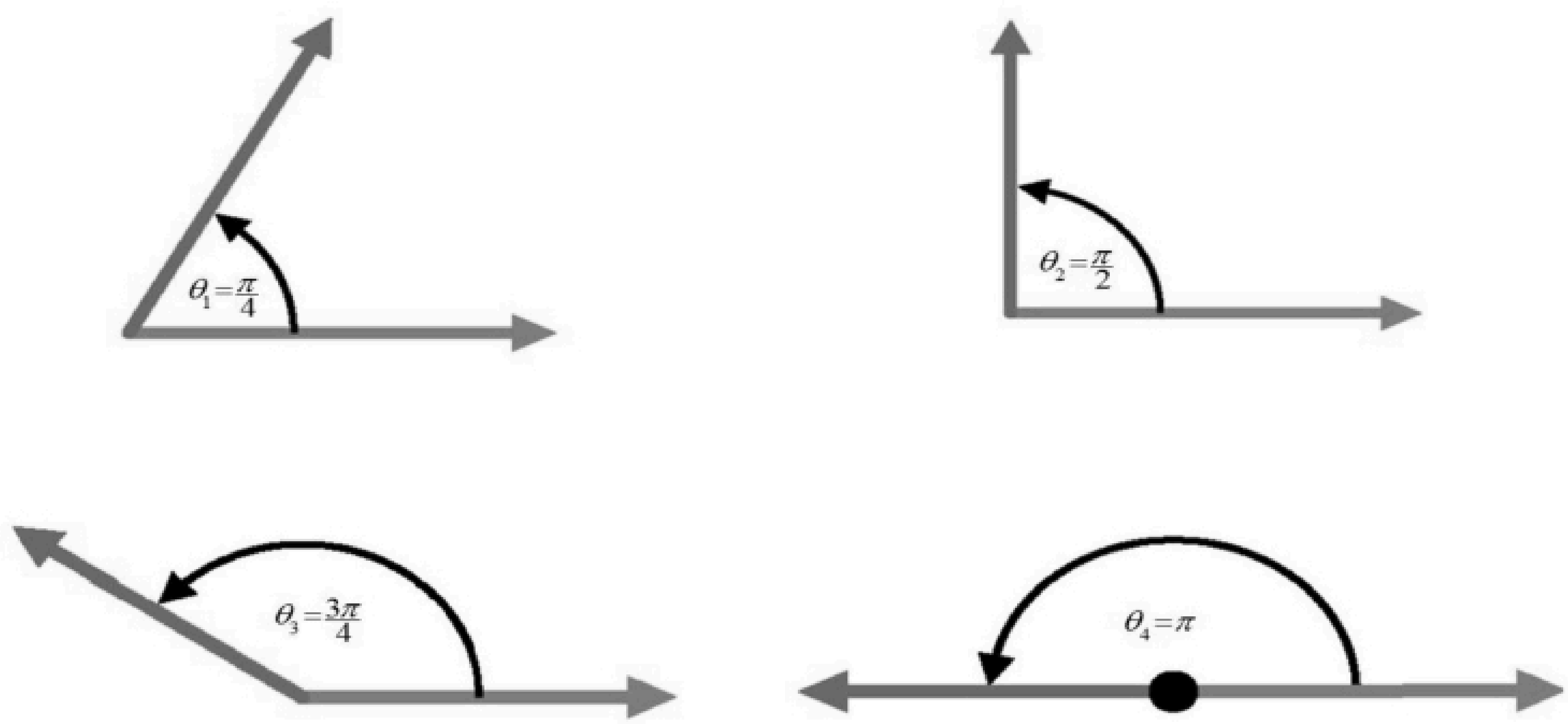
٢- $\theta_2 = \dfrac{-4\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = -4 \times \dfrac{180}{3} \times \dfrac{\pi}{\pi} = -240^\circ$ □

في الجدول التالي نعرض بعض الزوايا بالراديان وما يعادلها بالدرجات

π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	0	راديان
180°	90°	60°	45°	30°	0°	درجات

(٢,٦,٢) رسم الزوايا

من الآن فصاعداً سوف نركز على الزوايا الدائرية (راديان). يوضح الشكل (٢.١٧) رسم الزوايا $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ ، $\theta_4 = \pi$.



الشكل (٢,١٧).

مثال (٢,١٦)

ارسم الزاويتين التاليتين

١- $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ ٢- $\theta_2 = \frac{-3\pi}{4}$

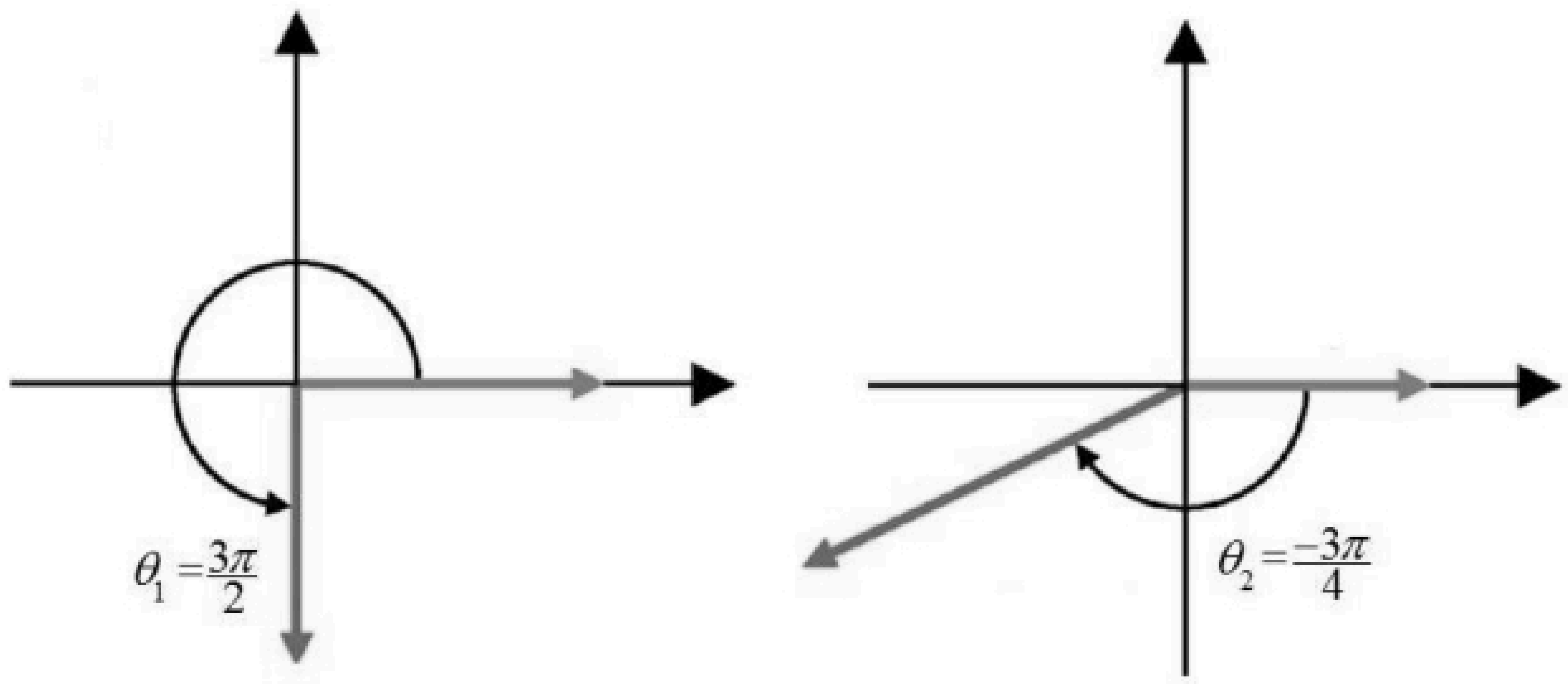
الحل

١- نعيد كتابة $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ بالصورة $\theta_1 = \pi + \frac{\pi}{2}$ ، ثم نرسم الزاوية كما في الشكل (٢.١٨).

٢- الزاوية $\theta_2 = \frac{-3\pi}{4}$ سالبة وبالتالي يكون اتجاهها باتجاه عقارب الساعة. الآن نهمل إشارة السالب ونعيد كتابة θ_2 بالصورة

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

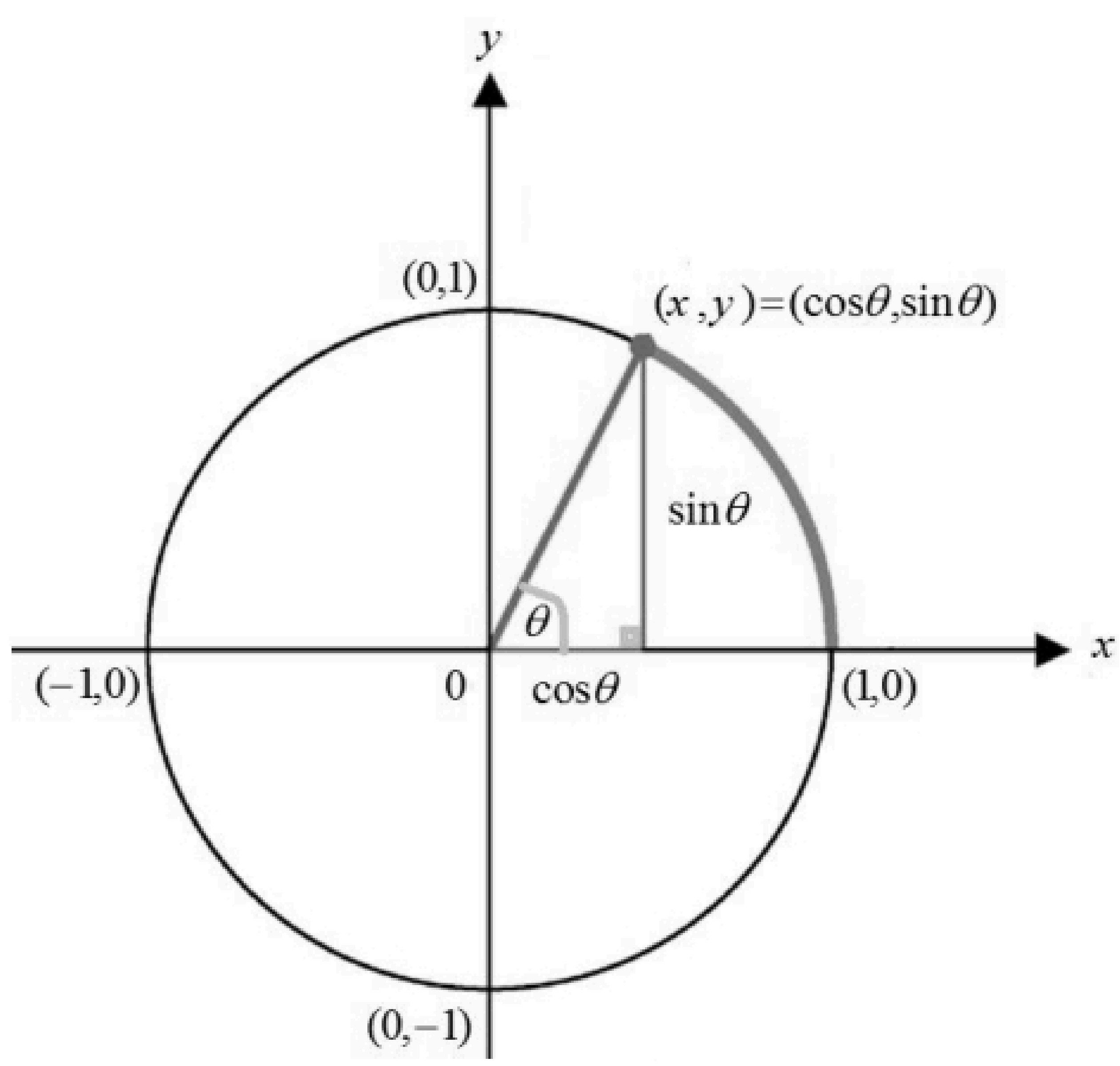
وبالتالي فإن الزاوية تقع الربع الثالث، كما هو موضح في الشكل (٢,١٨). □



الشكل (٢,١٨).

(٢,٦,٣) دالة الجيب وجيب التمام

لتكن لدينا دائرة الوحدة فيها زاوية θ بحيث إن ضلع الزاوية θ يقطع الدائرة في النقطة (x, y) كما هو موضح في الشكل (٢,١٩).



الشكل (٢,١٩).

في هذه الحالة نعرف دالة الجيب ($\sin\theta$) بأنها الإحداثي الصادي y

$$\sin:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\sin\theta = y$$

بينما دالة جيب التمام ($\cos\theta$) فتعرف بأنها الإحداثي السيني x

$$\cos:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\cos\theta = x$$

ونعلم أن معادلة دائرة الوحدة هي $x^2+y^2=1$ ، إذاً

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

بما أن $\sin\theta$ و $\cos\theta$ تتحركان على دائرة الوحدة ، فهما محدودتان. أكبر قيمة يمكن أن تأخذها $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هي 1 و أصغر قيمة هي -1 إذاً

$$-1\le\sin\theta\le 1 \quad \text{و} \quad -1\le\cos\theta\le 1$$

وبالتالي

$$|\sin\theta|\le 1 \quad \text{و} \quad |\cos\theta|\le 1$$

أي أن مدى الدالتين هو الفترة $[-1,1]$.

مثال (٢,١٧)

احسب قيمة ما يلي

١- $\sin 0$ ٢- $\cos 0$

٣- $\sin(\pi/2)$ ٤- $\cos(\pi/2)$

الحل

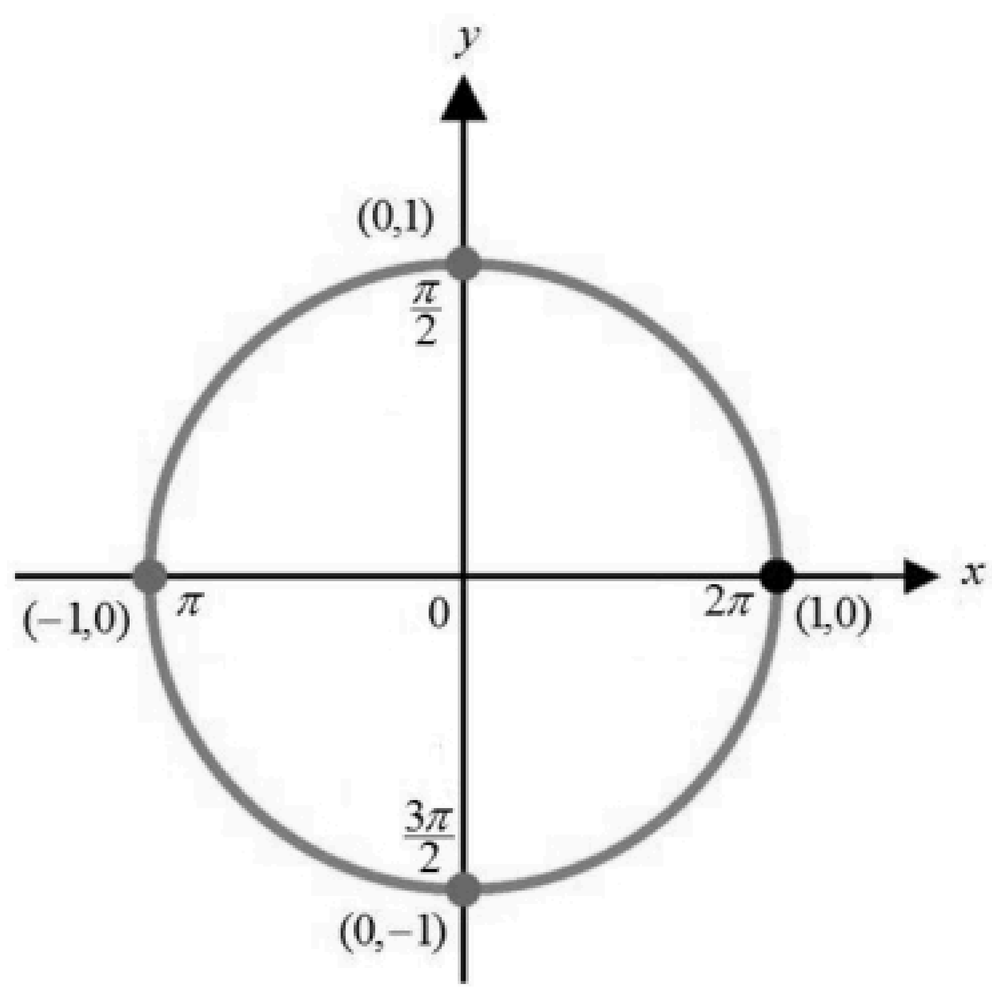
١- من دائرة الوحدة نجد أن $\sin 0$ هي الإحداثي الصادي لتقاطع الزاوية صفر مع دائرة الوحدة وهي النقطة $(1,0)$ ، إذاً $\sin 0 = 0$

٢- $\cos 0 = 1$ وهو الإحداثي السيني للنقطة $(1,0)$

٣- $\sin(\pi/2)=1$

٤- $\cos(\pi/2)=0$ □

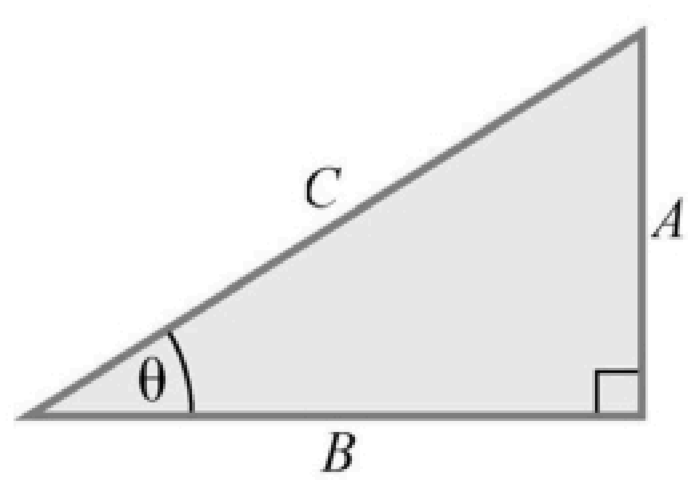
من المثال السابق يمكن حساب دالة الجيب وجيب التمام باستخدام دائرة الوحدة عند الزوايا 2π ,$\frac{3\pi}{2}$,π ,$\frac{\pi}{2}$,0 ، كما هو موضح في الشكل (٢,٢٠)



الشكل (٢,٢٠).

استخدام المثلث القائم الزاوية لحساب قيم الزوايا المثلثية

ليكن لدينا المثلث الموضح بالشكل (٢,٢١)



الشكل (٢,٢١).

تعرف الزاوية $\sin\theta$ كالتالي

$$\sin\theta = \frac{A}{C}$$

تعرف الزاوية $\cos\theta$ كالتالي

$$\cos\theta = \frac{B}{C}$$

يسمى A مقابل الزاوية θ ، B مجاور الزاوية θ و يسمى C الوتر.

بما أن المثلث قائم الزاوية إذاً يكفينا معرفة طول ضلعين ونستطيع حساب الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورس.

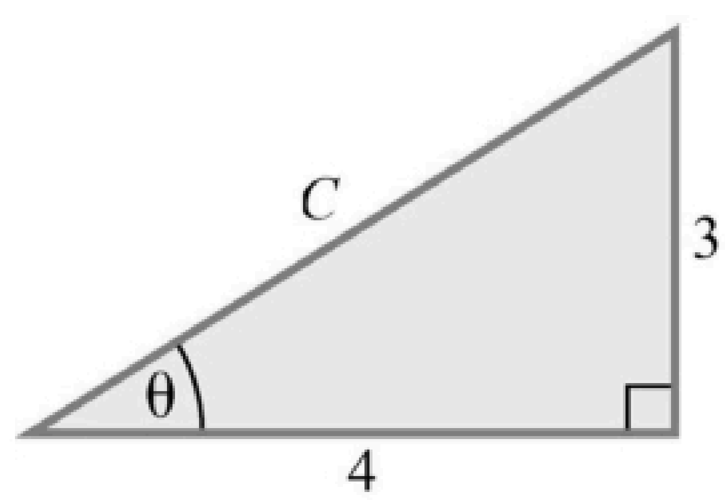
نظرية فيثاغورس

إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان طول ضلعي الزاوية القائمة B , A وطول الوتر C فإن

$$C^2 = A^2 + B^2$$

مثال (٢,١٨)

في الشكل التالي احسب قيمة $\sin\theta$ و $\cos\theta$



الحل

في البداية نطبق نظرية فيثاغورس لإيجاد الضلع الثالث (الوتر)

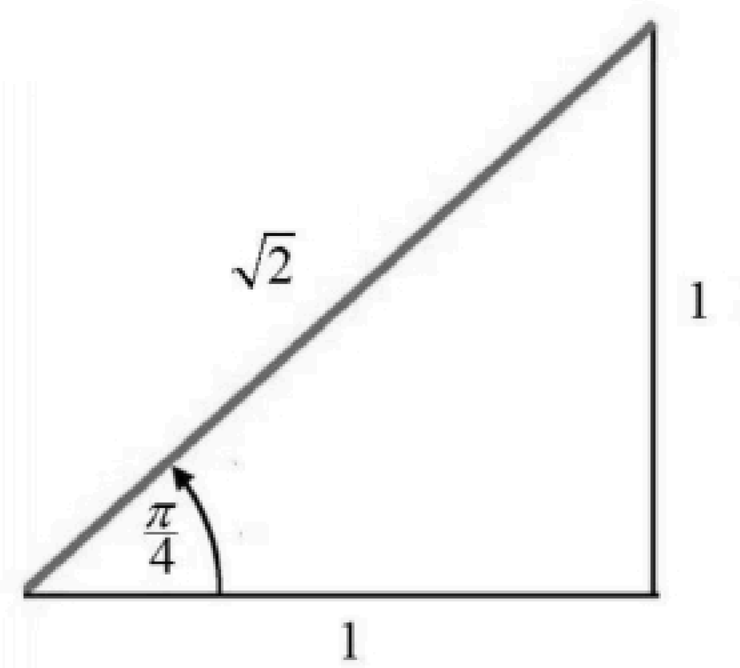
$$\begin{aligned} C^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9+16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

إذاً $C = 5$ لأن C موجبة. الآن $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $\cos\theta = \frac{4}{5}$. □

قيمة الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

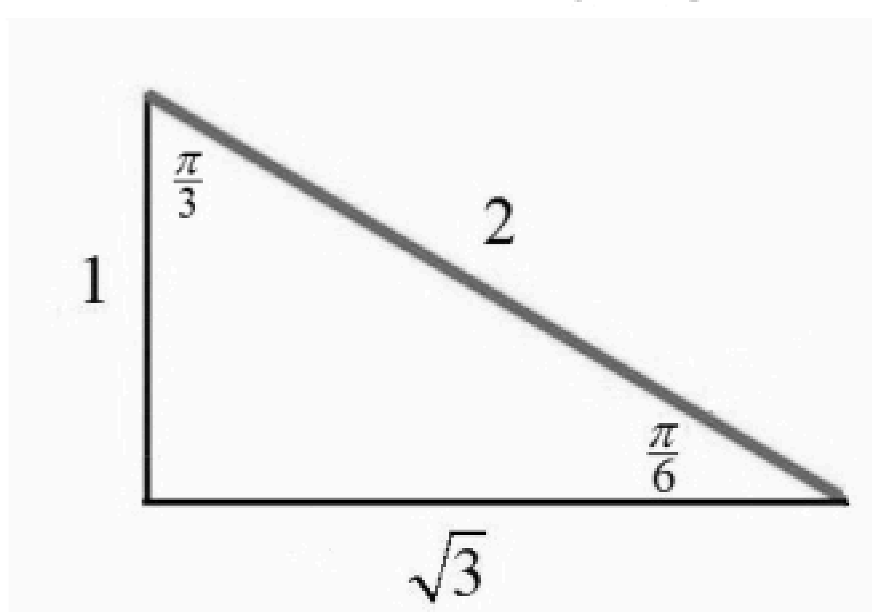
هناك زوايا خاصة يمكن إيجاد قيمة الدوال المثلثية لها مباشرة باستخدام المثلث قائم الزاوية وهي الزوايا $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

بالنسبة للزاوية $\frac{\pi}{4}$ نرسم المثلث الموضح بالشكل التالي



$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بينما بالنسبة للزاويتين $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ فإننا نستخدم المثلث التالي



$$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \qquad \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

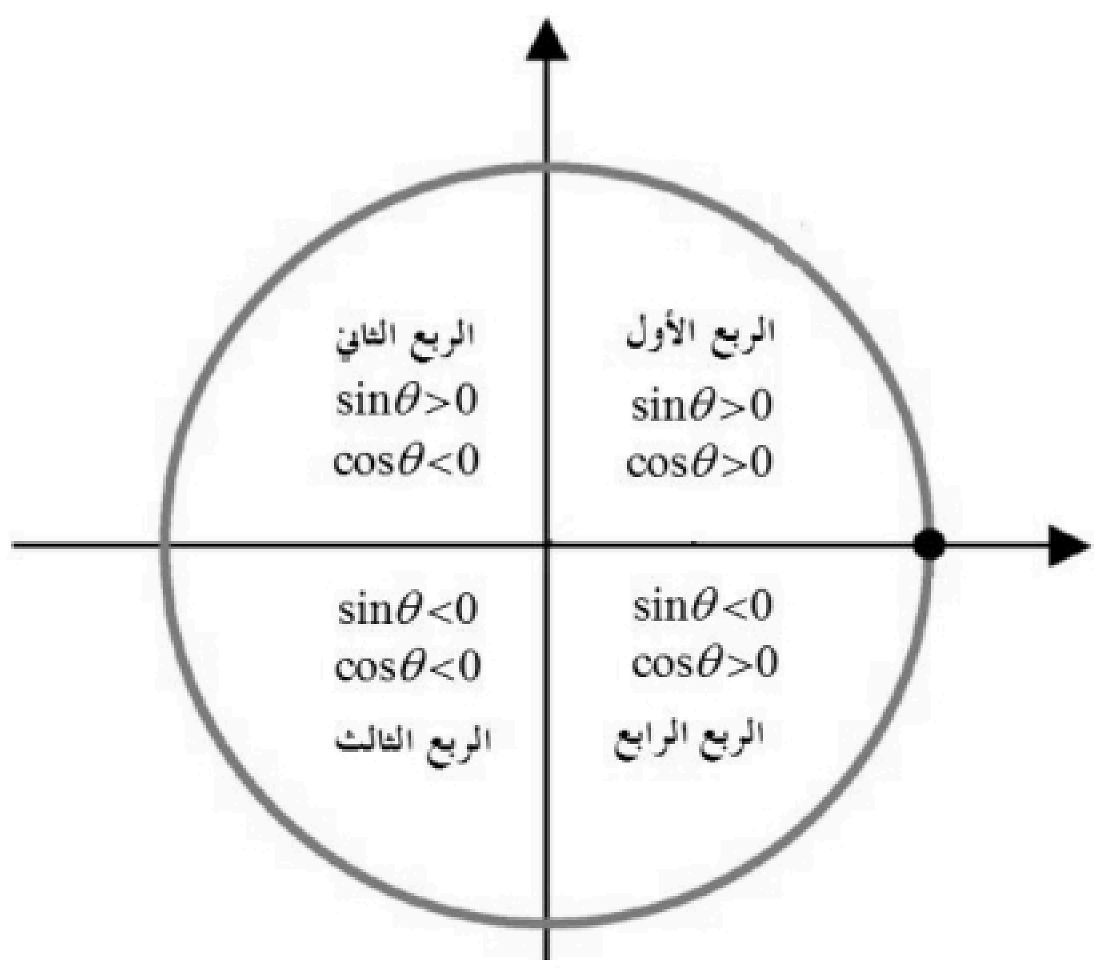
$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

الجدول التالي يبين قيم الدوال $\sin\theta$ و $\cos\theta$ لبعض الزوايا الخاصة :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

إشارة الدوال المثلثية

إن الدالة $\sin\theta$ تكون موجبة في الربع الأول والثاني بينما $\cos\theta$ فهي موجبة في الربع الأول والرابع كما يوضح الشكل (٢,٢٢)



الشكل (٢,٢٢).

يمكن تلخيص المعلومات السابقة عن الدالتين $\sin\theta$ و $\cos\theta$ كما يلي :

الدالة $\sin\theta$:

$$\sin:\ \mathbb{R}\to[-1,1]$$

وبالتالي فإن مجال تعريفها هو $D_{\sin}=\mathbb{R}$ ومداها هو $R_{\sin}=[-1,1]$

خواص الدالة $\sin\theta$:

١- الدالة دورية ودورتها 2π ، أي أن

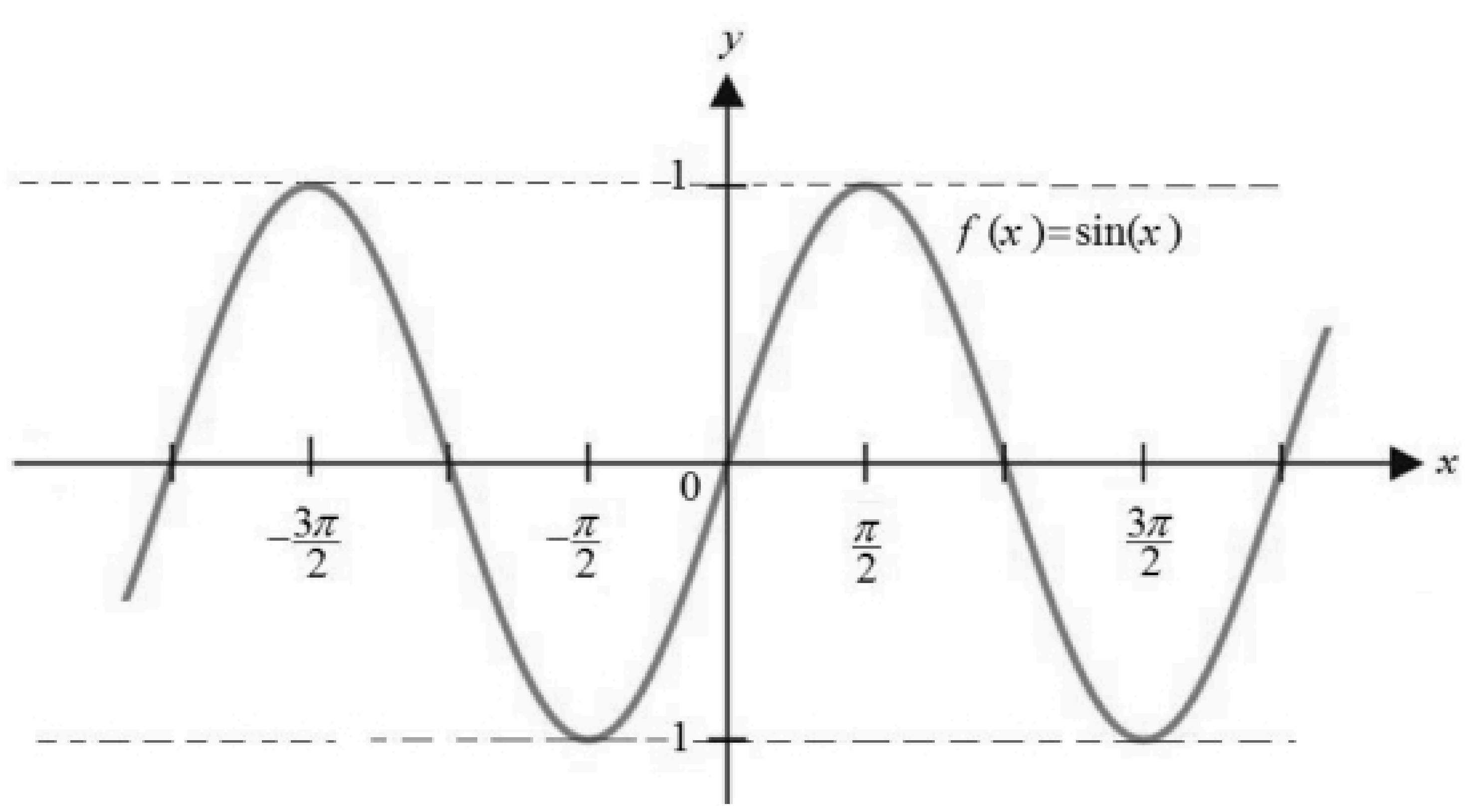
$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta, \qquad \forall\ \theta\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{Z}$$

٢- الدالة فردية ، أي أن

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta, \qquad \forall\ \theta\in\mathbb{R}$$

٣- $\sin\theta=0$ عندما $\theta=n\pi$ لكل $n\in\mathbb{Z}$

نستطيع الآن رسم الدالة $y=\sin x$ كما هو موضح بالشكل (٢,٢٣)



الشكل (٢,٢٣).

الدالة $\cos\theta$:

$$\cos:\ \mathbb{R}\to[-1,1]$$

وبالتالي فإن مجال تعريفها هو $D_{\cos}=\mathbb{R}$ ومداها هو $R_{\cos}=[-1,1]$

خواص الدالة $\cos\theta$:

١- الدالة دورية ودورتها 2π ، أي أن

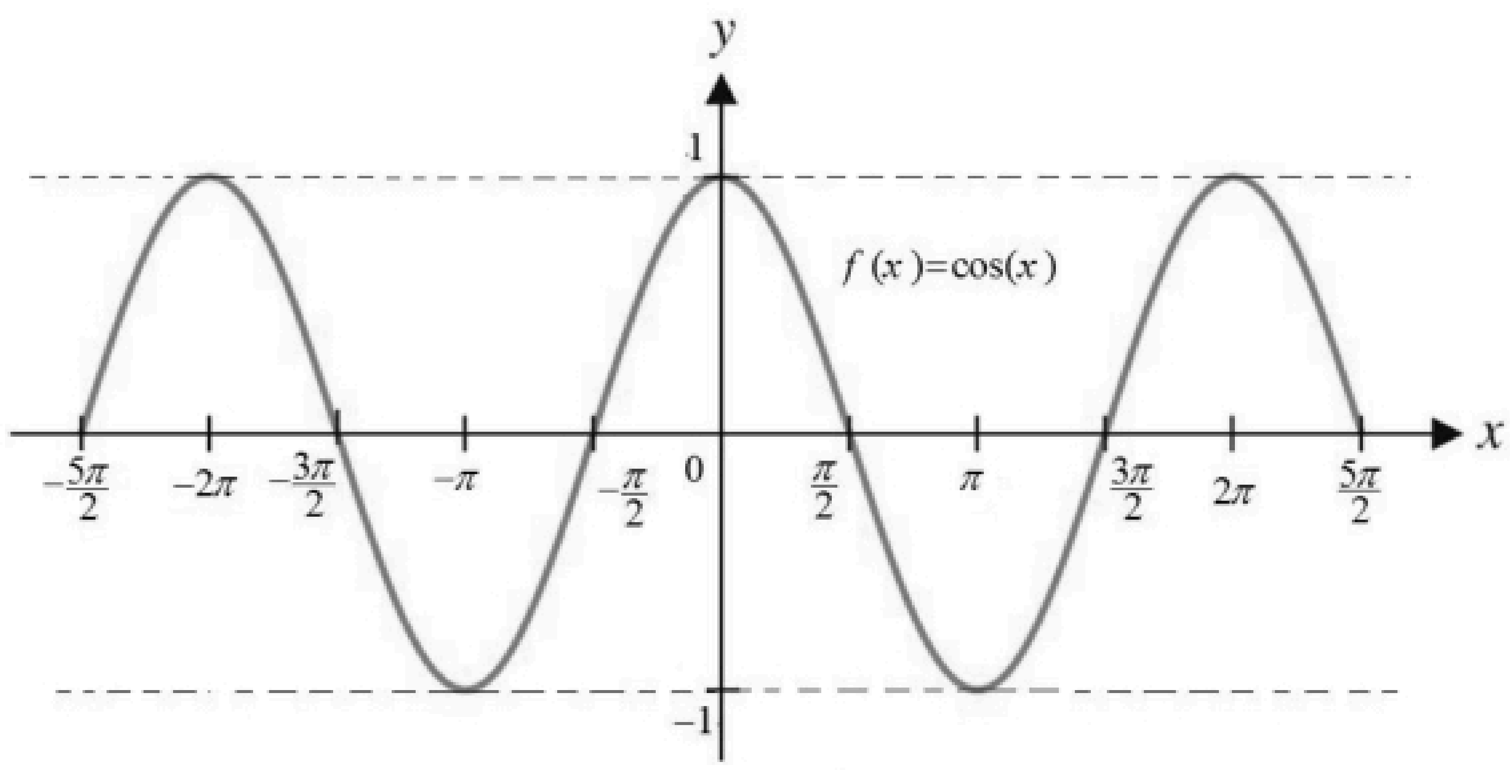
$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta, \qquad \forall\ \theta\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{Z}$$

٢- الدالة زوجية ، أي أن

$$\cos(-\theta)=\cos\theta, \qquad \forall\ \theta\in\mathbb{R}$$

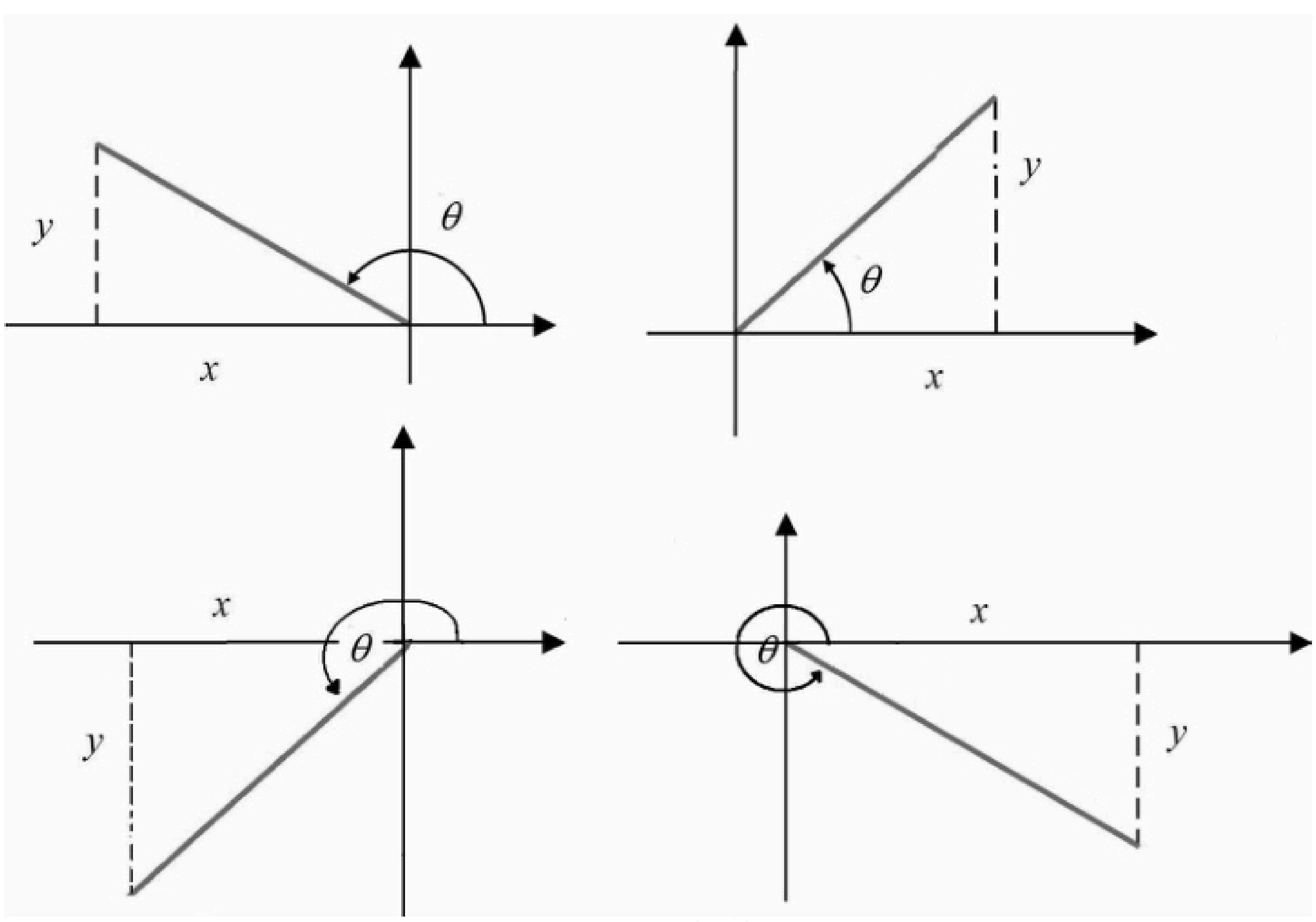
٣- $\cos\theta = 0$ عندما $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

نستطيع الآن رسم الدالة $y = \cos x$ كما هو موضح بالشكل (٢,٢٤)



الشكل (٢,٢٤).

لحساب قيمة $\sin\theta$ فإننا نقوم بتحديد مكان الزاوية θ ثم نسقط عموداً من أحد نقاط المستقيم على محور x كما يوضح ذلك الشكل (٢,٢٥)



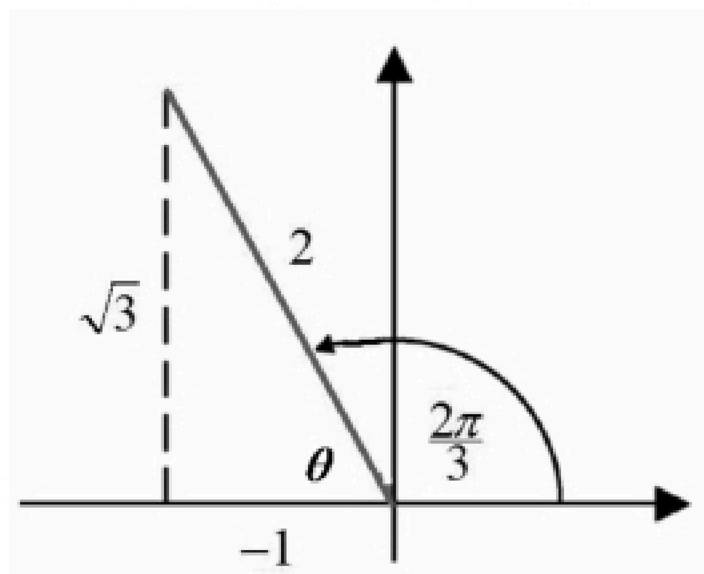
الشكل (٢,٢٥).

مثال (٢,١٩)

أوجد قيمة $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ و $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

الحل

في البداية نلاحظ أن $\pi > \frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$ إذاً $\frac{2\pi}{3}$ تقع في الربع الثاني، انظر الشكل التالي



نوجد قيمة θ ، $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \pi = \theta$. الآن نحدد قيمة أضلاع المثلث بمعلومية الزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$ ونحدد إشارة كل عدد

$$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{-1}{2}$$ □

(٢,٦,٤) بقية الدوال المثلثية

دالة الظل $f(\theta) = \tan\theta$

حيث إن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، إذاً مجال الدالة هو $D_{\tan} = \mathbb{R} - \{(n+\frac{1}{2})\pi :\ n \in \mathbb{Z}\}$

ومداها $R_{\tan} = \mathbb{R}$

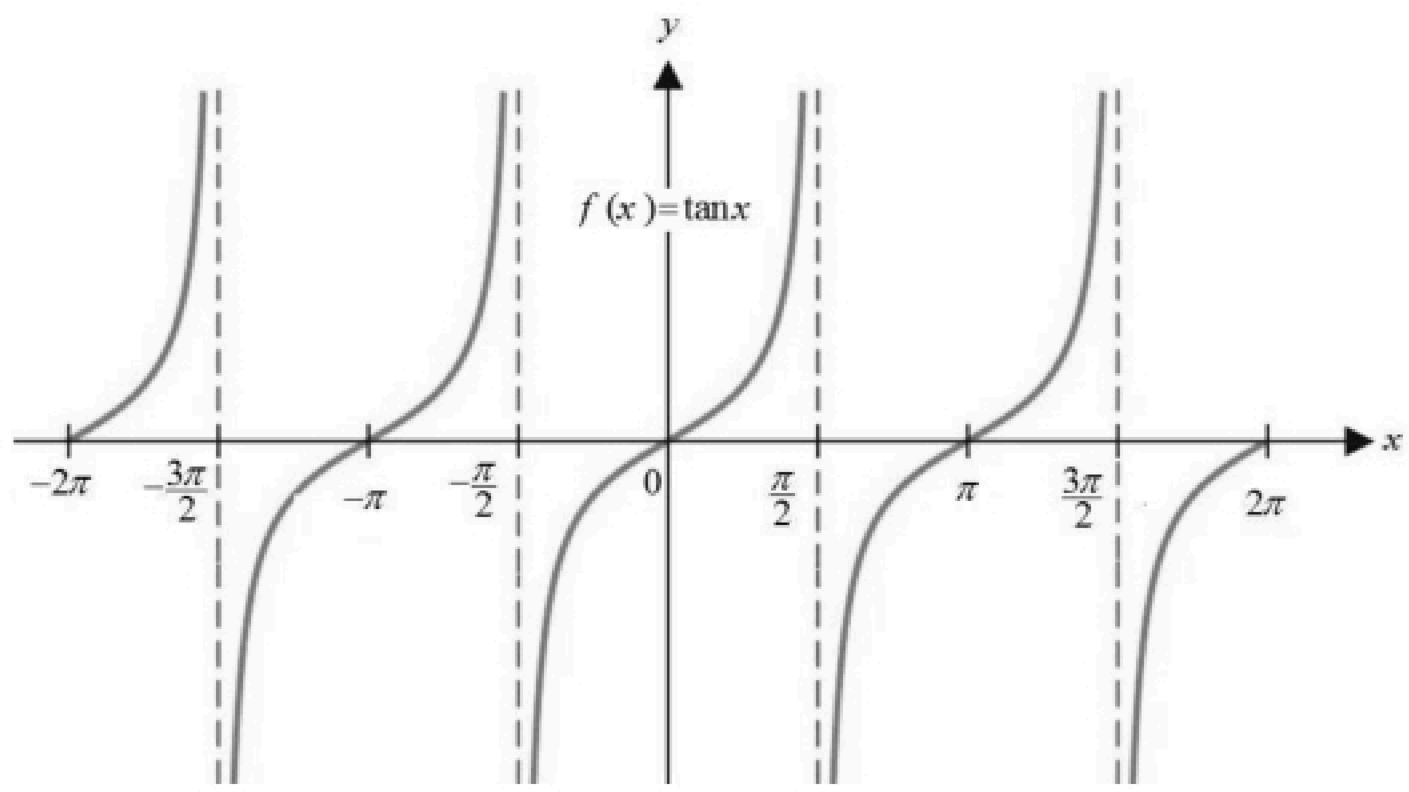
خواص دالة الظل:

١- الدالة فردية لأن

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$$

٢- $\tan(\theta)=0 \Rightarrow \sin(\theta)=0 \Leftrightarrow \theta = n\pi, \quad \forall \quad n\in\mathbb{Z}$

٣- منحنى الدالة $f(x)=\tan(x)$ يأخذ الشكل (٢,٢٦)



الشكل (٢,٢٦).

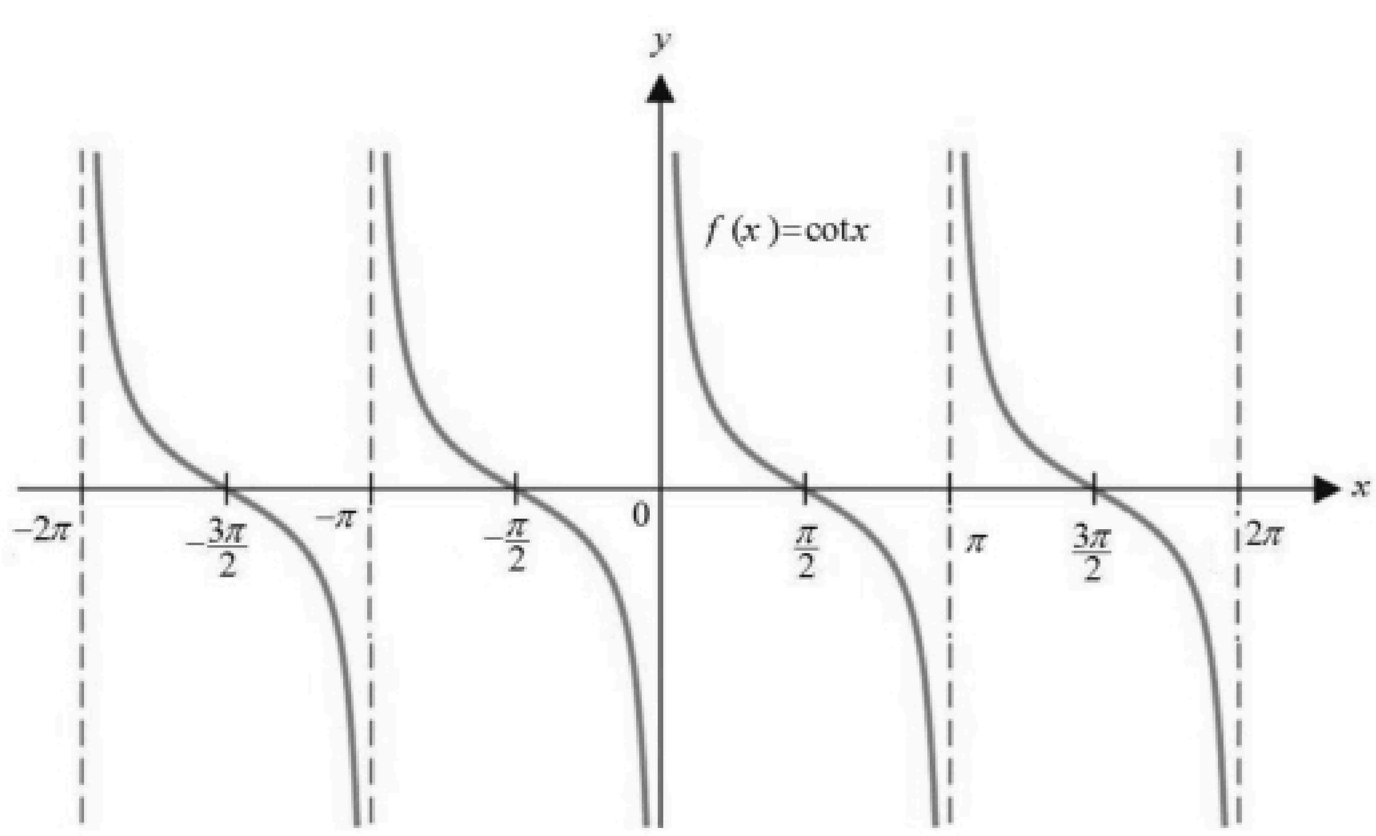
بالمثل يمكن استنتاج بقية الدوال المثلثية :

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \theta \neq n\pi, \ n\in\mathbb{Z}$$

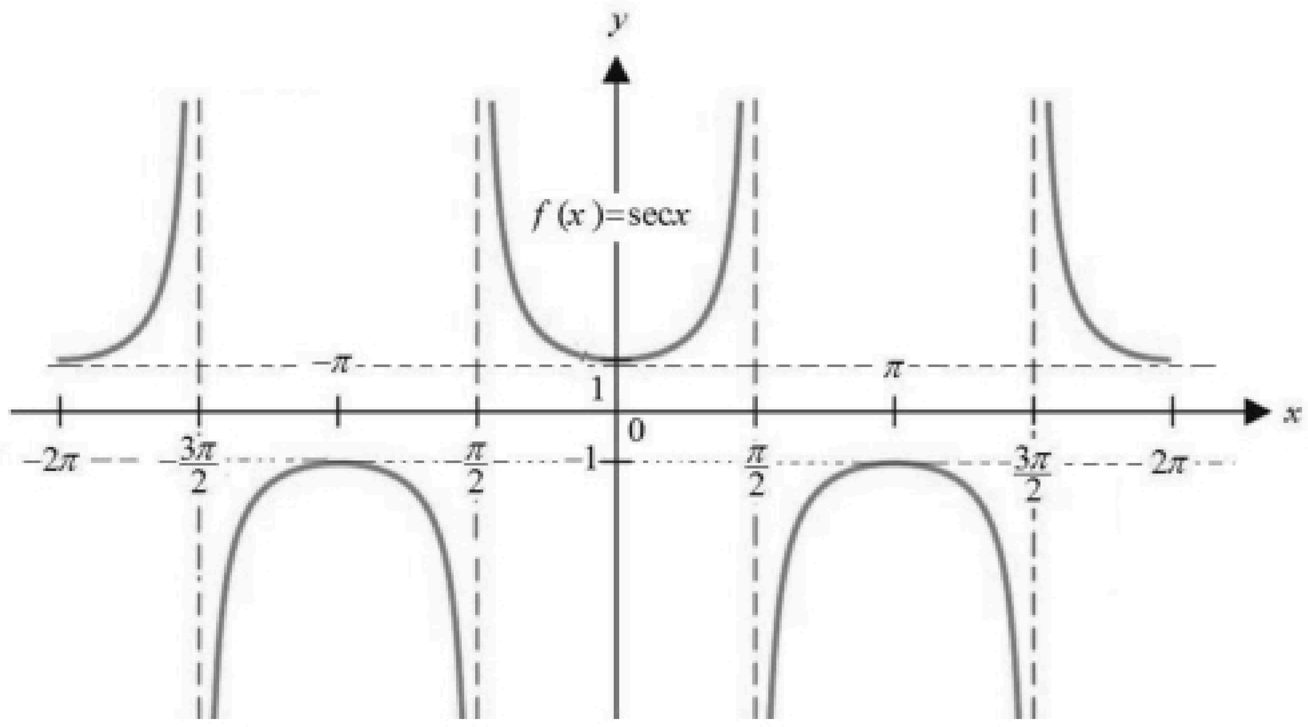
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \theta \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \ n\in\mathbb{Z}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \theta \neq n\pi, \ n\in\mathbb{Z}$$

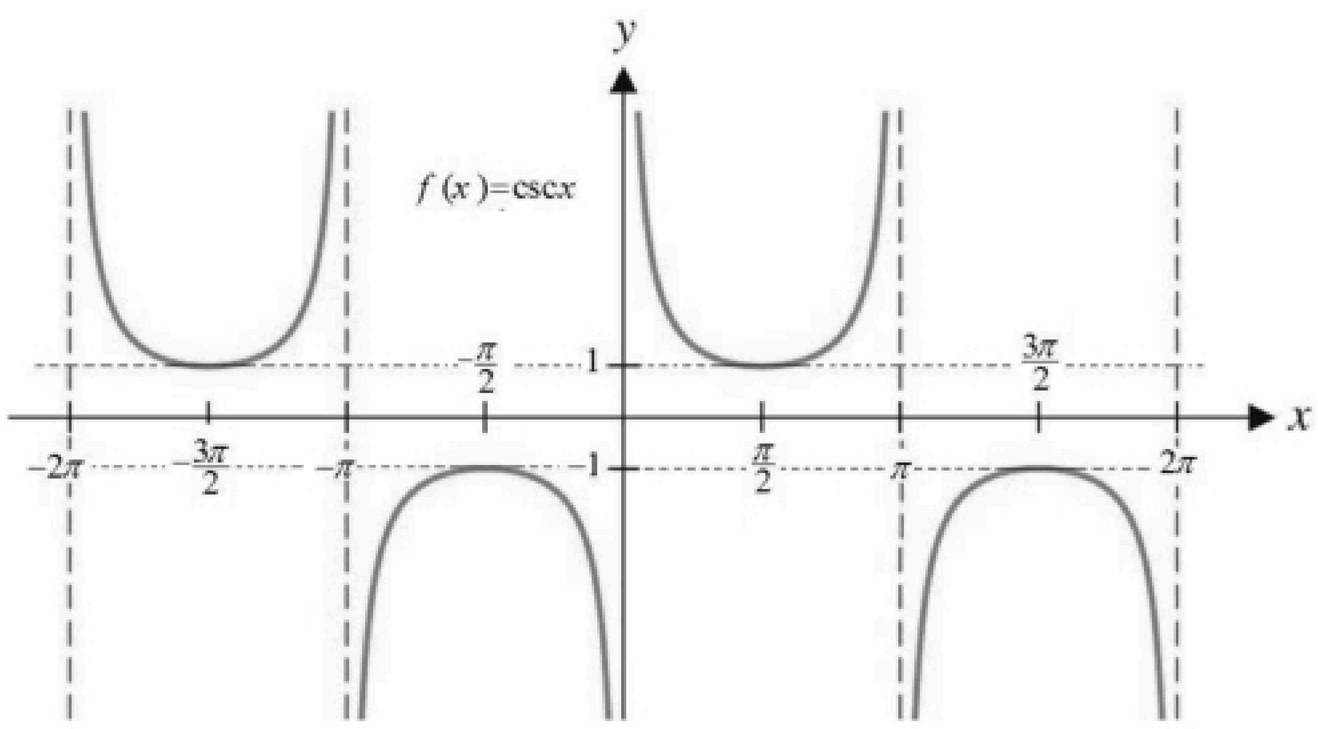
بيان الدوال $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ ممثل بالأشكال (٢,٢٧-٢,٢٩):



الشكل (٢,٢٧).



الشكل (٢,٢٨).



الشكل (٢,٢٩).

قوانين مهمة

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$
$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$1+\tan^2 x=\sec^2 x$$
$$1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

قوانين أخرى

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\,\tan y}$$

$$\sin(x+\pi)=-\sin x$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos x$$

$$\sin(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x-\cos y=-2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(٢,٦,٥) الدوال المثلثية العكسية

نعلم من دراستنا السابقة أن وجود دالة عكسية يشترط أن تكون الدالة الأصلية تقابل (متباينة و غامرة). الآن يمكن إيجاد معكوس الدوال المثلثية وذلك بإعادة تعريف مجالها بحيث تكون تقابل:

١ - الدالة العكسية للدالة $f(x)=\sin x$

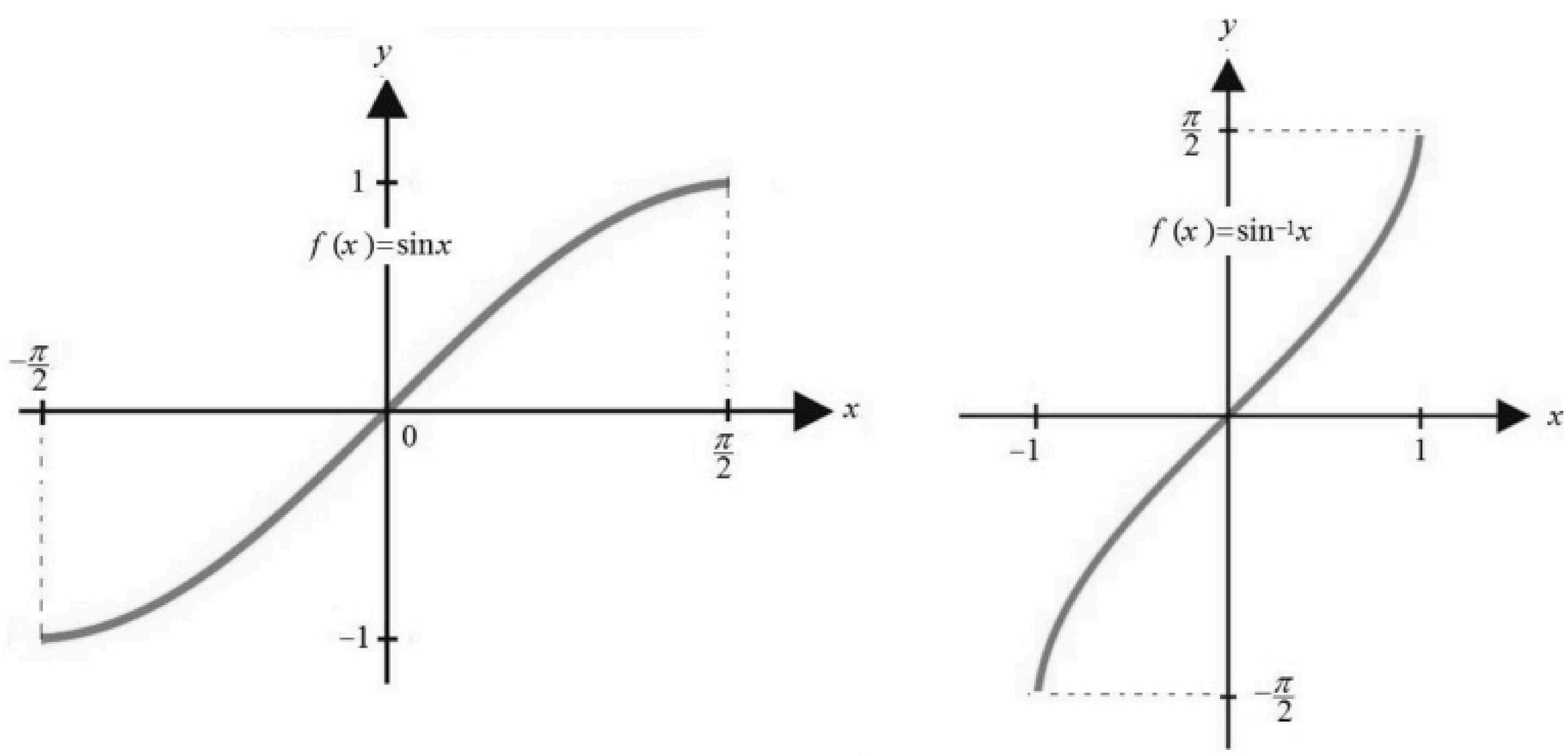
إذا أعدنا تعريف الدالة بالصورة

$$\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$$

في هذه الحالة تكون الدالة تقابل ويوجد لها دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $\sin^{-1}x$ أو $\arcsin x$ ويكون

$$\sin^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$
$$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y$$

ومنحنى الدالة $f(x)=\sin^{-1}x$ يعطى بالشكل (٢,٣٠).



الشكل (٢,٣٠).

٢- الدالة العكسية للدالة $f(x)=\cos x$

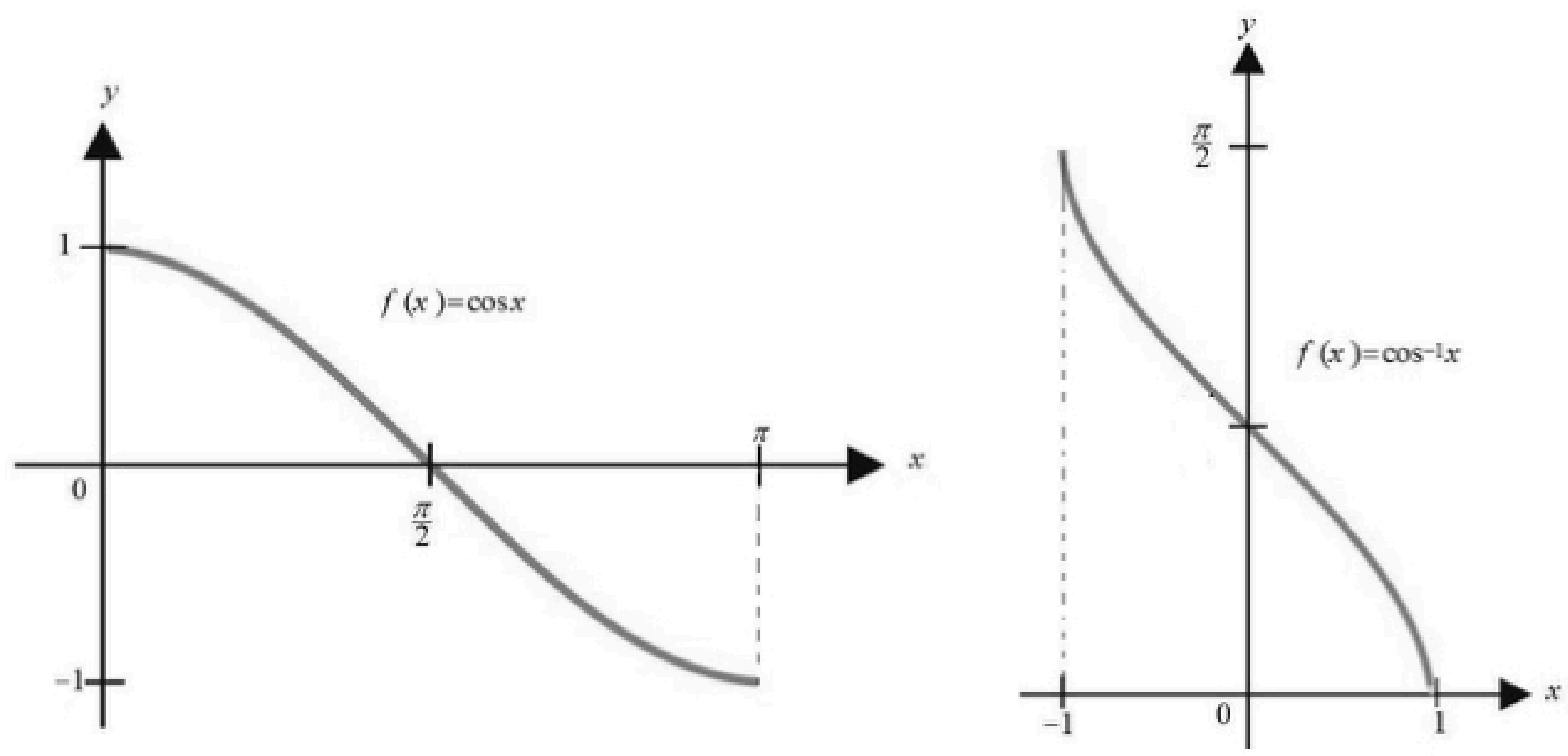
إذا أعدنا تعريف الدالة بالصورة

$$\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$$

في هذه الحالة تكون الدالة تقابل ويوجد لها دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $\cos^{-1}x$ أو $\arccos x$ ويكون

$$\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$$
$$y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y$$

منحنى الدالة الأصلية والدالة العكسية يعطى بالشكل (٢,٣١).



الشكل (٢,٣١).

٣- الدالة العكسية للدالة $f(x) = \tan x$

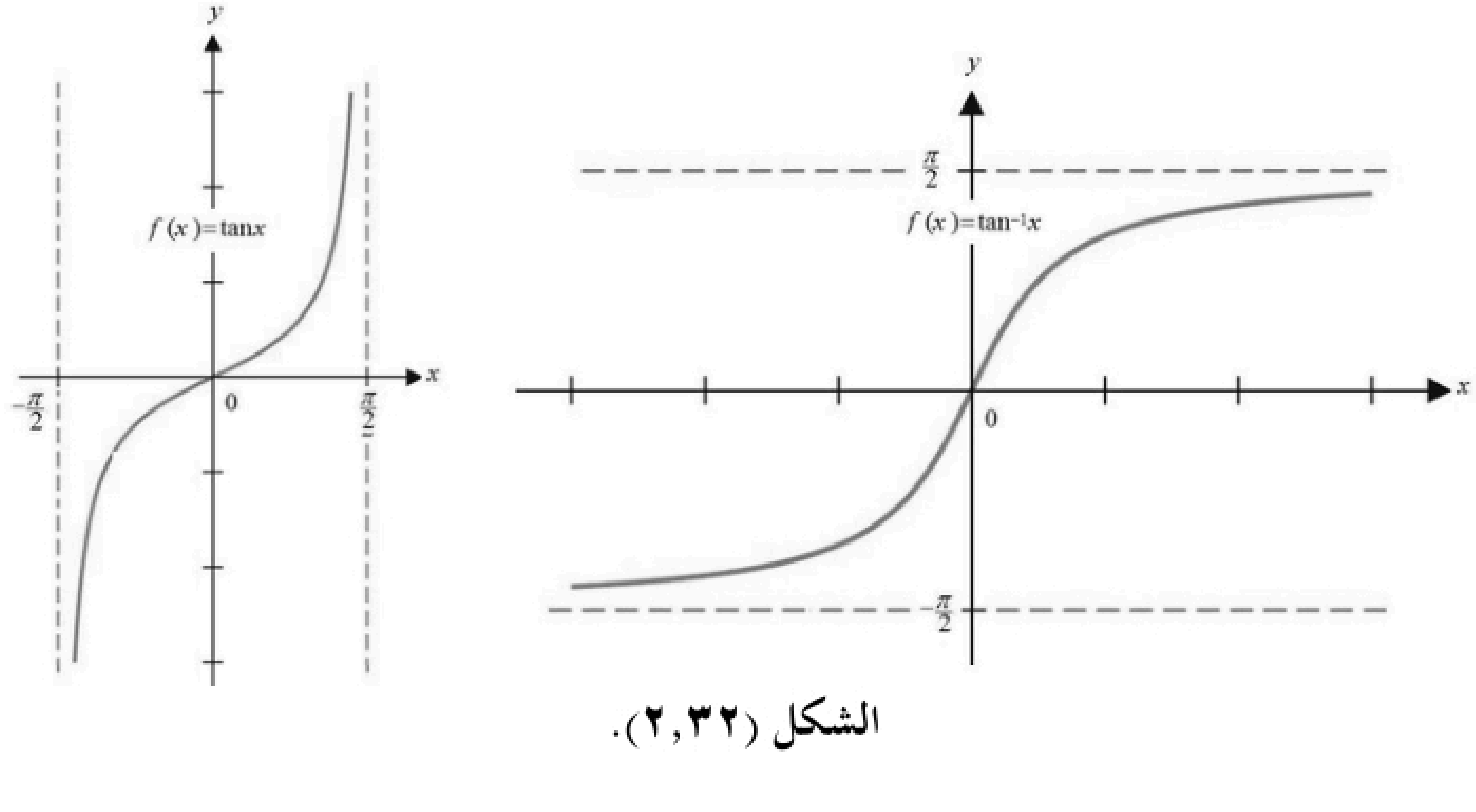
إذا أعدنا تعريف الدالة بالصورة

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

في هذه الحالة تكون الدالة تقابل ويوجد لها دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $\tan^{-1} x$ أو $\arctan x$ ويكون

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

منحنى الدالة الأصلية والدالة العكسية يعطى بالشكل (٢,٣٢)



الشكل (٢,٣٢).

بالمثل يمكن دراسة الدوال العكسية للدوال $f(x)=\cot x$ ، $f(x)=\sec x$ و $f(x)=\csc x$.

٤- $$\cot^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$$
$$y=\cot^{-1}x \Leftrightarrow x=\cot y$$

٥- $$\sec^{-1}:\mathbb{R}\setminus(-1,1)\to[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$$
$$y=\sec^{-1}x \Leftrightarrow x=\sec y$$

٦- $$\csc^{-1}:\mathbb{R}\setminus(-1,1)\to(-\pi,\frac{\pi}{2}]\cup(0,\frac{\pi}{2}]$$
$$y=\csc^{-1}x \Leftrightarrow x=\csc y$$

مثال (٢,٢٠)

أوجد قيمة $\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

الحل

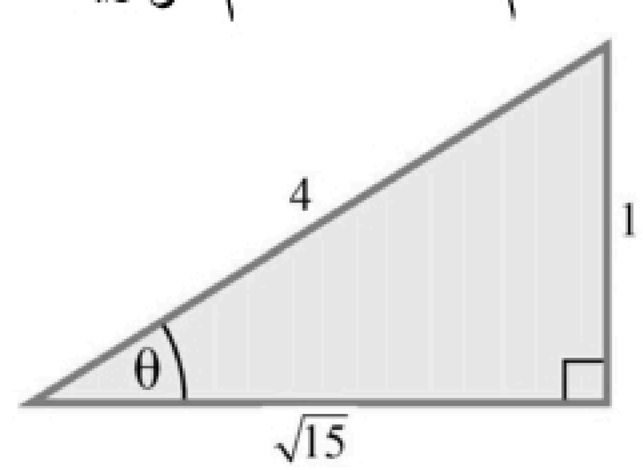
نفرض أن $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

إذاً $\sin\theta=\frac{1}{4}$

وبما أن $\sin\theta>0$ إذاً θ تقع في الربع الأول، الآن نحسب $\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

نحن بحاجة لإيجاد قيمة $\cos\theta$. نستخدم المثلث القائم الزاوية كما هو موضح بالشكل التالي



$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ وبالتالي فإن

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8} \qquad \square$$

مثال (٢,٢١)

أوجد قيمة $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

الحل

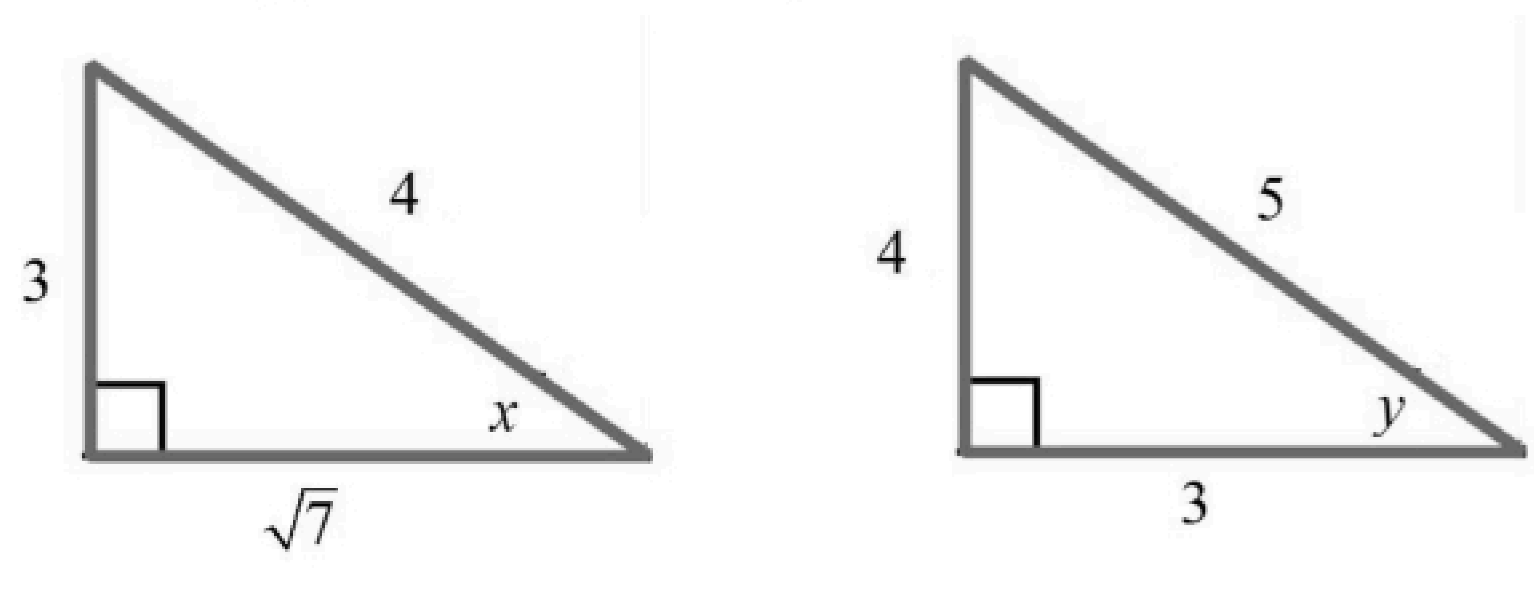
نفرض أن $y=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, $x=\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ وبالتالي يصبح لدينا $\sin x = \frac{3}{4}$,

$$\cos y = \frac{3}{5}$$

وحيث إن $\sin x > 0$ إذاً x تقع في الربع الأول وبما أن $\cos y > 0$ إذاً y تقع في الربع الأول كذلك. أصبح المطلوب الآن إيجاد

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

إذاً بقي أن نوجد $\cos x$, $\sin y$. نقوم برسم مثلثين كما هو موضح بالشكل التالي



فنجد أن $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin y = \frac{4}{3}$ وبالتالي

$$\sin(x+y) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{9+4\sqrt{7}}{20} \qquad \square$$

مثال (٢,٢٢)

أوجد قيمة $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

الحل

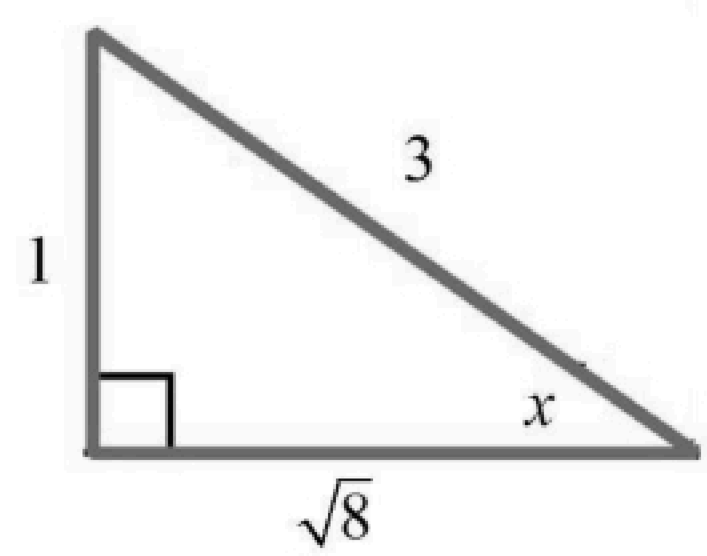
نفرض أن $y=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$, $x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ وبالتالي نجد أن $\sin x=\frac{1}{3}$, $\cos y=\frac{3}{4}$.

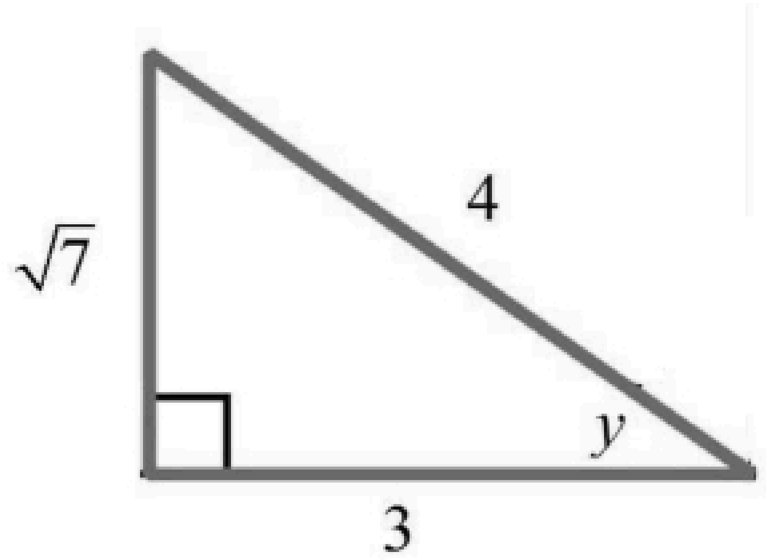
وحيث إن $\sin x>0$ إذاً x تقع في الربع الأول وبما أن $\cos y>0$ إذاً y تقع في الربع الأول كذلك.

أصبح المطلوب الآن إيجاد

$$\cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y$$

إذاً بقي أن نوجد $\cos x\,,\ \sin y$. نقوم برسم مثلثين كما هو موضح بالشكل





فنجد أن $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\sin y=\frac{\sqrt{7}}{4}$ وبالتالي

$$\cos(x+y)=\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{8}-\sqrt{7}}{12}\qquad\square$$

تمارين (٢,٦)

١- احسب قمة مايلي

أ) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ب) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ج) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ د) $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

هـ) $\tan(-\pi)$ و) $\cos(3\pi)$

٢- احسب قيمة ما يلي

أ) $\sin^{-1} 0$ ب) $\cos^{-1} 0$

ج) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ د) $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$

٣- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

أ) $\sin^{-1}(-0.5)$ ب) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ج) $\cos\left(\sin^{-1}(\frac{2}{3})\right)$ د) $\tan\left(\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{5}})\right)$

هـ) $\tan\left(\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{5}})\right)$ و) $\sin^{-1}\left(\sin(1.2)\right)$

٤- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

أ) $\sin\left(\cos^{-1}(\frac{-1}{3})\right)$ ب) $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

ج) $\cos\left(\sin^{-1}(\frac{2}{3})\right)$ د) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

هـ) $\tan\left(\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{5}})\right)$ و) $\cos\left(\cos^{-1}(0.33)\right)$

٥- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

أ) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ب) $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

ج) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ د) $\csc\left(\tan^{-1}(-1)\right)$